

二维可压无粘流的自适应 流量修正有限元解

蔡庆东 温功碧

(北京大学力学系, 北京, 100871)

FINITE ELEMENT FLUX-CORRECTED TRANSPORT(FEM-FCT) SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL EULER EQUATIONS ON AN ADAPTIVE TRIANGULAR MESH

Cai Qingdong, Wen Gongbi

(Department of Mechanics, Beijing University, Beijing, 100871)

摘要 从非定常 Euler 方程组出发, 采用非结构三角形网格, 研究二维无粘流动问题的自适应流量修正有限元解。将 FEM-FCT 与网格自适应相结合计算了 NACA 0012 翼型的三个算例。计算结果与实验及其他计算结果比较, 亚音速和超音速绕流符合很好; 跨音速绕流情况存在一些差别。

关键词 可压缩流, 无粘流, 欧拉运动方程, 有限元法

中图分类号 V211.3

Abstract The solution of compressible flow on unstructured triangular grids in two dimensions is considered. FEM-FCT for the Euler equations are combined with an adaptive mesh regeneration procedure and employed in solution of three examples. Comparisons with experiment data or other computational result show good agreement for the subsonic and supersonic flow around NACA0012 airfoil. However, the location of shock-wave has some difference for the transonic flow.

Key words compressible flow, inviscid flow, Euler equations of motion, finite element method

采用数值模拟可压缩流动时, 对任意二阶或二阶以上的格式, 在间断附近会产生波动。抑制波动的一般方法是加人工粘性。Lohner 采用 Taylor-Galerkin 有限元加人工粘性对可压缩流做了计算, 并结合网格自适应技术得到比较满意的结果^[1]。后来, 对该方法做了改进, 将差分方法中的 FCT 格式引入得到了高分辨率的有限元流量修正格式 FEM-FCT^[2]。

关于网格自适应方法目前有多种。自适应网格再生的方法或许是最适合于可压缩流的方法。该方法允许做任意次自适应, 而且同时实现稀疏、节点和单元数增加是可以接受的^[3]。

采用 FEM-FCT 格式, 结合网格自适应再生技术数值模拟了可压缩无粘流问题。对于 NACA0012 翼型的计算表明, 在亚音速和超音速情况, 压力分布和激波位置与实验或他人计算符合很好。跨音速情况与实验也大部分符合。激波处计算压力变化较陡, 位

1993年7月16日收到, 1994年1月21日收到修改稿

置略靠后, 这或许是因忽略粘性所致。

1 控制方程

采用守恒型 Euler 方程

$$(\partial U / \partial t) + (\partial E / \partial x) + (\partial F / \partial y) = 0 \quad (1)$$

其中

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T, \quad E = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(e + p)]^T$$

$$F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(e + p)]^T$$

状态方程为

$$p = (\gamma - 1)[e - \rho(u^2 + v^2) / 2] \quad (2)$$

其中 γ 为比热比, 取 $\gamma = 1.4$ 。

2 数值方法

(1) 式给出的守恒方程所描述的流动可能存在间断。任何高于一阶的格式在这些间断处会产生波动。对于弱非线性系统这是可以容忍的。对于比较强的非线性系统, 这些波动会引起数值不稳定, 必须设法消除。FCT 格式将高阶和低阶格式结合起来, 物理量变化平缓处使用高阶格式; 物理量变化剧烈处将二者结合, 在保证解无过分波动的前提下尽量使用高阶格式。

2.1 高阶格式

采用一致质量的 Taylor-Galerkin 格式的两步形式, 它属于 Lax-Wendroff 型格式。其步骤为

① 在 $t = t^n$ 处用 Taylor 展开, 求 $n + 1/2$ 步值

$$U^{n+1/2} = U^n + (\Delta t / 2)(\partial U / \partial t)|^n + O(\Delta t^2) \quad (3)$$

将(1)式代入, 得到

$$U^{n+1/2} = U^n - [(\partial E^n / \partial x) + (\partial F^n / \partial y)]\Delta t / 2 \quad (4)$$

② 由 $U^{n+1/2}$ 求 $n + 1$ 步值

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t(\partial U / \partial t)|^{n+1/2} \quad (5)$$

