

厚壁及叠层结构振动分析的一种半解析解

王治国 朱德懋

(南京航空航天大学振动工程所, 南京, 210016)

唐立民

(大连理工大学工程力学所, 大连, 116023)

SEMI-ANALYTICAL SOLUTION FOR THE FREE VIBRATION OF THICK-WALL AND LAMINATED ORTHOTROPIC STRUCTURES

Wang Zhiguo, Zhu Demao

(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 210016)

Tang Limin

(Dalian University of Technology, Dalian, 116023)

摘要 讨论了弹性力学的正则方程及其相应的变分原理, 和有限元法相结合构造了哈密顿单元, 给出一种半解析解, 最后给出两个关于厚壁及叠层结构的数值算例。

关键词 弹性动力学, 哈密顿单元, 厚壁-叠层结构

中图分类号 V214.35, O343.9

Abstract Canonical equations of elasticity and its corresponding variational principle are presented, a Hamilton element and a semi-analytical numerical method are developed, and finally two numerical examples are given, i.e. a deep beam and a laminated thick orthotropic plate.

Key words elastodynamics, hamilton element, thickwall-laminated structure

分析厚壁叠层结构问题的数值方法通常有数值法^[1, 2]和解析法^[3, 4]。数值法用的是二维近似理论, 理论本身有一定的缺欠, 如不能计及所有弹性常数等。解析法用的是三维弹性理论, 但只适用于简单情况。为了避两者之短而扬其之长, 从三维弹性理论出发, 在哈密顿体系中给出一种半解析解。文献[5]对结构进行了静态分析, 这里分析振动问题。

1 基本方程

首先以如图1所示弹性平面应力问题为例, 假设每层是各向同性的, 但各层的杨氏模量 E_i 、泊松比 μ_i 、质量密度 ρ_i 可以是不同的。下面推导第 i 层的有关公式, 为了简便略去下标 i 。从弹性力学的基本方程可以推导出

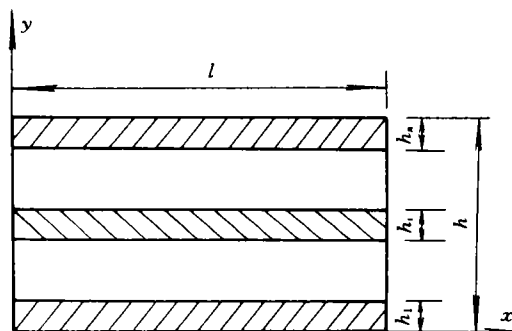


图1 弹性平面问题

1993年12月20日收到, 1994年3月12日收到修改稿

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \frac{\partial}{\partial x} & -\rho\omega^2 - E \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -\rho\omega^2 \\ \frac{2(1+\mu)}{E} & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1-\mu^2}{E} & -\mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1)$$

另外还有

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \sigma_y \quad (2)$$

方程(1)中 ω 是结构的固有频率。

方程(1)是一种弹性力学状态方程。如果将它与经典动力学中哈密顿正则方程相比较, 可以称之为弹性力学的正则方程。因为可以构造一个所谓的哈密顿函数密度

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}^2 + \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_y^2 + \rho\omega^2 u^2 + \rho\omega^2 v^2 - E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2\mu\sigma_y \frac{\partial u}{\partial x} - 2\tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (3)$$

把方程(1)表达成一种正则方程的形式

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial q} \quad (4)$$

其中

$$q = [u \quad v]^T, \quad p = [\tau_{xy} \quad \sigma_y]^T$$

在经典动力学中哈密顿正则方程可以由修正的哈密顿原理^[6]得到。这里与弹性力学的正则方程相对应的变分原理可以表达成如下形式

$$\delta \Pi = 0 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi = & \iint_{\Omega} \left(\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} - H \right) dx dy - \int_{S_\sigma} [\bar{p}_x u + \bar{p}_y v] dS \\ & - \int_{S_u} [p_x (u - \bar{u}) + p_y (v - \bar{v})] dS \end{aligned} \quad (6)$$

在应力边界 S_σ 上

$$\left. \begin{aligned} p_x &= n_x \left(E \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \sigma_y \right) + n_y \tau_{xy} = \bar{p}_x \\ p_y &= n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y = \bar{p}_y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在位移边界 S_u 上

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad (8)$$

2 半解析解及算例

基于变分原理式(5)进行部分离散化, 即仅在 x 坐标方向进行有限元离散。在哈密顿

体系中变量 u 、 v 、 τ_{xy} 、 σ_y 都是完全独立的, 可以采用相同的形函数进行插值, 称这样的单元为哈密顿单元。

经过推导可以得到弹性平面应力问题在哈密顿形式体系下的有限元公式

$$\begin{bmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dy} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} + \{F\} \quad (9)$$

