文章编号: 1003- 207(2002) 01- 0071- 04

团队生产动态博弈

叶红心, 张朋柱

(西安交通大学管理学院, 陕西 西安 710049)

摘 要: 本文建立了团队生产动态(微分) 博弈模型, 用 Pontryagin 最大值原理和共轭点理论研究了该微分博弈的 Nash 均衡存在的充分必要条件。我们也讨论协调个人理性和集体理性的促进团队合作博弈的机制设置问题。

关键词: 微分博弈; Nash 均衡; Pontryagin 最大值原理; 机制

中图分类号: C931 文献标识码: A

0 引言

今日经济越来越需要人们结成具有伙伴关系的团队。由于许多组织面临巨大的竞争和不确定性, 他们为了增强持久的竞争优势、实现组织目标、提高组织的反应速度、弹性以反应的质量[1]而结成减少成本、提供协作复杂商务的机会[2]、挖掘和利用创新潜力的团队[3]。大量成功经验表明团队成员相互作用体现出的工作依赖关系与高产出有正相关关系[4]。但由于团队成员自身利益的驱动, 会出现追求利益最大化的个体理性与集体理性(Pareto 最优) 之间的矛盾。为解决这一矛盾 Alchian 和 Demsetz 最早发展了有效监督理论[5], Macleod(1988, 1993) 发展了通过对退队成员的成本约束促进团队成员合作的离散的重复博弈模型[6,7]。本文考虑的是团队成员间进行连续的动态博弈, 通过调整自己的努力水平去影响贡献水平而最大化自己的利益所得。通过建立一个有关努力水平、贡献水平以及在一定分配模式下团队成员间的微分博弈模型, 研究该微分博弈的 Nash 均衡以及促进合作和机制设置。

1 模型及有关概念

设团队成员的贡献水平为 x_i(如产值、技术创新产出率等), 努力水平为 u_i(如时间、资金的投资)。假设贡献水平的变化率是由贡献的衰减(如实物损耗、新技术的过时率等) 和努力水平共同决定。则有如下状态方程

$$\dot{x}_i(t) = -\mu x_i(t) + u_i(t),\ i = 1, 2, \cdots, n$$
$$x_i(o) = x_{i0} \tag{1}$$

这里 $\mu > 0$ 是贡献水平的衰减系数。本文只研究 $u_i = u_i(x_0, t)$ 即开环控制, 指团队成员不是据当前贡献水平调整战略, 而是在一定分配模式下采用时间依赖性战略控制。设采取战略 $u_i(t)$ 的成本为 $qu_i(t)$(如时间、资金、技术的投资成本)。调整战略的成本为 $C(u_i)$(如技术更新、再培训的费用), 假设 $C''(u_i)u_i \geqslant 0$, $C''(u_i) \geqslant 0$ 即调整成本随努力水平边际递增。这里不妨设 $C(u_i) = \frac{1}{2}cu_i^2$, $c > 0$。又设团队采取以下分配模式: 团队成员的收益不仅与自己的贡献成正比, 也与团队总贡献成正比。为简单起见, 我们设量纲处理后的收益函数为

$$R_i = x_i \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

则团队成员 i 的利润为:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Max} J_i(x_i, u_i) \\ &= \int_0^T e^{-\rho s}\left[x_i \sum_{i=1}^{n} x_i - qu_i(s) - \frac{c}{2}u_i^2(s)\right]\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $\rho > 0$ 为贴现率, $T < +\infty$。团队成员 i 通过(1) 调整 $u_i(t)$ 而使利润(2) 最大, 但每个成员也关心其他成员的行动, 因为其他成员会通过选择自己的战略影响他们的贡献水平而会影响该成员的利益。因此, 团队成员之间形成战略互动, (1) (2) 构成团队 n 个成员间的微分博弈, 最终可能达到均衡状态, 即 Nash 均衡。为便于应用, 先给出有关微分博弈的几个概念[8]。

对于微分博弈

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t, u_1(t), \cdots u_N(t))$$
$$x(0) = x_0 \in R^n \tag{3}$$

