多目标线性规划的一种新的几何解法[①]

马　琛

(北京经济学院信息系　北京　100026)

摘　要　作者在[1]中，提出了一种线性规划的新解法，在[2]中又提出了一种关于求解线性不等式组 Ax≤b 的构造性新解法。在本文中将[1]、[2]中的方法用于多目标线性规划，得到一种求解多目标线性规划的新的几何解法。同时得到了在多目标线性规划中推广了的 Kuhn－Tucher 原理。得到主要定理如下：对于多目标线性规划：

$$MaxZ=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \vdots & \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$(a\ x) \leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m+n^{②}$$

若有下述关系式成立：

$$\lambda_1 c_{i_1}+\lambda_2 c_{i_2}+\cdots+\lambda_k c_{i_k}=\mu_1 a_{j_1}+\mu_2 a_{j_2}+\cdots+\mu_l a_{j_1}$$

这里 $\lambda_j>0, j=1,2,\cdots,k,\qquad \mu_j>0, i=1,2,\cdots,l$

$2\leqslant k+l\leqslant n+1,\qquad (i_1,i_2,\cdots,j_k)\subset(1,2,\cdots,l)$

$(j_1,j_2,\cdots,j_l)\subset(1,2,\cdots,m+n)$。

今 $D=\{x\,|\,(a_{i_1}\ x)\leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m+n\}$

若 $D\neq\Phi$ 则集合 $B_{j_1j_2\cdots j_l}\subset R^*_{pa}$

这里 $B_{j_1j_2\cdots j_l}=\pi_{j_1}\cap\pi_{j_2}\cap\cdots\cap\pi_{j_l}\cap D$

$\pi_i=\{x\,|\,(a_{i_1}\ x)=b_i\}$

本文的目的在于制造一套新的求解 R^*_{PR} 的算法，无须用任何繁复的单纯形表格。只须从一个单目标线性规划的最优解出发，即可逐次求出所有有效极点，然后再求其整个有效解集，本文应用了文献[4][5]中的大量例题，以便于参照对比。

关键词　多目标　线性规划　几何

① 本文 1993 年 9 月 22 日收到

② 这里非定性条件 $x_i\geqslant 0$ 看作约束 $-x_i\leqslant 0$

§1　符号及其某些说明

对于摘要中的多目标线性规划第 j 个目标函数在可行域 D 上求最优解,即构成了一个(单目标)线性规划问题,即有:

$$MaxZ_j=(c_j\,x) \qquad (a\,x)\leqslant b_i \quad i=1,2,\cdots,m+n \tag{1.1}$$

其最优解记为 ξ_j^*,倘若(1.1)的最优解不唯一,则其最优解集记为 $M(\xi_j^*)$ 或 M_j。

本文沿用了文献[1][2]中的许多符号,不在重复说明,其思想与文献[1][2]也是一脉相承的。而最根本的特点在于推广了 *Kuhn − Tucker* 原理。

§2　具有两个目标函数的规划问题

为了便于阐明新概念与新原理及其它们的应用,我们首先是研究两个目标函数的线性规划问题,即:

$$MaxZ=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1, & x\\c_2, & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}, & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\c_{21}, & c_{22}, & \cdots & c_{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$(a_i\,x)\leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m+n$$

假定对于(2.1)中第一个目标函数所对应生成的(单目标)线性规划问题为:

$$MaxZ_1=(c_1\,x) \qquad (a_i\,x)\leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m+n \tag{2.2}$$

有唯一的最优解 ξ_1^*,不失一般性可假定 $\xi_1^*=x_{12\cdots n}$,($x_{12\cdots n}$ 是 $(a_i\,x)\leqslant b_i$　　$i=1,2,\cdots,n$ 之根),此时有:

$$c_1=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\cdots+\alpha_na_n$$
$$\alpha_i>0, \qquad i=1,2,\cdots,n$$

对于(2.1)中第二目标函数所构成的(单目标)线性规划问题:

$$MaxZ_2=(c_2\,x) \qquad (a_i\,x)\leqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,n+m \tag{2.3}$$