同样将(1)式代入, 得

$$\Delta U^n = U^{n+1} - U^n = -\Delta t[(\partial E^{n+1/2} / \partial x) + (\partial F^{n+1/2} / \partial y)] \quad (6)$$

对(4)式和(6)式在空间上采用 Galerkin 加权近似, 整步长处采用分片线性插值; 半步长处采用分片常数插值。从(4)式可显式求得半步长值。(6)式给出的是一方程组, 即

$$M_c \Delta U^n = R^n \quad (7)$$

此方程组的系数矩阵是弱对角占优的, 采用迭代法求解, 迭代公式为

$$M_L \Delta U^h = R + (M_L - M_c) \Delta U^h \quad (8)$$

这里 M_L 是一对角矩阵, 对角线元素为 M_C 同行所有元素之和。称 M_L 为集中质量矩阵, M_C 为一致质量矩阵。(8)式中的上标 h 表示高阶格式解。这种迭代法收敛很快, 一般只需迭代 3 次。

2.2 低阶格式

带耗散的集中质量 Taylor-Galerkin 法, 它属于 Lax 型格式。低阶格式在高阶格式上获得。具体计算(6)式的加权积分时, 左端采用如下公式

$$\int_{\Omega_e} f d\Omega = (f_1 + f_2 + f_3) A^{(e)} / 3 \quad (9)$$

这里 Ω_e 是三角形单元, $A^{(e)}$ 为它的面积。为保证格式单调, 右端加一质量耗散项 DIFF, 于是有

$$M_L \Delta U^l = R + C_d (M_C - M_L) U^n \quad (10)$$

该方程可显式求解。

2.3 流量修正格式(FCT)

FCT 格式首先在差分方法中引入。在差分方法中因为有结构性网格, 可方便地引入输运通量的概念⁽⁴⁾。通过在有限元中引入与之相应的单元贡献, 便可在有限元中实现 FCT 格式。

有限元法总是先在一个单元内得到单元方程, 然后合成总体的有限元方程。单元方程体现该单元对总体方程的贡献。总体方程为含有与结点个数同样多方程的代数方程组。方程组中某个方程具有如下形式

$$U^{n+1} = U^n + \sum_e EC \quad (11)$$

这里的 EC 为单元贡献。高阶格式和低阶格式分别有高阶单元贡献 HEC 和低阶单元贡献 LEC。这样就可定义反扩散单元贡献

$$AEC = HEC - LEC \quad (12)$$

在具体计算中, 因所有的高阶格式和低阶格式不相互独立, 所以并不是计算了 HEC 和 LEC 后再求 AEC。事实上, 用(8)式减去(10)式得

$$\Delta U^h - \Delta U^l = M_L (M_L - M_C) (C_d U^n + \Delta U^h) \quad (13)$$

又根据(11)式, 显然有

$$\Delta U^h - \Delta U^l = \sum_e AEC \quad (14)$$

比较(13)式与(14)式, 考虑每个单元的贡献, 得

$$AEC = M_L^{-1} (M_L - M_C)_e (C_d U^n + \Delta U^h)_e \quad (15)$$

应注意上式中 M_L^{-1} 是总体合成后的量。

有限元 FCT 格式中, “反扩散单元贡献”是个重要概念, 具有关键性作用。其计算过程为: ① 由(8)式得到高阶解 ΔU^h ; ② 由(15)式得到反扩散单元贡献 AEC; ③ 由(10)式得到低阶解 $U^l = U^n + \Delta U^l$; ④ 限制 AEC, 在单元上对 AEC 做修正

$$\text{AEC}^c = C_e \text{AEC} \quad 0 \leq C_e \leq 1 \quad (16)$$

C_e 的取法应使下一步计算的 U^{n+1} 处于 $[U^{\min}, U^{\max}]$ 之内, 该区间与 U^l 和 U^n 有关; ⑤ 利用 AEC^c 计算 $n+1$ 时间层的值

$$U^{n+1} = U^l + \sum_c \text{AEC}^c \quad (17)$$

在上述五步中, 显然以第④步限制过程最为重要。可分为以下几步实现: ① 计算所有正(负)AEC对 I 点的贡献

$$P_i^\pm = \sum_c \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} (0, \text{AEC}_c) \quad (18)$$