收稿日期: 2001- 03- 26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79770070)

作者简介: 叶红心(1970-) , 男(汉族) , 河南省平舆县人, 西安交通大学管理学院, 博士生, 研究方向: 合作博弈.

$$J_i = \int_0^T g_i(t, x(t), u_1(t), u_2(t), \cdots u_N(t))dt + Q_i(x(T))$$

它的解描述了 $n-$ 控制变量$\{u_i(t), t \geqslant 0\}$, $(i = 1, 2, \cdots N)$ 的博弈的状态变量。

定义 1 控制空间 $U_i = \{u_i(t)\}, t \in [0, T]$ 构成 i 的开环战略空间

定义 2 战略组合$(u_1^*, u_2^*, \cdots u_N^*) \in \prod_{i=1}^{n} U_i$ 是(3) 的 Nash 均衡, 如果

$$J_i(u_1^*, u_2^*, \cdots u_i^*, \cdots, u_N^*) \geqslant J_i(u_1^*, u_2^*, \cdots u_i, \cdots, u_N^*) \quad (4)$$

对于所有 $u_i \in U_i, i = 1, 2, \cdots, N$

如果$\{u_i^*\}, i = 1, 2, \cdots, N$ 是开环有限博弈(3) 的均衡, $x^*(t)$ 是相应状态轨线则有

$$\dot{x}^* = f(t, x^*(t), u_1^*(t), \cdots, u_N^*(t)), x(0) = x_0 \in R^n$$

$$u_i^*(t) = \arg\max H_i(t, p_i, x^*, u_1^*, \cdots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \cdots u_N^*) \quad u_i \in U_i$$

$$\dot{p}_i(t) = \frac{\partial}{\partial x} H_i(t, p_i, x^*, u_1^*, \cdots u_N^*)$$

$$P_i(T) = \frac{\partial}{\partial x} u_i(x^*(T)),$$

$$i = 1, 2, \cdots, N \qquad t \in [0, T]$$

这里, $H_i(t, p_i, x, u_1, \cdots, u_N) = g_i(t, x, u_1, \cdots u_N) + p^T f(t, x, u_1, \cdots, u_N)$

2 模型分析

由微分博弈 Nash 均衡的定义, 我们需找出在(1)作用下给定其他成员战略, 成员 i 最大化其利润(2)的条件,这实际是一个最优控制问题。通常解决最优控制的方法是 Pontryagin 最大值原理, 而该原理所产生的条件只有当目标函数是凸的时才对应于最优控制问题的最优解。因此该原理只能给我们提供备选最优解(Pontryagin 极值曲线), 即仅是最优控制的必要条件。

首先构造 Hamilton 函数

$$H_i(t, p_i, x_i, u_i) = e^{-\rho t}\left(x_i \sum_{i=1}^{n} x_i - q u_i - \frac{1}{2} c u_i^2\right) + p_i(u_i - \mu x_i) \quad (5)$$

这里 p 是协变量, 由 Pontryagin 最大值原理得

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H_i}{\partial x_i}(t, p_i^*(t), x_i^*(t), u^*(t)) \quad (6)$$

具有横截条件 $p^*(T) = 0$ 并且

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i}(t, p^*(t), x_i^*(t), u_i^*(t)) = 0$$

由此我们得到

$$u_i^*(t) = \frac{\lambda_i^*(t) - q}{c} \quad (7)$$

这里 $\lambda_i(t) = e^{\rho t} p_i(t)$, 条件(7) 意味着如果 $\lambda^*(t)$, 贡献水平的边际大于努力水平的价格 q, 团队成员 i 的努力水平是正的, 把(7) 代入(1) 和(6), Pontryagin 极值曲线变成下列自治微分方程组的解

$$\dot{x}_i(t) = -\mu x_i(t) + \frac{\lambda_i(t) - q}{c}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = (\rho + \mu)\lambda_i(t) - \left(x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad (8)$$

