

实数域中的投影法及其在 单次快照阵处理中的应用

张 铭 朱兆达

(南京航空航天大学四系, 南京, 210016)

PROJECTION METHOD WITH APPLICATION TO ARRAY PROCESSING OF SINGLE SNAPSHOT IN REAL REGION

Zhang Ming, Zhu Zhaoda

(Fourth Department of Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing, 210016)

摘 要 阵列处理中计算简单的投影法避免了矩阵特征分解(EVD)的庞大计算量, 然而仍需进行复数计算。为了进一步减小计算量, 提出一种实数域中的投影法, 它将投影矩阵及空间谱的计算均简化为实数的计算, 从而使阵处理的计算量大大减少, 而且使估计性能保持不变。计算机模拟与实际外场实验数据的计算结果表明了算法的有效性。

关键词 阵列处理, 空间谱估计, 雷达信号处理

中图分类号 V243, TN957.52

Abstract Computationally simple projection methods are proposed to avoid a lot of computations of eigenvalue decomposition (EVD) in array processing. However, the complex computations are still needed in projection methods. To reduce computations further, a projection method in real region is presented. The computations of the proposed method are reduced greatly, because the real computations are used in the proposed method instead of the corresponding complex computations. Also the performance of the complex projection method is kept. Computer simulation and practical experiment results show the effectiveness of the proposed method.

Key words array processing, spatial spectrum estimation, radar signal processing.

阵处理的目的是利用传感器阵列的测量信息对信号的到达方向(DOA)进行估计。目前最引人注目的阵处理算法是基于矩阵特征分解(EVD)的一类算法^[1-5], 这类算法估计性能优良, 但是需要进行协方差矩阵 EVD 计算。为了避免 EVD 所带来的庞大计算量, 文献[6, 7]提出了一种计算简单的投影矩阵法, 文献[8]对此法进行了改进并使之适用于单次快照的情况。由于阵列所处理的是复数, 因此通常的阵处理的技术均需要进行复数计算。为了进一步减小投影法^[8]的计算量, 本文提出一种实数域中的投影法, 它将投影矩阵及空间谱化为实数计算, 从而使计算量明显减小。

1 问题的形成

本文讨论单次快照阵处理。考虑一个包含 N 个相同阵元的均匀线阵, 设有 M 个

1992年12月8日收到, 1993年10月29日收到修改稿

窄带信号源分别位于方向 $\theta_1, \dots, \theta_m$ 上, 则第 n 个阵元的测量值可表示为

$$y(n) = \sum_{m=1}^M a_m \exp[j2\pi(n-1)d\sin\theta_m / \lambda] + w(n) \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

其中, a_m 为第 m 个信号源的复振源; $w(n)$ 为第 n 个阵元的加性噪声; λ 为信号源的载波波长; d 为阵元间距。

为了估计空间谱, 需构造一个正交投影矩阵 P , 其零空间为信号子空间, 即

$$P = I - QQ^H \quad (2)$$

其中, I 为单位矩阵; $Q = [\mathbf{q}_1 : \dots : \mathbf{q}_M]$, $\mathbf{q}_i (i = 1, \dots, M)$ 为信号子空间中的一组正交单位矢量。

对空间谱估计而言, P 的构造是一个关键, 它影响估计质量与计算复杂性。在文献 [8] 中, 为了避免 EVD 的计算, 定义了如下矢量

$$\mathbf{h}_l = [h_{ll}, \dots, h_{ll}]^T, \quad l = l_1, \dots, l_m, \quad \text{当 } m \neq n, \quad l_m \neq l_n, \quad \text{且 } 1 \leq l \leq L \quad (3)$$

$$\text{其中, } h_{ll} = \sum_{n=L}^N [y(n-l+1)y^*(n-i+1) + y^*(n-L+l)y(n-L+i)] \quad (4)$$