② 计算 I 点上最大(小)增量(亏损)

$$Q_i^\pm = U^{\max} - U_i^l \quad (19)$$

③ 计算 R^\pm

$$R^\pm = \begin{cases} \min(1, Q^\pm / P^\pm) & P^+ > 0, P^- < 0 \\ 0 & P^\pm = 0 \end{cases} \quad (20)$$

最后对每个单元求 C_e

$$C_e = \min_c \begin{cases} R^+ & \text{AEC} \geq 0 \\ R^- & \text{AEC} < 0 \end{cases} \quad (21)$$

直观上看, P_i^+ 使 I 点值增加; P_i^- 使 I 点值减小。以上限制法使 I 点的新值限制在 $[U_i^{\min}, U_i^{\max}]$ 内。单元内限制, 保证格式有守恒性。区间 $[U_i^{\min}, U_i^{\max}]$ 采用 I 点及其邻点上 U^l 的最大值和最小值。

3 边界条件与初始条件

计算中, 高阶解边界条件在迭代过程中引入, 低阶解是显式求解后做边界修正。最终, FCT 格式的解还要做一次边界修正。这里所采用的都是无反射边界条件。

翼型绕流问题的计算区域如图1所示。在远离翼型处取一矩形框 $ABCD$ 作为外部边界, 内部边界是翼型。在外部边界上, 根据特征线走向对以下四个特征变量(熵、切向速度和两个 Riemann 变量)提出边界条件

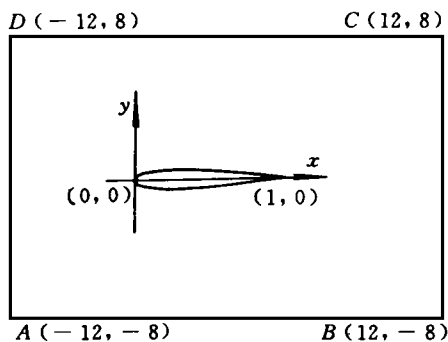


图1 计算区域

$$s = p / \rho\gamma, \quad v_\tau = u\tau_x + v\tau_y, \quad R_+ = v_n + [2c / (\gamma - 1)], \quad R_- = v_n - [2c / (\gamma - 1)] \quad (22)$$

其中 $\tau = (\tau_x, \tau_y)$ 为边界切向。根据特征线走向, 定边界上特征变量(给定或外推得到), 而

后再由(22)式反解出 ρ 、 u 、 v 和 p 。在翼型表面上仅提法向速度为零的条件。初始条件为给定的均匀流条件。

4 网格生成

采用推进前沿的网格生成法^[3]生成非结构三角形网格, 该方法适用于任意二维区域。为了方便引入三角形单元的长度尺度 δ , 伸缩因子 d 和伸缩方向 α 。这样生成的单元在 α 方向具有特征长度 $d\delta$, 在 α 的垂直方向上特征长度为 δ (图 2)。

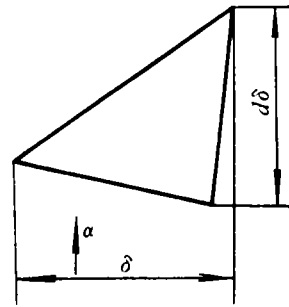


图 2 网格尺度

网格生成过程总体上分边界点生成和三角形单元生成两部分。区域的边界是若干个闭环, 其走向使沿边界方向行进时, 区域总在左侧。生成边界即在已知边界上按给定的尺度要求将边界点重新分布, 可增加或减少点数。

三角形单元生成采用推进前沿方法。开始时前沿即连接边界点的序列。在前沿选定某线段向内按一定尺度做三角形单元(图 3), 每生成一个单元即做前沿更替, 直到生成结束。图 3(a)和图 3(b)的实线部分分别为生成一个三角形单元前后的前沿形状。