其中列向量 P 、 Q 分别由节点变量 p_i 、 q_i 组成, 矩阵 C 、 K_{ij} 、 F 的具体表达形式从略。

$$C^T = C, \quad K_{11}^T = K_{11}, \quad K_{21}^T = K_{12}, \quad K_{22}^T = K_{22} \quad (10)$$

方程(9)的求解实际上是一个两点边值问题的求解, 它的解为

$$\begin{Bmatrix} P(Z) \\ Q(Z) \end{Bmatrix} = \exp[ZK] \begin{Bmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} + \int_0^Z \exp[(Z-S)K] G(S) dS \quad (11)$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & C \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \{F\}$$

式(11)给出了叠层结构中第 i 层解的表达式, 如果计及多层, 需要用传递矩阵法。

下面先讨论一个单层深梁的自由振动问题。边界条件为(图1)。

$$u = v = 0, \quad \text{当 } x = 0, l \text{ 时} \quad (12)$$

有关参数为 $E = 200.0 \text{ GPa}$ 、 $\mu = 0.30$ 、 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、 $h = 0.50 \text{ m}$, 全长划分为 8 个线性单元。

在 $y = 0, h$ 时边界上有且仅有一半力学量是已知的, 分别设为 B_1 、 T_1 ($y = 0, h$ 时已知)、 B_2 、 T_2 ($y = 0, h$ 时未知)。由于边界条件式(12)是齐次的, 根据式(11)有如下关系式

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

则有

$$M_{12} B_2 = T_1 - M_{11} B_1 \quad (14)$$

对于自由振动上式右端项必定为零值, 为了使 B_2 有非零解, 只有

$$|M_{12}| = 0 \quad (15)$$

由式(15)求得深梁的固有频率。计算结果如表1。表中本文理论的解都小于文献[1]理论(即厚壁结构理论)的解, 并且差值百分比随着厚跨比的增大而增大, 这正反映了厚壁因

表1 不同厚跨比梁的固有频率(Hz)

| 厚跨比(h/l) | 理论的解 ^[1] | 本文理论的解 | 差值百分比* / % |
|--------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| 0.05 | 512.097 | 506.946 | 1.01 |
| 0.10 | $1.892\ 70 \times 10^3$ | $1.774\ 52 \times 10^3$ | 6.24 |
| 0.15 | $3.912\ 91 \times 10^3$ | $3.430\ 22 \times 10^3$ | 12.34 |
| 0.20 | $6.309\ 00 \times 10^3$ | $5.236\ 63 \times 10^3$ | 17.00 |
| 0.25 | $8.884\ 83 \times 10^3$ | $7.183\ 54 \times 10^3$ | 19.15 |
| 0.30 | $11.559\ 0 \times 10^3$ | $8.802\ 18 \times 10^3$ | 23.85 |
| 0.35 | $14.252\ 6 \times 10^3$ | $10.032\ 1 \times 10^3$ | 29.61 |

* 差值百分比 = (文献[1]解 - 本文解) / 文献[1]解 $\times 100\%$

素的影响。计入厚壁因素，结构固有频率下降，主要是由于计入剪切变形、挤压变形使刚度降低；计入转动惯量增加广义质量造成的。厚壁结构理论是引入了一定假设，随着厚跨比的增大，逐渐暴露出理论本身的缺陷。本文用的是无任何假设的三维弹性理论。计算结果正反映了本文理论方法的正确性。

3 复合材料叠层厚板的计算

假设叠层板每层的本构关系是正交各向异性的

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

构造一个哈密顿函数密度

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \left[C_7 \tau_{xz}^2 + C_8 \tau_{yz}^2 + C_9 \sigma_z^2 + \rho \omega^2 (u^2 + v^2 + w^2) - C_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - C_6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & - 2C_3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - 2C_6 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - C_6 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + C_4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2\tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & \left. - 2\tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + 2C_1 \sigma_z \frac{\partial y}{\partial x} + 2C_5 \sigma_z \frac{\partial y}{\partial y} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

其中： $C_1 = -C_{13} / C_{33}$ ， $C_2 = C_{11} - C_{13}^2 / C_{33}$ ， $C_3 = C_{12} - C_{13}C_{23} / C_{33}$ ， $C_4 = C_{22} - C_{23}^2 / C_{33}$ ，
 $C_5 = -C_{23} / C_{33}$ ， $C_6 = C_{66}$ ， $C_7 = 1 / C_{55}$ ， $C_8 = 1 / C_{44}$ ， $C_9 = 1 / C_{33}$ 。