以及边界条件 $x_i(0) = x_{i0} \quad \lambda(T) = 0$

$\lambda(T) = 0$ 意味着在 T 处边际贡献为 0, 该动力系统有唯一平衡解

$$\bar{x}_i = \frac{q(\rho + \mu)}{3 - c\mu(\rho + \mu)}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{3q}{3 - c\mu(\rho + \mu)}, i = 1, 2, \cdots n$$

成员 i 的 Jacobi 系统为

$$\dot{x}_{iL}(t) = \mu x_{iL}(t) + \frac{\lambda_{iL}(t)}{c}$$

$$\dot{\lambda}_{iL}(t) = -2x_{iL}(t + (\rho + \mu)\lambda_{iL}(t) \quad (9)$$

线性系统(9) 的特征值为

$$r_1 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\mu^2 + 4\mu\rho - 8/c}}{2},$$

$$r_2 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\mu^2 + 4\mu\rho - 8/c}}{2}$$

由动力系统的奇点理论[9] 可以得到

命题 1: ①如果 $2 < c(\rho\mu + \mu^2)$ 那么 $r_1 > 0, r_2 < 0$, 即平衡点是鞍点

②如果 $c(\mu^2 + \mu\rho) < c(\rho + 2\mu)2/4$, 那么 $r_1 > 0, r_2 > 0$ 平衡点是不稳结点

③如果 $2 > c(\rho + 2\mu)2/4$, 那么 r_1, r_2 是具有正实部的复数, 平衡点是不稳结点

上述得到的条件仅是最优解(Nash 均衡) 存在的必要条件, 而 Nash 均衡要求给定其他成员战略, 该成员的最优问题得到的 u_i^* 是最应反应的战略。因此需要找出 Nash 均衡存在的充分必要条件, 这要解决局部最优问题, 而对于线性二次无约束最优问题(1)(2) 局部最优对应于全局最优。Zezza[10] 指出:Pontryagin 极值曲线是局部最优的充要条件是

与之相关的辅助最优问题以零作为其最大值,这需要检验两个条件(i) Legendre- Clebsh 条件[11]。即沿指定轨线Hamiltoin 对控制的二阶变分是负的,这里即 $c > 0$(模型假设)。(ii) T 没有共轭点存在。共轭点存在意味着系统(9)在 $p_{iL}(t) = e^{-\rho t}\lambda_{il}(t)$ 代换后的系统

$$\dot{x}_{iL}(t) = -\mu x_{iL}(t) + \frac{e^{\rho t}}{c}p_{iL}(t)$$

$$\dot{p}_{iL}(t) = \mu p_{iL}(t) - 2x_{iL}(t)e^{-\rho t}$$

(边界条件 $X_i(d) = 0. P(T) = 0, d \in [0, T)$ 是相应于 T 的轭点)存在非平凡解。而如果 r_1, r_2 是实的上述 Jacobi 系统的解具有形式

$$\begin{pmatrix} X_{iL}(t) \\ P_{iL}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{(r_2+\mu)e^{r_1t} - (r_1+\mu)e^{r_2t}}{r_1 - r_2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{r_1t} - e^{r_2t}}{C(r_1 - r_2)} \\ -4\dfrac{e^{-r_2t} - e^{-r_1t}}{r_1 - r_2} & \dfrac{(r_1+\mu)e^{-r_2t} - (r_2+\mu)e^{-r_1t}}{r_1 - r_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

T 的共轭点 d∈[0,T)存在对应方程

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{(r_2+\mu)e^{r_1d} - (r_1+\mu)e^{r_2d}}{r_1 - r_2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{e^{r_1d} - e^{r_2d}}{C(r_1 - r_2)} \\ -4\dfrac{e^{-r_2T} - e^{-r_1T}}{r_1 - r_2} & \dfrac{(r_1+\mu)e^{-r_2T} - (r_2+\mu)e^{-r_1T}}{r_1 - r_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