L 为一个正整数且 $1 < L < N$; $*$ 表示复共轭。

对 \mathbf{h}_l 应用 Gram-Schmidt 正交化技术, 可得到 M 个单位正交矢量 $\mathbf{q}_i (i = 1, \dots, M)$, 由(2)式可得矩阵 P , 进一步可得空间谱估计为

$$G_c(\theta) = \frac{1}{(\mathbf{P}\mathbf{s})^H (\mathbf{P}\mathbf{s})} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{s} = [1, e^{j\omega(\theta)}, \dots, e^{j(L-1)\omega(\theta)}]^T$; $\omega(\theta) = 2\pi d \sin\theta / \lambda$; H 为共轭转置。从以上计算过程可见, 上述均为复数计算。

2 实数域中的投影法

本节讨论实数域中的投影法。先讨论 L 为偶数的情况, 定义实矢量 $\hat{\mathbf{h}}_l$ 为

$$\hat{\mathbf{h}}_l = [\hat{h}_{ll}, \dots, \hat{h}_{ll}]^T, \quad l = l_1, \dots, l_m, \quad \text{当 } m \neq n \text{ 时 } l_m \neq l_n, \quad 1 \leq l \leq N \quad (6)$$

其中,

$$\hat{\mathbf{h}}_{ll} = \begin{cases} \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N [y(n-l+1) + y(n-L+l)] [y^*(n-i+1) + y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \quad 1 \leq l, \quad i \leq L/2 \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N j [y(n-l+1) + y(n-L+l)] [y^*(n-L+i) - y^*(n-i+1)] \right\}, \\ \quad 1 \leq l \leq L/2, \quad L/2 \leq i \leq L \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N j [y(n-l+1) - y(n-L+l)] [y^*(n-i+1) + y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \quad L/2 \leq l \leq L, \quad 1 \leq i \leq L/2 \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N [y(n-l+1) - y(n-L+l)] [y^*(n-i+1) - y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \quad L/2 < l, \quad i \leq L \end{cases} \quad (7)$$

当无噪声时, 由式(1)、式(6)与式(7)可得

当 $1 \leq l \leq \frac{L}{2}$ 时:

$$\hat{\mathbf{h}}_l = [\mathbf{s}_1' \cdots \mathbf{s}_M'] \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{M1} & \cdots & b_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega(\theta_1)\lambda(l-1)} + e^{-j\omega(\theta_1)\lambda(L-l)} \\ \vdots \\ e^{-j\omega(\theta_M)\lambda(l-1)} + e^{-j\omega(\theta_M)\lambda(L-l)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{s}_m' = \frac{1}{2} [1 + e^{-j\omega(\theta_m)\lambda(L-1)}, \dots, e^{j\omega(\theta_m)\lambda(\frac{L}{2}-1)} + e^{j\omega(\theta_m)\lambda(\frac{L}{2})}]$,

$$j e^{j\omega(\theta_m)\lambda(\frac{L}{2}-1)} - j e^{j\omega(\theta_m)\lambda(\frac{L}{2})}, \dots, j - j e^{j\omega(\theta_m)\lambda(L-1)}]^T;$$

$$\omega(\theta_m) = 2\pi d \sin \theta_m / \lambda; \quad b_{kl} = (\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_l);$$

$$\mathbf{f}_k = [a_k e^{j\omega(\theta_k)\lambda(L-1)}, \dots, a_k e^{-j\omega(\theta_k)\lambda(N-1)}, a_k^*, \dots, a_k^* e^{-j\omega(\theta_k)\lambda(N-L)}]^T.$$

令:
$$\mathbf{g}_{ml} = \sum_{m=1}^M b_{ml} (e^{-j\omega(\theta_m)\lambda(l-1)} + e^{-j\omega(\theta_m)\lambda(L-l)}) \quad (9)$$

且
$$\hat{\mathbf{s}}_m = e^{-j\frac{L-1}{2}\omega(\theta_m)} \mathbf{s}_m' \quad (10)$$

