一类新的宏观经济系统模型①

刘树林　　戎卫东
（内蒙古工学院基础部　010062）　（内蒙古大学数学系　010021）

摘　要　本文在前人工作基础上，提出了一类新的宏观经济系统的数学模型，讨论了相应此模型的生产系统不失去平衡的一些充分条件和必要条件；给出了相应的最大最小原则和广义正特征矢量法，所有这些结果是华氏计划经济大范围最优化的数学理论的进一步发展和完善。

关键词　直接消耗系数阵　非负不可约的方阵　最大特征根　特征向量

1. 引　　言

华罗庚先生提出了一类宏观经济数学模型及解决此模型的方法（参见文献［1］），文［2］曾在取消直接消耗系数阵A是可逆的文［1］的这一假定后展开了讨论，特别针对文［1］提出的有消费（即拿出当年产出高于投入的增量的α（$0\leqslant\alpha\leqslant1$）倍作为最终消费）的经济模型推广报华老文［1］的基本定量和最大最小原则，文［3］把文［2］的某些结果做了进一步改进。本文将提出一类与前人完全不同的宏观经济数学模型，其核心是在生产增长的情况下，拿出产出高于投入的增量的α（$0\leqslant\alpha\leqslant1$）倍作为下一年的投入，而剩下作为当年的最终消费。围绕此模型展开若干理论及经济解释方面的探讨，所得的结果类似于文［1］～［3］的基本定量、最大最小原则和正特向量法，这些结果推广和发展了文［1］～［3］。

注：本文所用向量及消耗系数阵与文［3］所采用的一致，与文［1］、［2］所用的互为转置，因而在引用文［1］和［2］的结果时，都作了形式上的修改。

2. 基本模型与引理

设国民经济系统划分为n个产品部门，n阶非负实方阵A为系统的直接消耗系数阵。据［4］等效性定理，在下面给出的模型中，A可以是实物形态的，也可以是价值形态的。以下通篇使用下列记号：

$L=\{0,1,2,\cdots\}$，　$N=\{1,2,\cdots,N\}$，　$R=\{1,2,\cdots,r\}$

$y^{(0)}$表示系统的初始投入

$y^{(t)}$和$x^{(t+1)}$（$t\in L$）分别表示系统第t年的投入与产出．由文［1］之［I］知

① 本文1993年11月20日收到，属国家自然科学基金资助项目。

$$Ax^{(t+1)}=y^{(t)},(\forall t\in L) \quad 2.1$$

若$t\in L$使$x^{(t+1)}\geqslant y^{(t)}\geqslant o$(即生产是增长的)时，我们拿出产出高地投入的增量的$\alpha(0<\alpha\leqslant1)$倍作下一年(第$t+1$年)的投入$y^{(t+1)}$，余下的$x^{(t+1)}-y^{(t)}$作为当年($t$年)的最终消费，据此可得下面的模型：

模型 I　设$0<\alpha\leqslant1$，若$t\in L$使$x^{(t+1)}\geqslant y^{(t)}\geqslant0$，则，

$$y^{(t+1)}=\alpha(x^{(t+1)}-y^{(t)}) \quad (2.2)$$

此时第t年的最终消费为

$$x^{(t+1)}-y^{(t+1)}=(1-\alpha)x^{(t+1)}+\alpha y^{(t)}\geqslant0 \quad (2.3)$$

下述本文所需的基本引理：

引理 2.1[5](Perron－Frobenius 定理)若 A 是非负不可约方阵，则

(i)存在正特征根(称为 A 的最大特征根)λ使得对 A 的所有特征根λ_i，都有$|\lambda_i|\leqslant\lambda(i\in N)$。

(ii)对应于λ的右、左特征向量(称为 A 的最大特征向量)u、v 是正向量，即$v>0,u>0$，且若不计正常数因子，u 和 v 是唯一的。

(iii)λ是 A 的特征方程的单根。

引理 2.2　设 A，λ同引理 2.1，且$\lambda<1$，则

(i)$I-A$可逆。(ii)若$Ax=y$，则$x\neq y$。

证明　由引理 2.1 易证，故略。

引理 2.3　设$\lambda_i(i\in N)$是 A 的全部特征根，U_i和$V_i(i\in N)$分别是相应λ_i的右和左特征向量，$\alpha>0$，$I-A$可逆，此时总记$B=[\alpha(I-A))]^{-1}A$，则下列条件等价