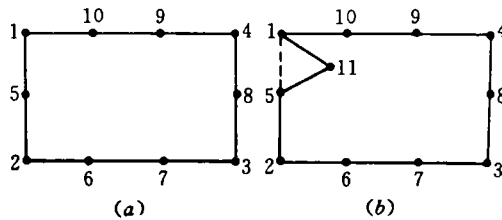


图 3 三角形单元的生成

生成自适应网格所用的参数由初步计算结果确定。网格疏密的原则是使插值误差均匀分布。经分析可知这相当于要求密度的二阶导数与网格尺度平方的乘积为常数。在二维流场中, 密度的二阶导数为二阶实对称矩阵, 它有两个实特征值 λ_1 和 λ_2 ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$), 相应特征向量为 ξ_1 和 ξ_2 。于是网格参数为

$$\alpha = \xi_1, \delta = [|\lambda_1|_{\max} / |\lambda_1|]^{1/2} \delta_{\min}, \quad d = |\lambda_1 / \lambda_2|^{1/2} \quad (23)$$

其中 $|\lambda_1|_{\max}$ 为当前网格上所有点上 $|\lambda_1|$ 的最大值, δ_{\min} 为给定的新网格上的最小尺度。

5 数值算例与结果分析

对 NACA 0012 翼型在不同 Mach 数和攻角下进行了计算, 并与实验^[5]和他人计算^[6]结果做了比较。所选算例为: ① $Ma_\infty = 0.5, \alpha = -0.02^\circ$; ② $Ma_\infty = 0.85, \alpha = 1.0^\circ$; ③ $Ma_\infty = 1.2, \alpha = 7.0^\circ$ 。图 4 给出压力系数分布。图 4(a)和图 4(c)与实验或他人计算结果符合很好。图 4(b)是跨音速情况, 计算的激波位置精度较差。估计是因网格过粗, 数值粘性过大造成的。在自适应过程中这一情况逐步好转。由于激波位置相差较大,

计算出的升力系数偏小。图5和图6是算例②和算例③的网格与等密度线。自适应后网格向激波附近集中，同时还实现了小梯度区的稀疏，单元数增加不多。

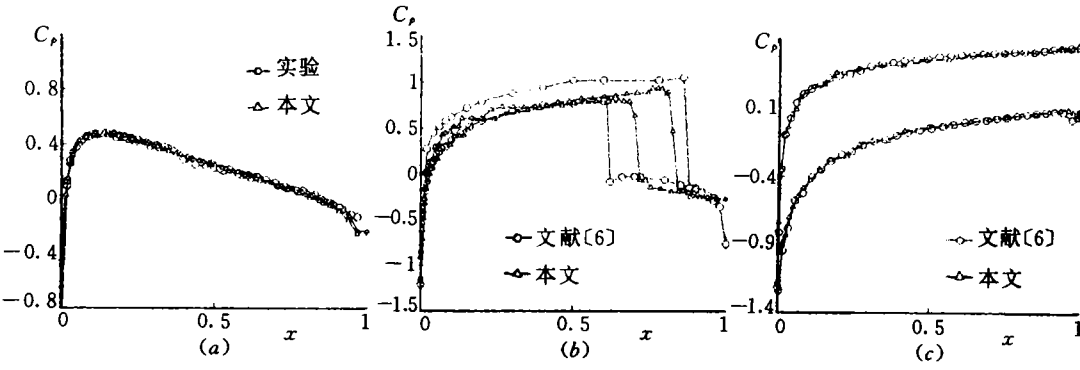


图4 压力系数分布

(a) $Ma_\infty=0.5, \alpha=-0.02^\circ$ (b) $Ma_\infty=0.85, \alpha=1.0^\circ$ (c) $Ma_\infty=1.2, \alpha=7.0^\circ$