即
$$\hat{\mathbf{s}}_m = \left[\cos\left(\frac{L-1}{2}\omega(\theta_m)\right), \dots, \cos\left(\frac{1}{2}\omega(\theta_m)\right), \sin\left(\frac{1}{2}\omega(\theta_m)\right), \dots, \sin\left(\frac{L-1}{2}\omega(\theta_m)\right) \right]^T$$

则(8)式可化为
$$\hat{\mathbf{h}}_l = \sum_{m=1}^M c_{ml} \hat{\mathbf{s}}_m \quad (11)$$

其中,
$$c_{ml} = g_{ml} e^{j\left(\frac{L-1}{2}\right)\omega(\theta_m)}.$$

因此 $\hat{\mathbf{h}}_l (l = 1, \dots, \frac{L}{2})$ 属于 $\hat{\mathbf{s}}_m$ 所在的空间, 由附录 A 可知矢量 $\hat{\mathbf{s}}_m (m = 1, \dots, M)$

线性无关, 并且易知 $\hat{\mathbf{s}}_m$ 和 θ_m 在 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 范围内一一对应。因此可用 $\hat{\mathbf{s}}_m$ 代替前面的方向矢量 \mathbf{s}_m 进行谱估计。此处称 $\hat{\mathbf{s}}_m (m = 1, \dots, M)$ 组成的空间为实信号子空间。

当 $\frac{L}{2} < l \leq L$ 时, 类似可得
$$\hat{\mathbf{h}}_l = \sum_{m=1}^M c_{ml}' \hat{\mathbf{s}}_m \quad (12)$$

其中,
$$c_{ml}' = g_{ml}' e^{j\omega(\theta_m)\lambda\frac{L-1}{2}}; \quad g_{ml}' = \sum_{k=1}^M b_{mk} (-j e^{-j\omega(\theta_k)\lambda(L-l)} + j e^{-j\omega(\theta_k)\lambda(l-1)}).$$

由附录 B 的讨论可知 $\hat{\mathbf{h}}_l (l = l_1, \dots, l_m)$ 张成实信号子空间。对 $\hat{\mathbf{h}}_l$ 应用正交变换技术, 可得 M 个实正交单位矢量 $\hat{\mathbf{q}}_i (i = 1, \dots, M)$ 。因此可求得零空间为实信号子空间的实正交投影矩阵 P_r ,
$$P_r = I - \hat{Q} \hat{Q}^H \quad (13)$$

其中, $\hat{Q} = [\hat{\mathbf{q}}_1 \cdots \hat{\mathbf{q}}_M]$ 。故空间谱估计为
$$G_r(\theta) = \frac{1}{(P_r \hat{\mathbf{s}})^T (P_r \hat{\mathbf{s}})} \quad (14)$$

其中,

$$\hat{\mathbf{s}} = \left[\cos\left(\frac{L-1}{2}\omega(\theta)\right), \dots, \cos\left(\frac{1}{2}\omega(\theta)\right), \sin\left(\frac{1}{2}\omega(\theta)\right), \dots, \sin\left(\frac{L-1}{2}\omega(\theta)\right) \right]^T.$$