(i)　$AU_i=\lambda_iU_i,i\in N$

(ii) $BU_i=\dfrac{\lambda_i}{\alpha(1-\lambda_i)}U_i,i\in N$。

对于左特征向量V_i，有完全类似的等价性。

证明　由于证明过程简单，故略。

推论　在引理 2.3 的条件下，方阵 A 与 B 的全部特征根λ_i和$\mu_i(i\in N)$可建立一一对应：

$$\lambda_i\to\mu_i=\frac{\lambda_i}{\alpha(1-\lambda_i)},i\in N$$

引理 2.4　设 A、λ、U 和 V 同引理 2.1，$\alpha>0$，$\lambda<1$，则

(i)　$\mu=\dfrac{\lambda}{\alpha(1-\lambda)}$(此时总记$\mu=\dfrac{\lambda}{\alpha(1-\lambda)}$是方阵 B 的实特征根当中最大的单的特征

根)。

(ii) $BU=\mu U$, $V^T B=\mu V^T$

证明 由引理 2.1～3.1 理 2.3 易证,故略。

引理 2.5 设 A,入同引知 2.2,若$\forall\ \iota\in L$,有(2.1)和(2.2)式成立,则$\forall\ \iota\in L$,有 $B^{\iota}y^{(\iota)}=y^{(0)}$。

证明:注意到 $\alpha>0$,由(2.2)式可解屈 $x^{(\iota+1)}$,再将其代入(2.1)式,由 B 的定义(见引理 2.3)可得 $B^{\iota}y^{(\iota)}=y^{(\iota)}(\forall\ \iota\in L)$,据此递推得到 $B^{\iota}y^{(\iota)}=y^{(0)}(\forall\ \iota\in L)$。

3. 基本定理

本节将结合类似于文[1]～[3]的基本定理及其经济解释,这一节是本文的中心内容。

定理 3.1 设 A 是非负不可约方阵,λ 和 u 分别是 A 的最大特征根和最大右特征向量,$\lambda<1$。对于模型 I,若 $y^{(0)}>0$,但 $y^{(0)}\neq u$,则存在正整数 ι_0 使 $x^{(\iota_0+1)}-y^{(\iota_0)}$有负分量。

证明 由引理 2.4、引理 2.2(ii)、引理 2.5 及引理 2.3,利用矩阵 B 的若当标准型,类似于文[3]定理 2.1(推广的基本定理)的证明过程可获证,由于证明过程太长,此处略去。

下面先明确一个概念,然后据此给出定理 3.1 的经济解释。若有下式:

$$x^{(\iota+1)}\geqslant y^{(\iota)}\geqslant 0 \qquad (\forall\ \iota\in L) \tag{3.1}$$

成立,则称相应模型 I 的生产系统 I 不失去平衡,否则称生产系统 I 是失去平衡的。

定理 3.1 的经济解释:若初始投入向量 $y^{(0)}$不按 A 的右最大特征向量 U 来安排,则生产系统 I 必须失去平衡,换言之,要想生产系统 I 不失去平衡,初始投入量 $y^{(0)}$必须按 A 的右最大特征向量来安排,即有下面的推论:

推论 3.2 对于模型 I 来说,若 $x^{(\iota+1)}\geqslant y^{(\iota)}(\forall\ \iota\in L)$,则必有 $y^{(0)}=u$。

4. 再论生产系统 I 不失去平衡的条件

本节在第三节定理 3.1 和推论 3.2 的基础上,进一步讨论生产系统 I 不失去平衡的条件。

定理 4.1 设 A、λ、u 和 α 同定理 3.1,又 $y^{(0)}>0$,则 $y^{(0)}=u$ 是(3.1)式成立的必要条件,但不是充分条件。

证明 由推论 3.2 可知 $y^{(0)}=u$ 是(3.1)式成立的必要条件。下面举例说明 $y^{(0)}=u$ 不

是(3.1)式成立的充分条件。取 $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，则 A 是非负不可约的，因 $\lambda=\frac{1}{2}$，$u=(1,1)^T$，取 $y^{(0)}=u$，$x^{(1)}=(\frac{1}{3},\frac{11}{3})^T$，则有 $Ax^{(1)}=y^{(0)}$，但 $x^{(1)}-y^{(0)}=(-\frac{2}{3},\frac{8}{3})^T\ngeq 0$，证毕。