得到弹性空间问题的正则方程

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (18)$$

其中： $q = [u \ v \ w]^T$ ， $p = [\tau_{xz} \ \tau_{yz} \ \sigma_z]^T$ 。另外膜应力可以表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \frac{\partial}{\partial x} & C_3 \frac{\partial}{\partial y} & -C_1 \\ C_3 \frac{\partial}{\partial x} & C_4 \frac{\partial}{\partial y} & -C_5 \\ C_6 \frac{\partial}{\partial y} & C_6 \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (19)$$

和正则方程(18)对应的变分原理为

$$\delta \Pi = 0 \quad (20)$$

其中： $\Pi = \iiint_{\Omega} \left[\tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} - H \right] dx dy dz + \text{边界项}$ 。

基于变分原理式(20)进行数值计算，考虑图 2 所示三层板，四边简支，第一层和

第三层材料相同, 每层均有如下弹性常数:

$$C_{12}/C_{11}=0.23319, C_{13}/C_{11}=0.01077,$$

$$C_{22}/C_{11}=0.543103, C_{23}/C_{11}=0.098276,$$

$$C_{33}/C_{11}=0.530172, C_{44}/C_{11}=0.266810,$$

$$C_{55}/C_{11}=0.159914, C_{66}/C_{11}=0.26293.$$

几何参数 $a=b$, $a/h=10$, $h_1/h=0.1$,

$$h_2/h=0.8. \text{ 频率参数 } \Omega = \omega \sqrt{\rho_2 h^2 / C_{11}^{(2)}}.$$

采用部分离散化, 在 $x-y$ 平面内将板划分为 4×4 个矩形单元, 计算结果列于表 2,

同时与文献[3, 4]的解析解进行比较。

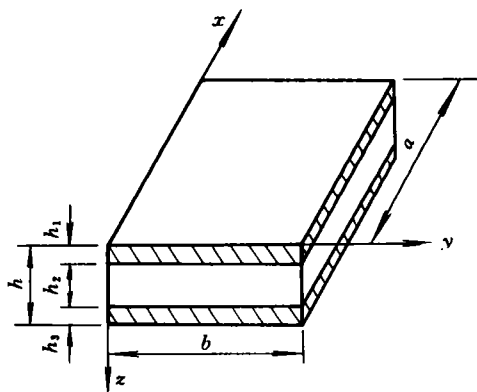


图2 三层板

表2 不同物理参数比三层板的频率参数 Ω

| ρ_1/ρ_2 | $C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)}$ | 本文解 | 文献[3]解 | 文献[4]解 |
|-----------------|-----------------------------|-----------|-----------|--------------|
| 1 | 1 | 0.047 036 | 0.047 419 | 0.047 511 3 |
| 1 | 2 | 0.056 482 | 0.057 041 | 0.057 052 21 |
| 1 | 5 | 0.076 951 | 0.077 148 | 0.077 143 91 |
| 1 | 10 | 0.097 859 | 0.098 104 | 0.098 104 15 |
| 1 | 15 | 0.111 752 | 0.112 034 | 0.112 032 28 |
| 3 | 15 | 0.094 291 | 0.094 548 | 0.094 527 |

4 结束语

在哈密顿体系中讨论了厚壁及叠层结构的力学问题, 结合有限元法, 给出一种半解析数值方法。

在讨论过程中关于位移和应力在厚度方向没有引入假设, 也没有对结构厚度、叠层结构层数、边界条件、板的几何形状等加以限制, 数值算例表明计算速度又高, 所以本文的方法克服了数值解及解析解的缺点, 而保留了两者的优点, 是求解厚壁及叠层结构问题的一种有效的方法。

参 考 文 献

- 曹志远, 杨 田. 厚板动力学理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1983
- 罗祖道, 王震鸣. 复合材料力学进展. 北京: 北京大学出版社, 1992
- Srinivas S, Rao A K. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. *Int J Solids Structures*, 1970;(6): 1463
- Fan Jiarang, Ye Jianqiao. An exact solution for the statics and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers. *Int J Solids Structures*, 1990;26(516): 655
- 唐立民等. 混合状态Hamiltonian元的半解析解和叠层板的计算. *计算结构力学及其应用*, 1992;9(4): 347
- 戈德斯坦 H. 经典力学. 第二版, 北京: 科学出版社, 1986