

二维可压湍流边界层改进的积分方法

鄂 秦 李 力 杨梦晖

(西北工业大学空气动力学研究室, 西安, 710072)

AN IMPROVED INTEGRAL METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL COMPRESSIBLE TURBULENT BOUNDARY-LAYER

E Qin, Li Li, Yang Menghui

(Aerodynamic Research Institute, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

摘 要 采用含高阶项的边界层动量积分方程, 同时对常规边界层卷吸方程及延迟方程进行相应的高阶影响修正, 得到改进的边界层积分方程组。应用此方程组对多种高亚音速及跨音速翼型边界层流动作了计算, 并与一阶 Green 方法计算结果及实验结果作了比较。结果表明, 在边界层积分方程中保留法向压力梯度项及雷诺法向应力项, 明显改进了翼面边界层接近分离区域处参数的计算精度。

关键词 湍流边界层, 积分方程, 压力梯度, 雷诺应力, 掺混

中图分类号 V211.19, O357.4

Abstract The boundary layer momentum integral equation including higher-order effects, those associated with normal pressure gradients, Reynolds normal pressure gradients and Reynolds normal stresses, is adopted, and the conventional entrainment equation and lag equation are corrected to contain those effects correspondingly. So the improved integral equations can be obtained and are used to calculate the boundary flows over aerofoils at high subsonic and transonic speeds. It is shown that the inclusion of high-order term leads to much better agreement with experiment of flow with separation obviously.

Key words turbulent boundary layer, integral equation, pressure gradient, Reynolds stress, entrainment

Lag-Entrainment 方法⁽¹⁾是 60 年代以来广为采用的计算二维可压湍流边界层的积分方程法。然而当翼面出现较严重的逆压梯度接近分离时, 该法也会过低估计边界层厚度的增长。这是由于动量积分关系式建立在经典边界层理论上, 方程中忽略了二阶法向应力项及位移表面曲率的作用; 并认为穿越边界层的静压为常值。为提高边界层在具有显著法向压力梯度时的计算精度, East⁽²⁾提出包含高阶影响项的动量积分方程。现利用该方程, 并对 Green 方法中的卷吸方程和延迟方程进行相应的高阶影响修正, 作具有二阶精度的二维可压湍流边界层计算。

1 边界层方程组

1.1 沿流向动量积分方程

East 提出的动量积分方程为⁽²⁾

$$(d\theta / ds) + (H + 2 - Ma_{iw}^2)(\theta / U_{iw})(dU_{iw} / ds) - (\bar{C}_f / 2) = -(2\rho_{iw} U_{iw}^2)^{-1}$$

1993 年 6 月 5 日收到, 1994 年 1 月 10 日收到修改稿

$$\times \left\{ d \left[\rho_{iw} U_{iw}^2 K^* (\theta + \delta^*)^2 \right] / ds + \left(\frac{2d}{ds} \right) \int_0^{\delta} \rho (u^2 - w^2) dz \right\} + \frac{Ma_{iw}^2}{U_{iw}^2} \theta w_{iw} \frac{dw_{iw}}{ds} \quad (1)$$

这里 $\bar{C}_f = 2\tau_w / \rho_{iw} U_{iw}^2$ 为等价表面摩擦系数; K^* 是位移表面曲率 ($= K + d^2\delta^* / ds^2$), 其中 K 是物面曲率; u 、 w 分别是流向 s 和法向 z 方向的脉动速度分量。下标 i 表示等价无粘流动 (EIF), w 为壁面值; $H = \delta^* / \theta$ 。

方程 (1) 与常规动量积分方程的区别是: ① 用 ρ_{iw} 、 U_{iw} 替代 ρ_e 、 U_e , Lock 和 Firmin^[3] 证明位移表面曲率较大时这种替代对计算结果有明显影响; ② 方程 (1) 右侧不为零, 其中第 1、2 项分别与法向压力梯度和雷诺法向应力有关。第 3 项为高阶小量, 可忽略。East 利用

$$\int_0^{\delta} \rho (u^2 - w^2) dz = 0.072 \rho_{iw} U_{iw}^2 \theta (C_\tau / (C_\tau)_{EQ}) (\bar{H} - 1) / \bar{H} \quad (2)$$

将方程 (1) 化为计算中采用的形式

$$d\theta / ds = (1+f)^{-1} \{ (C_f / 2) - [H + (2 - Ma_{iw}^2)(1+f)](\theta / U_{iw})(dU_{iw} / ds) - \theta(df / ds) \} \quad (3)$$