定理 4.2　设 A、λ、u 和 α 同定理 3.1，又 $y^{(0)}=u$，考虑模型 I，则 A 可逆是(3.1)式成立的充分条件，但不是必要条件；特别当 A 可逆时有

考虑 $t=0$。由(2.1)和(4.2)式有 $x^{(1)}=A^{-1}y^{(0)}=\lambda^{-1}y^{(0)}>y^{(0)}$，又显然 $y^{(0)}=\mu^0 y^{(0)}$，再据模型 I 可知

$$y^{(k+1)}=\alpha(x^{(k+1)}-y^{(k)})=\mu^{-k-1}y^{(0)}$$

据此再由(2.1)和(4.2)式有

$$x^{(k+2)}=A^{-1}y^{(k+1)}=\mu^{-k-1}A^{-1}y^{(0)}=\mu^{-k-1}\lambda^{-}y^{(0)}>y^{(k+1)}$$

即(3.1)和(4.1)式对 $t=k+1$ 也成立。因此 A 可逆是(3.1)式成立的充分条件，且 A 可逆时有(4.1)式成立。

下面举例说明 A 可逆不是(3.1)式成立的必要条件：取 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\lambda=\frac{1}{3}$，$u=(1,1)^T$，而 $y^{(0)}=u$；令 $x^{(t+1)}=3(\frac{3}{2})^t y^{(0)}$，$y^{(t)}=(\frac{3}{2})^t y^{(0)}$，则(2.1)、(2.2)和(3.1)式对任意的 $t\in L$ 都成立，但 A 不可逆，证毕。

推论 4.3　设 A、λ、u 和 α 同定理 4.2，且 A 可逆，$y^{(0)}=u$ 是(3.1)式成立的充要条件。

证明　由定理 4.2 和推论 3.2 显然。

推论 4.4　设定理 4.2 的条件成立，则可逆是(4.1)式成立的充分条件，但不是必要条件。

5. 最大最小原则

这一节将给出相应于模型 I 的类似于文[1]和[2]的最大最小原则，其作用与文[2]所谈的相同。由于它的证明过程完全类似于[2]的最大最小原则的证明过程，故略去证明。

定理 5.1　设 A、λ 和 u 同定理 3.1，又 $y^{(0)}>0$，考虑模型 I，则有

$$\max_{y^{(t)}>0}\min_{1\leq i\leq n}\frac{x_i^{(t+1)}}{y_i^{(t)}}=\frac{1}{\lambda}$$

且上述最大值当且仅当 $x^{(t+1)}=\beta^{(t)}u$，$y^{(t)}=\lambda\beta^{(t)}u$ 时取得，其中 $\beta^{(t)}$ 是与 t 有关的常数。

6. 正特征向量法

本节在前面的基础上，在 A 可逆和不可逆的条件下，分别给出相应模型 I 的类似于

文[1]和文[3]的正特征向量法。

6.1 A可逆时的正特征向量法

以下分三段来叙述：

(1)由定理4.1可知：为使生产系统I不失去平衡，即(3.1)式成立，生产的最初投入向量$y^{(0)}$只能按A的右最大特征向量u来安排，并且仅仅安排生产是不能保证(3.1)式成立的。(注意由引理2.4知u还是B的相应于实特征根当中的最大正特征根$\mu=\frac{\lambda}{\alpha(1-\lambda)}$的特征向量，这一点体现了华老文[1]提出的正特征向量法的思想)。

(2)若进一步要求A可逆，则由定理4.2可知

当$y^{(0)}=u$时必有(3.1)式成立，即生产系统I不失去平衡，且有(4.1)式成立，进而有

$$x^{(\iota+1)}=\lambda^{-1}y^{\iota} \tag{6.1}$$

$$y^{(\iota)}=\mu y^{(\iota-1)}=\mu^{-\iota}u \tag{6.2}$$

$$x^{(\iota+1)}=\mu^{-1}x^{\iota}=\mu^{-\iota}\lambda^{-1}u \tag{6.3}$$

$$x^{(\iota+1)}-y^{(\iota)}=\mu^{-1}(x^{(\iota)}-y^{(\iota-1)})=\mu^{-\iota}(\lambda^{-1}-1)u \tag{6.4}$$

$$x^{(\iota+1)}-y^{(\iota+1)}=\mu^{-1}(x^{(\iota)}-y^{(\iota)})=\mu^{-1}(1-\alpha+\alpha\lambda)\lambda^{-1}u \tag{6.5}$$