对 L 为奇数的情况, 只需将式 (7) 略作修改, 其它步骤均如上. 此时 $\hat{\mathbf{h}}_l$ 为

$$\hat{\mathbf{h}}_l = \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N [y(n-l+1) + y(n-L+l)] [y^*(n-i+1) + y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad 1 \leq l, i \leq \frac{L-1}{2} \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N y(n-l+1) [y^*(n-i+1) + y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad 1 \leq i \leq \frac{L-1}{2}, l = \frac{L+1}{2} \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N [y(n-l+1) y^*(n-i+1)] \right\}, l = i = \frac{L+1}{2} \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N j [y(n-l+1) + y(n-L+l)] [y^*(n-L+i) - y^*(n-i+1)] \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad 1 \leq l \leq \frac{L-1}{2}, \frac{L+1}{2} < i \leq L \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N j [y(n-l+1) - y(n-L+l)] [y^*(n-i+1) + y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad \frac{L+1}{2} < l \leq L, 1 \leq i \leq \frac{L-1}{2} \\ \text{Re} \left\{ - \sum_{n=L}^N j y(n-L+l) [y^*(n+i+1) + y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad \frac{L+1}{2} < l \leq L, i = \frac{L+1}{2} \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N [y(n-l+1) - y(n-L+l)] [y^*(n-i+1) - y^*(n-L+i)] \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad \frac{L+1}{2} < l, i \leq L \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N [y(n-l+1) + y(n-L+l)] y^*(n-i+1) \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad 1 \leq l \leq \frac{L-1}{2}, i = \frac{L+1}{2} \\ \text{Re} \left\{ \sum_{n=L}^N j [y(n-l+1) - y(n-L+l)] y^*(n-i+1) \right\}, \\ \qquad \qquad \qquad \frac{L+1}{2} < l \leq L, i = \frac{L+1}{2} \end{array} \right. \quad (15)$$

从以上讨论可见, 实数域中的投影法的计算步骤与第二节中复数域中的投影法基本相同, 而且式(6) $\hat{\mathbf{h}}_l$ 计算量仅比式(3)的 \mathbf{h}_l 的计算量稍大一些, 并且在整个方法的计算量中,

计算 Gram-Schmidt 正交变换占了较大比重。众所周知,进行一次复数乘法运算相当于做四次实数乘法与二次实数加法,而且复数运算要求的存贮量也比实数运算大。因此实数域中投影法的计算量比复数域中的投影法的计算量减小很多。

3 计算机模拟

为了验证实数域中的投影法保持复数域中投影法的估计性能不变,进行了计算机模拟验证。(1)式作为模拟模型, $N=17$, $M=2$, $\theta_1=20^\circ$, $\theta_2=24.5^\circ$ ($\Delta\theta=\theta_2-\theta_1\approx 0.6$ 个波宽),信噪比 $\text{SNR}=20\text{dB}$,信号的复振幅选为 $a_1=1$, $a_2=e^{-j45^\circ}$ 。

图 1(a)和图 1(b)分别显示出当 $L=14$ (偶数)时,复投影法^[8]和本文实投影法的模拟结果。可以看出两种方法性能一致。

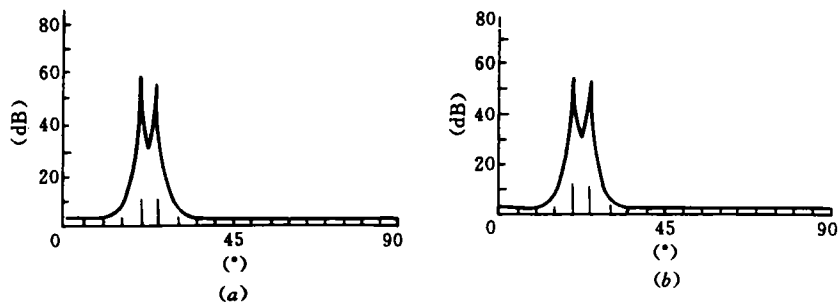


图1 $L=14$ 时模拟结果

(a) 复投影法($L=14$)

(b) 实投影法($L=14$)

图 2(a)和图 2(b)分别显示出复投影法与实投影法当 $L=13$ (奇数)时的结果。由图可见,两者性能也一致。

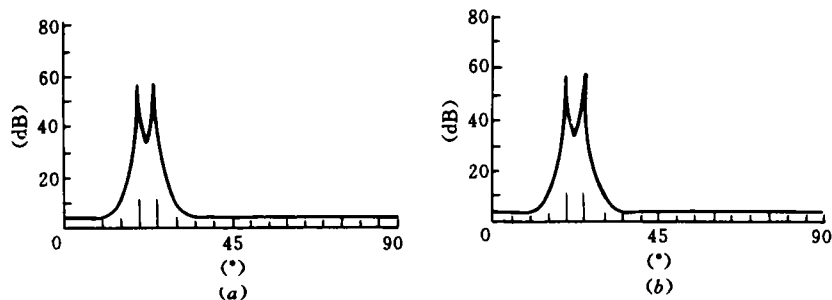


图2 $L=13$ 时模拟结果

(a) 复投影法($L=13$)