这里 $f = f_1 + f_2$, $f_1 = (k^* / 2)(\theta + \delta^*)^2 / \theta$, $f_2 = -0.072(C_\tau / (C_\tau)_{EQ})(\bar{H} - 1) / H$ 。

$$d\rho_{iw} / ds = -(\rho_{iw} Ma_{iw} / U_{iw})(dU_{iw} / ds) \quad (4)$$

1.2 卷吸方程

Lag-Entrainment 方法中, 流向动量积分方程与卷吸方程及描述卷吸系数历程效应的延迟方程联立求解。卷吸系数定义为

$$C_E = (\rho_e U_e)^{-1} dm / ds \quad (5)$$

m 是卷入边界层内的质量。Lock^[4] 指出, 该卷吸表达式可以推广到流线弯曲的情况, 即

$$d[\rho_{iw} U_{iw} (\bar{\delta} - \delta^*)] / ds = \rho_e U_e C_E \quad (6)$$

这里 $\bar{\delta} = (\rho_{iw} U_{iw})^{-1} \int_0^{\delta} \rho_i U_i dz$ 。质量流形参的常规表达式 $H_1 = (\delta - \delta^*) / \theta$ 由 $H_1 = (\bar{\delta} - \delta^*) / \theta$ 代替, 并令 $\bar{C}_E = \rho_e U_e C_E / \rho_{iw} U_{iw}$, 则 (6) 式可写为

$$d[\rho_{iw} U_{iw} H_1 \theta] / ds = \rho_{iw} U_{iw} \bar{C}_E \quad (7)$$

\bar{C}_E 称为等价卷吸系数。修正的卷吸方程 (7) 式由 EIF 壁面流动条件确定。通过整理, 卷吸方程可改写为对于 \bar{H} 的表达式

$$\theta(d\bar{H} / ds) = (d\bar{H} / dH_1) \{ \bar{C}_E - H_1(1+f)^{-1} [(C_f / 2) - (H + 1 + f)(\theta / U_{iw})(dU_{iw} / ds) - \theta(df / ds)] \} \quad (8)$$

式 (8) 是包含高阶影响的卷吸方程。

1.3 延迟方程

延迟方程表示卷吸系数沿流向的变化率与流动偏离平衡状态的关系。由式 (8) 可得到

平衡流中的卷吸系数

$$(\bar{C}_E)_{EQ} = H_1(1+f_{EQ})^{-1} \{ (\bar{C}_f/2) - (H+1+f_{EQ})[(\theta/U_{iw})(dU_{iw}/ds)]_{EQ} \} \quad (9)$$

这里 $f_{EQ} = -0.072(\bar{H}-1)/\bar{H}$ 。上式中 $[(\theta/U_{iw})(dU_{iw}/ds)]_{EQ}$ 项仍沿用 Green 方法中的表达式, 只是 C_f 由 \bar{C}_f 取代, 边界层外缘值 ρ_e 、 U_e 由 EIF 中壁面值 ρ_{iw} 、 U_{iw} 取代, 于是有

$$[(\theta/U_{iw})(dU_{iw}/ds)]_{EQ} = 1.25H^{-1} \{ (\bar{C}_f/2) - [(\bar{H}-1)/6.432\bar{H}]^2 \times (1+0.04Ma_{iw}^2)^{-1} \} \quad (10)$$

类似地, 若定义 $\bar{C}_\tau = (\tau/\rho)_{\max}/U_{iw}^2$, 那么 Green 方法中的 Lag 方程则改写为

$$\theta(d\bar{C}_E/ds) = F \{ 2.8(H+H_1)^{-1} [(\bar{C}_\tau)_{EQ}^{1/2} - (C_\tau)^{1/2}] + [(\theta/U_{iw})(dU_{iw}/ds)]_{EQ} - (\theta/U_{iw})(dU_{iw}/ds)[1+0.075Ma_{iw}^2(1+0.2Ma_{iw}^2)] \times (1+0.1Ma_{iw}^2)^{-1} \} \quad (11)$$

这里 $F = [0.02\bar{C}_E + \bar{C}_E^2 + 0.8(C_{f_0}/3)](0.01 + \bar{C}_E)^{-1}$, C_{f_0} 是零压力梯度平衡流中的表面摩擦系数。方程 (3)、方程 (8) 和方程 (11) 构成了计算的基本方程组。

1.4 边界层辅助关系式

定义质量流形参和转换形参

$$H_1 = \int_0^\delta (\rho U / \rho_{iw} U_{iw} \theta) dz, \quad \bar{H} = \int_0^\delta [(U_{iw} - U) / \rho_{iw} U_{iw} \theta] dz$$

参照文献[5], 它们之间有如下关系

$$H_1 = 2 + 1.5(\bar{H}-1)^{-1} + 0.5(\bar{H}-1), \quad 1.3 < \bar{H} < 4 \quad (12a)$$

$$H_1 = 4 + [(\bar{H}-4)/3], \quad 4 < \bar{H} < 12 \quad (12b)$$

考虑位移表面曲率对湍流结构的附加影响时, 以位移表面曲率 K^* 替代物面曲率 K 。通常翼型上表面接近后缘处位移表面曲率最大, 此处 $K^* \gg K$ 。现限定 $\bar{C}_f \geq -0.0002^{[5]}$, \bar{C}_f 由 Green 方法算出。