有非平凡解,因此我们可得到

命题 2　设 $c > 0$,如果 $2 < c(\rho + 2\mu)^2/4$,那么(7)中的 u_i^* 最优反应战略并且确定开环 Nash 均衡轨线。如果 $2 > c(\rho + 2\mu)^2/4$,那么当 $T < T^0$ 时 u_i^* 是最优反应战略,这里

$$T^0 = \frac{2\pi + 2\mathrm{arctg}\left(-\sqrt{8/c - (\rho + 2\mu)^2}/(\rho + 2\mu)\right)}{\sqrt{8/c - (\rho + 2\mu)^2}}$$

当 $T \geqslant T_0$ 时 u_i^* 不是最优反应战略

证明:给定 $c > 0$, Legendre- Clebsch 条件显然满足,须指出, T 的共轭点不存在足以保证备选最优反应战略是最优的,为检查 T 的共轭点 d 不存在,只需(10)有唯一解,如果 r_1, r_2 是实的($2 < c(\rho + 2\mu)^2/4$),该行列式为

$$D = \frac{(r_1+\mu)e^{r_2(d-T)} - (r_2+\mu)e^{r_1(d-T)}}{r_1 - r_2}$$

$D = 0$ 意味着

$$d = T + \frac{1}{r_2 - r_1}\ln\left(\frac{r_2+\mu}{r_1+\mu}\right) > T$$

即如果两个特征根是实的,不存在 $d \in [0, T)$ 共轭于 T。如果 r_1, r_2 是复的,由三角函数行列式可写成

$$D = \frac{\beta\cos(\beta(T-d)) + (\mu + \alpha)\sin(\beta(T-d))}{\beta}$$

这里 $\alpha = \rho/2$, $\beta = \sqrt{8/c - \rho^2 - 4\mu\rho - 4\mu^2}/2d$ 的不存在对应着存在某个 $d \in [0, T)$ 上式为 0,固定 T,对 $\beta(T-d) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, d 不存在。假设

$\beta(T-d) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$D = 0$ 意味着存在 $d \in [0, T)$ 使得

$$\mathrm{tg}(\beta(T-d)) = \frac{-\beta}{\alpha + \mu}$$

即 $T^0 = \dfrac{\pi + \mathrm{arctg}\left(\dfrac{-\beta}{\alpha+\mu}\right)}{\beta}$

因此仅当 $T \geqslant T^0$ 时存在 T 的共轭点,此时 u_i^* 不是最优反应战略;当 $T < T^0$ 时与 T 共轭的 d 不存在, u_i^* 是最优反应战略。　证毕

在 T^0 中,分母是 c、ρ、μ 的减函数,而分子是 c、ρ、μ 的增函数,因此若固定 ρ、μ、c 越小分母越大,分子也越小, T^0 也越小,这意味着调整成本相应 c 越小,就越早地出现 Nash 均衡,可类似讨论贴现 ρ 与衰减 μ 对均衡的存在及实现速度的影响。

另一方面,因为 $2/\mu(\rho + \mu) > 8/(\rho + 2\mu)^2$ 如果 $c > 2/\mu(\rho + \mu)$ 即 $2 < c(\rho\mu + \mu)^2$ 则有 $c > 8/(\rho + 2\mu)^2$ 即 $2 < c(\rho + 2\mu)^2/4$,因此命题 1, 2 我们可得

推论:如果团队动态博弈稳态解是鞍点,那么它们对应的战略组合构成 Nash 均衡。

这说明稳态解的鞍点特征是 Nash 均衡的存在的充分(但不必要)条件。命题 1, 2 给出了团队动态博弈 Nash 均衡存在的充分必要条件。在此条件下,我们可通过解线性常微分方程(8)以及(7)式。(线性常微方程一般解法见[12])求出 Nash 均衡 $u^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots u_n^*)$。

3　团队 Pareto 最优及机制设置

首先我们来求团队 Pareto 最优战略,即解最优控制问题

$$\dot{x}_i(t) = -\mu x_i(t) + \bar{u}_i(t)$$

$$\max \sum_{j=1}^{n} J_i = \int_0^T e^{-\rho s}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} q\bar{u}_i(s) - \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{n}\bar{u}_i^2(s)\Big]ds$$