其中(6.1)、(6.2)和(6.5)三式中的$\iota\in L$，其余两式中的$\iota\in L$、{0}。

上面五式的经济含义分别是：表示了投入与产出、相邻两年的投入、相邻两年的产出、相邻两年的净 产出及消费之间互为倍数关系，且它们都是初始投入$y^{(0)}=u$的倍数。

(3)若再要求$\frac{\lambda}{1-\lambda}\leqslant\alpha<\min(1,则\frac{1}{1-\lambda})$，$\mu^{-1}\geqslant1$，且$1-\alpha+\alpha\lambda>0$，因而生产系统I是平衡地向前发展的。

6.2 A不可逆时的正特征向量法

定理6.1 设A、λ和u同定理3.1，$y^{(0)}=u$。当$y^{(\iota)}(\iota\in L)$是u的正数倍时，要求$x^{(\iota+1)}(\iota\in L)$也是u的正数倍，则有(3.1)和(4.1)式成立，进而有(6.1)～(6.5)式成立；若进一步需求$\frac{\lambda}{1-\lambda}\leqslant\alpha<\min(1,\frac{1}{1-\lambda})$，则生产系统I是平衡向前发展的。

证明 首先据A、λ和u的含义有下述易证的结论(这是证明过程的关键依据)：

若$Ax=y,x=au,y=bu$，则$a\lambda=b$ (6.6)

(这里a和b是两个任意常数)，据此也可用归纳法证明本定理的结论成立：

由于$y^{(0)}=u$，据题意可设$x^{(1)}=a^{(1)}u,a^{(1)}>0$，由(2.1)式有$Ax^{(1)}=y^{(0)}$，再由(6.6)式有$a^{(1)}\lambda=1$，再注意到$\lambda<1$可得

$$x^{(1)}=\lambda^{-1}y^{(0)}>y^{(0)},y^{(0)}=\mu^{-0}y^{(0)}$$

由此可知$\iota=0$时，(3.1)和(4.1)式都成立。

设$\iota\leqslant k$时，(3.1)和(4.1)式都成立，因而有

$$x^{(k+1)}=\lambda^{-1}\mu^{-k}y^{(0)}\geqslant y^{k},y^{(k)}=\mu^{-k}y^{(0)} \tag{6.7}$$

据(6.7)式中的第一式及模型I有

$$y^{(k+1)}=\alpha(x^{(k+1)}-y^{(k)})$$

再由(6.7)式中的等式，并注意$\mu^{(-1)}=\alpha(\lambda^{-1}-1)$有$y^{(k+1)}=\mu^{-(k+1)}y^{(0)}$，由题意可设$x^{(k+2)}=$

$a^{(k+2)}u, a^{(k+2)}>0$，再由结论(6.6)有 $a^{(k+2)}=\lambda^{(-1)}\mu^{-(k+1)}$，注意到 $\lambda^{(-1)}>1$ 可得

$$x^{(k+2)}=\lambda^{-1}\mu^{-(k+1)}y^{(0)}>y^{(k+1)}, y^{(k+1)}=\mu^{-(k+1)}y^{(0)}$$

因此当 $t=k+1$ 时，(3.1)和(4.1)式成立。

综上述，(3.1)和(4.1)式成立，由此及 6.1 节的讨论知其余的结论自然成立，证毕。

注　由于对直接消耗阵 A 的要求大大减弱，因而上述的正特征向量法具有普遍的应用范围。

参 考 文 献

[1] 华罗庚，计划经济大范围最优化的数学理论，科学通报，1984，12：705～709，13：769～772，1985，1：1～2，9：1～4。

[2] 黄钧，华氏经济数学基本定理的几点注记，优选与管理科学，1987，3：27～32

[3] 刘树林，戎卫东，华氏宏观经济模型数学理论再探，中国管理科学，1993，1

[4] 戎卫东等，宏观经济与分析的新工具—正特征矢量法，中国管理科学，1(1993)，42～47。

[5] Minc H. ,Nonnegative Matrices, New York: John Wiley & Sons, 1988, 11～19.