(b) 实投影法($L=13$)

另外对各种 SNR 和 L 不同的情况,做了大量的计算机模拟,得出同样结论。

4 外场实验数据结果

用实际外场实验数据来验证实投影法与复投影法的性能一致性。实验系统包括一个相干窄带脉冲发射机与两个喇叭天线的接收机。均匀线阵由两个喇叭阵元滑动合成,

$N=17$ 。发射机的中心频率的波长为 $\lambda=3.125\text{cm}$, 阵元间距 $d=3.04\text{cm}$, 两个角反射器作为目标; 均位于远场且其方位被精确测得为: 目标 1 位于 -1.084° ; 目标 2 位于 1.421° 。此两目标的角间距 $\Delta\theta\approx 0.68$ 个波宽。阵列自校正技术⁽⁹⁾ 被用来消除实验系统的通道不一致与阵元位置误差等。

图 4(a)和图 4(b)分别显示出当 $L=14$ 时两目标的复投影法与实投影法的结果。从图中可以看出两种方法的结果一致, 都能很好地分辨两目标。

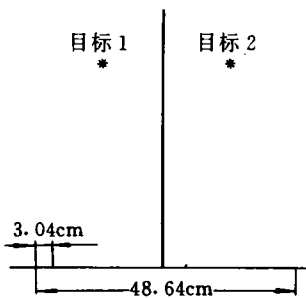


图 3 阵列和目标的几何位置

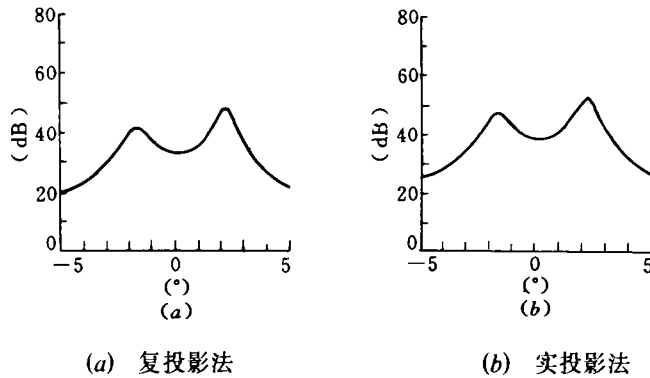


图 4 $L=14$ 时两目标结果

附录 A

本附录证明矢量 $\hat{s}_m (m = 1, \dots, M)$ 是线性独立的。

证: 令:
$$\hat{S} = [\hat{s}_1 : \dots : \hat{s}_m] \tag{A1}$$

由(10)式知:
$$\hat{S} = [s_1' : \dots : s_M'] D \tag{A2}$$

其中, $D = \text{diag}[e^{j(\frac{L-1}{2})\omega(\theta_1)}, \dots, e^{j(\frac{L-1}{2})\omega(\theta_M)}]$ 。

显然 $\text{rank}(D) = M$ 。由(8)式可得:
$$\hat{S} = \hat{E} S_1 D \tag{A3}$$

其中, $\hat{E} = [e_1 + je_L : \dots : e_{\frac{L}{2}} + je_{\frac{L}{2}+1} : e_{\frac{L}{2}} - je_{\frac{L}{2}+1} : \dots : e_1 - je_L]$;

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega(\theta_1)} & \dots & e^{j\omega(\theta_M)} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j(L-1)\omega(\theta_1)} & \dots & e^{j(L-1)\omega(\theta_M)} \end{bmatrix}; \quad e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T.$$