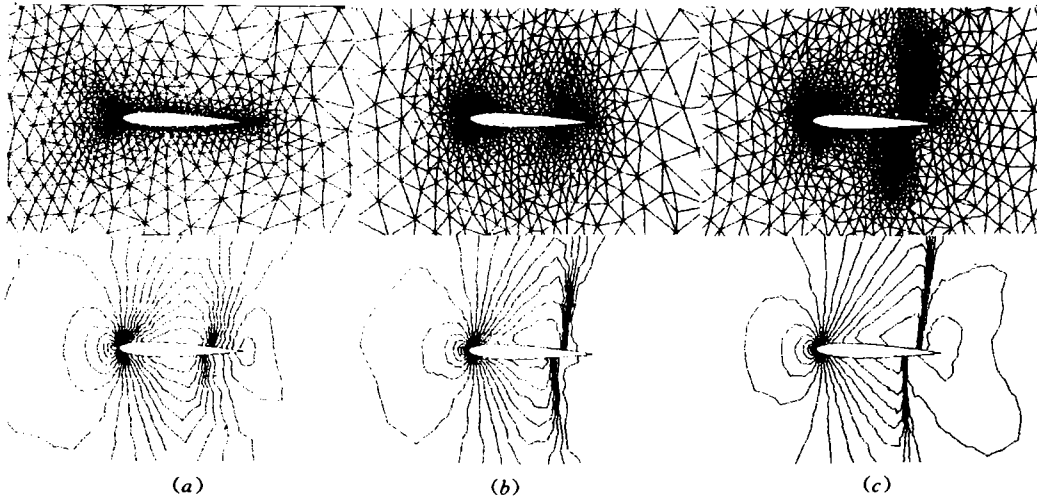


图5 $Ma_\infty=0.85, \alpha=1.0$ 时的网格和等密度线

(a) 初始网格 $N_E=1827, N_P=960$ (b) 第一次自适应 $N_E=2962, N_P=1553$
(c) 第二次自适应 $N_E=5611, N_P=2893$

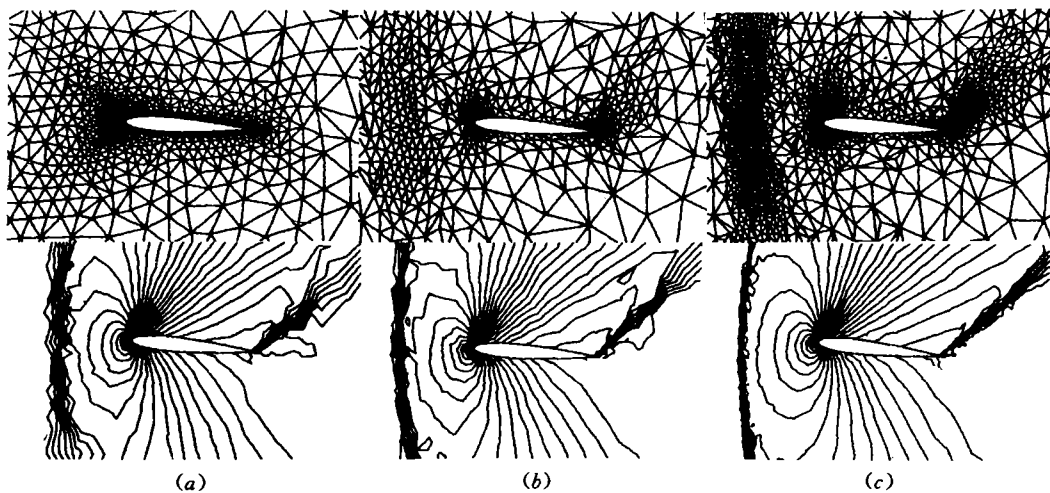


图 6 $Ma_{\infty} = 1.2$, $\alpha = 7.0^\circ$ 时的网格和等密度线

(a) 初始网格 $N_E = 1827$, $N_P = 960$ (b) 第一次自适应 $N_E = 1880$, $N_P = 986$

(c) 第二次自适应 $N_E = 4138$, $N_P = 2122$

参 考 文 献

- 1 Lohner R, *et al.* An adaptive finite element procedure for compressible high speed flow. *Comput Meths Appl Mech Engrg*, 1985; 51: 441—465
- 2 Lohner R, *et al.* Finite element flux—corrected transport(FEM—FCT) for the Euler and Navier—Stokes equation. *Int J Num Meths Fluids*, 1987; 7: 1093—1109
- 3 Peraire J, *et al.* Adaptive remeshing for compressible flow computations. *J of Comp Phys*, 1987; 72: 449—466
- 4 Zalesak S T. Fully multi dimensional flux—correct transport algorithm for fluids. *J of Comp Phys*, 1979; 31: 335—362
- 5 Thibert J J, *et al.* NACA 0012 airfoil, experiment data based for computer program assessment. AGARD AR138, 1979
- 6 Pulliam T H, *et al.* Euler computation of AGARD Working Group 07 Airfoil Cases. AIAA paper 85—0018, 1985