类于3中,构造Hamilton函数

$$H_i(t, p_i, x_i, \bar{u}_i) = e^{-\rho s}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} q\bar{u}_i(t) - \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{u}_i^2(t) + p_i(\bar{u}_i - \mu x_i)$$

由Pontryagin最大值原理得

$$\dot{x}_i(t) = -\mu x_i(t) + \frac{\lambda_i - q}{c}$$

$$\dot{\lambda}(t) = (\rho + \mu)\lambda(t) - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

$$\bar{u}_i = \frac{\lambda_i^* - q}{c}$$

其中 $\lambda_i = e^{\rho t} p_i$, 在参数允许区域内解上述线性常微系统可得Pareto战略组合 $(\bar{u}_1^*, \bar{u}_2^*, \cdots \bar{u}_n^*)$ 如果设置机制 $m_i(t) = \bar{u}_i^* - u_i^*(t)$ 即 $\bar{u}_i^* = u_i^*(t) + m_i(t)$ 可通过机制 $\{m_i(t)\}$ 激励团队成员朝合作均衡方向去调整其努力水平。

4 结束语

本文通过建立描述团队生产动态的开环微分博弈模型,给出了团队成员在调整自己的努力水平(战略)过程中由于战略互动而形成Nash均衡的充分必要条件。调整成本和贴现影响Nash均衡存在以及实现的速度。同时我们也考虑了促进团队合作的机制设置问题。另外, $T = +\infty$ 可视作 $T \to +\infty$ 极限情形,关于闭环控制情形,将专文讨论。

参考文献:

[1] Thomas W. S' cott, P. Tiessen. Performance measurement and managerial teams[S]. Accounting, Organization and Society, 1999, 24: 263- 285.

[2] Timothy K., Dorothy L.. The global virtual manager: A prescription for success[J]. European Management, 2000, 18(2): 183- 194.

[3] Johanessen J- A., Olsen B., Olaisen J. Organization for innovation[J]. Long Range Planning, 1997, 30(1): 89- 109.

[4] VD. Gerben, Emans B., VE, Evert. Team members' effective response to pattern of intragroup interdependence and job complexity[J]. Journal of Management, 2000, 26(4): 633- 655.

[5] A. Alchian, H. Demsetz. Production, information costs and economic organization[J]. American Economic Review, 1972, 62: 777- 795.

[6] W. Macleod. Equity, efficiency and incentive in cooperative team[J]. in Advances in the Economic Analysis of Participatory and Labor Managed Firms, 1988, 3: 5- 23.

[7] W. Macleod. The role of exit costs in theory of cooperative team: A theoretical perspective[J]. Journal of Comparative Economics, 1993, 17: 521- 529.

[8] T. Basar, G. Olsder. Dynamic noncooperative game theory[M]. Sam Diego: Academic Press, 1989.

[9] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等.微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,1985, 51- 58.

[10] Zezza P.. The Jacobi condition in Optimal control. In S. Chen and J. Yong, eds. Control Theory, Stochastic Analysis and Applications[M]. Singapore: World Scientific, 1991, 137- 149.

[11] Pierre N., N. V. Tu. Introductory optimization dynamics optimal control controls with economics and management application[M]. Second, New York: Springer- verlage, 1991, 98.

[12] 金福临,李训经,等.常微分方程[M].上海:上海科学技术出版社,1984, 120- 121.

Dynamic Game about Team Production

YE Hong xin, ZHANG Peng zhu

(School of management, xi' an Jiaotong University, xi' an 710049, China)

Abstract: In this paper, We establish dynamic(differential) game model about team production. We use Pontryagin maximum principle(MP) and conjugate point theory to study the sufficient and necessary condition for the existence of Nash equilibrium of this game. We also dicuss mechanism- designing promoting cooperative game of team to coordinate individual and group rationality.

Key words: differential game; nash equilibrium; pontryagin MP; mechanism