易知 \hat{E} 可逆, 又因 S_1 为 Vandermonde 矩阵, 故当 $L \geq M$ 时有 $\text{rank}(S_1) = M$, 因此得 $\text{rank}(\hat{S}) = \text{rank}(\hat{E} S_1 D) = M$, 从而可得 $\hat{s}_m (m = 1, \dots, M)$ 线性独立。

附录 B

本附录证明当 $L \geq M$, 且 $N - L + 1 \geq M$ 时, 矢量 $\hat{\mathbf{h}}_l (l = l_1, \dots, l_M)$ 线性独立:

证: 不失一般性令 $l = 1, \dots, M$. 设矩阵 H 为

$$H = [\hat{\mathbf{h}}_1 \cdots \hat{\mathbf{h}}_M] \quad (\text{B1})$$

由(8)式得:)
$$H = [s_1' \cdots s_M'] \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{M1} & \cdots & B_{MM} \end{bmatrix} E \quad (\text{B2})$$

其中,
$$E = \begin{cases} S[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_L \cdots \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_{L-M+1}], & l \leq M \leq \frac{L}{2} \\ S[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_L \cdots \mathbf{e}_{\frac{L}{2}} + \mathbf{e}_{\frac{L}{2}+1} \cdots -j(\mathbf{e}_{\frac{L}{2}} - \mathbf{e}_{\frac{L}{2}+1}) \cdots -j(\mathbf{e}_{L-M+1} - \mathbf{e}_M)], & \frac{L}{2} \leq M \leq L \end{cases} \quad (\text{B3})$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega(\theta_1)} & \cdots & e^{-j\omega(\theta_1)(L-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega(\theta_M)} & \cdots & e^{-j\omega(\theta_M)(L-1)} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{M1} & \cdots & b_{MM} \end{bmatrix}.$$

易知, 当 $l \leq M \leq \frac{L}{2}$ 时, $\text{rank}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{L-1} \cdots \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_{L-M+1}\} = M$; 当 $\frac{L}{2} \leq M \leq L$

时, $\text{rank}\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_{L-1} \cdots \mathbf{e}_{\frac{L}{2}} + \mathbf{e}_{\frac{L}{2}+1} \cdots -j(\mathbf{e}_{\frac{L}{2}} - \mathbf{e}_{\frac{L}{2}+1}) \cdots -j(\mathbf{e}_{L-M+1} - \mathbf{e}_M)\} = M$.

而 S^T 为 Vandermonde 矩阵, 因此 $\text{rank}(E) = M$. 由文献 [2] 可知, 当 $L \geq M$ 且 $N - L + 1 \geq M$ 时, 矩阵 B 可逆, 故 $\text{rank}(BE) = M$. 进一步有 $\text{rank}(H) = M$. 因而 $\hat{\mathbf{h}}_l (l = 1, \dots, M)$ 线性独立. 由上讨论知结论对 $l = l_1, \dots, l_M$ 也成立.

感谢电子科技大学杨万麟教授提供的外场数据.

参 考 文 献

- Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans. 1986; AP-34: 276-280
- Tufts D W, Kumaresan R. Estimation of multiple sinusoids: making linear prediction perform like maximum likelihood. Proc IEEE, 1982; 70: 975-989
- Shan T J, et al. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent sources. IEEE Trans. 1985; ASSP-33: 806-811
- Williams R T, et al. An improved spatial smoothing technique for bearing estimation in a multipath environment. IEEE Trans. 1988; ASSP-36: 425-432
- Cadzow J A. Signal enhancement—a composite property mapping algorithm. IEEE Trans. 1988; ASSP-36: 49-62
- Yeh C C. Projection approach to bearing estimations. IEEE Trans. 1986; ASSP-34: 1347-1349
- Yeh C C. Simple computation of projection matrix for bearing estimations. IEE Proc F. 1987; 134: 146-150
- Zhang M, et al. A new method constructing projection matrix for array processing in single snapshot. IEE Proc F. 1991; 138(5):
- Steinberg B D. Microwave imaging with large antenna arrays: radio camera principles and techniques. New York: Wiley. 1983