1.5 边界层计算的反解法

由形参关系式 (12a) 可知, $\bar{H} \approx 2.7$ 时 $dH_1/d\bar{H} = 0$ 。此时方程 (8) 出现奇性, 必须采用反解法。由 EIF 的等熵条件得到

$$dMa_{iw}/ds = Ma_{iw}(1+0.2Ma_{iw}^2)(U_{iw}^{-1}dU_{iw}/ds) \quad (13)$$

于是反解法求解的方程组为式(3)、式(11)和式(13)。

2 算例

翼型前段层流边界层参照 Pohlhausen 近似方法计算。正、反解法均采用 4 阶龙格-库塔法求解。在转捩点处, 湍流动量厚度应连续; 同时应保证湍流开始位置的 $R_\theta \geq 320^{[6]}$ 。

对 4 种翼型的不同来流 Ma 数和不同 Re 数共 8 种流动状态进行了计算。有粘/无粘

迭代计算时,无粘流计算应用全速势方程序。现给出3种翼型 C_f 的计算结果,并与Green方法结果及实验值作了比较。

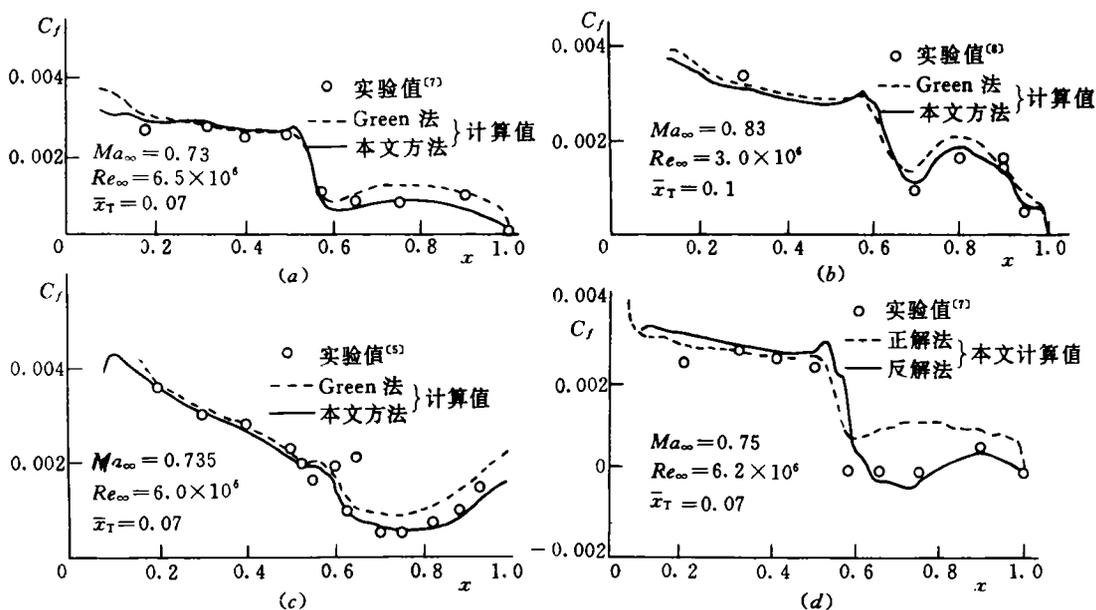


图1 表面摩擦系数 C_f 计算结果

- (a) RAE2882 翼型上表面 (b) Whitcomb 翼型上表面
(c) RAE5225 翼型下表面 (d) RAE2882 翼型上表面

参 考 文 献

- Green J E, Weeks D J, Brooman J W F. Prediction of turbulent boundary layers and wakes in compressible flow by a lag-entrainment method. ARC R&M 3791, 1973
- East L F. A representation of second-order boundary layer effects in the momentum integral equation and in viscous-inviscid interactions. RAE TR 81002, 1981
- Lock R C, Firmin M C P. Surveys of techniques for estimating viscous effects in external aerodynamics. In: Roe P L ed. Numerical methods in aeronautical fluid dynamics, London: Academic Press, 1982: 327-430
- Lock R C. Prediction of the drag of wings at subsonic speeds by viscous/inviscid interaction techniques AGARD-R-723, 1985: 10.1-10.70
- Ashill P R. Calculation and measurement of transonic flows over aerofoils with novel rear sections. ICAS-88-3.10.2, 1988: 1531-1541
- Preston J H. Minimum Reynolds number for a turbulent boundary layer and the selection of a transition device. Fluid Mechanics J, 1957;3(4): 373-384
- Cook P H, McDonald M A, Firmin M C P. Aerofoil RAE 2882—pressure distributions and boundary layer and wake measurements. AGARD AR 138. paper A6, 1979
- Francis X H, Frank W S. *et al.* Detailed transonic flow field measurement about a supercritical airfoil section. NASA TM X-3244, 1975