假定此问题有唯一的最优解 $\xi_2^*=x_{i_1i_2\cdots i_n}$ 这里 $x_{i_1i_2\cdots i_n}$ 是方程组 $(a_{i_l}x)=b_{i_l}$　$l=1,2,\cdots,n$ 之解,且有:

$$c_2=\beta_1a_{i_1}+\beta_2a_{i_2}+\cdots+\beta_na_{i_n}$$

$\beta_i > 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n$

在上述假定下，我们有下述定理

定理 2.1 $R^*_{pa} = D$ 的必要充分条件是 $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0, \lambda_i > 0, i = 1,2$。

此时显见有 $R^*_{pa} = R^*_{wa} = D$

定理 2.2 若关系式 $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = 0$，$(\lambda_i > 0, i = 1,2)$ 不成立，在 $\xi^*_1 = X^*_{12\cdots n}$ 处，求 c_2 对矢量组 $\{a_1, a_2, \cdots, an\}$ 的线性关系表达式①，假定为：

$$c_2 = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$$

1° 若 $r_l > 0, l = 1,2,\cdots,n$，则 $\xi^*_1 = \xi^*_2$，此时问题(3.1)有绝对最优解 $x_{12\cdots n}$。

2° 若 $r_l \geqslant 0, \quad l = 1,2,\cdots,n$ 则此时 $\xi^*_1 \in M_2$ 这里 M_2 是第二个(单目标)线性规划问题的最优解集，此时 $R^*_{pa} = \xi^*_1 = x^*_{12\cdots n} \qquad R^*_{wp} = M_2$，有

$$R^*_{pa} \subset R^*_{wp}$$

3° 若在系数 $r_l (l = 1,2,\cdots,n)$ 中，至少有一个 $r_l < 0$ 则此时可以寻求下述关系式

$$c_1 + \delta c_2 = \tau_1 a_{j1} + \tau_2 a_{j2} + \cdots + \tau_{n-1} a_{jn-1}$$

这里 $\delta > 0, \tau_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n-1$，且 $(c_{j_1,j_2,j_{n-1}}) \subset (1,2,\cdots,n)$

若 $\tau_i > 0, i = 1,2,\cdots,n-1$ 则有 $\beta_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} \subset R^*_{pc}$ 这里 $\beta_{j_1 j_2 \cdots j_{n-1}} = \Pi_{j1} \cap \Pi_{j2} \cap \cdots \cap \Pi\, jn-1 \cap D$

$$\Pi_l = \{x \mid (a_l\, x) = b_l\}$$

证明：1°2° 显见，在证明 3° 之前先证明下面一个引理

引理 2.1 若 $c_1 + \delta c_2 = \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \cdots + \tau_{n-1} a_{n-1}$ 这里 $\tau_i > 0, i = 1,2,\cdots,n-1, \delta > 0$，则 $B_{1,2,\cdots,n-1} \subset R^*_{pa}$

这里 $B_{12\cdots n-1} = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \cdots \cap \Pi_{n-1} \cap D$

证明：令 $h_n = \pm (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1})$ 其正负号由 $(a_n\, h_n) < 0$ 决定，从 $\xi^*_1 = X^*_{12\cdots n}$ 出发，沿 h_n 方向作射线：$x^*_{12\cdots n} + \lambda h_n$，必与某个约束两相交，不失一般性，不妨设此射线与约束面 Π_{n+1} 最早相交，其交点为 $x12\cdots n-1\ n+1$，这时有：

$$B_{12\cdots n-1} = \{x \mid (x = \alpha X^*_{12\cdots n} + (1-\alpha) X_{12\cdots n-1 n+1} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

用 h_n 与系第式(*)作内积：

$$c_1 + \delta c_2 = \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \cdots + \tau_{n-1} a_{n-1} \qquad (*)$$

有

$$(c_l\, h_n) + \delta (c_2\, h) = 0$$

由于 $\quad c_1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \qquad (*)$

有 $\quad (c_l\, h_n) = \alpha_n (a_n\, h_n)$

由 $(a_l\, h_n) < 0$ 可推知 $(c_l\, h_n) < 0$ 及 $(c_2\, h_n) > 0$

对于 $B_{1,2,\cdots,n-1}$ 上任意两个不同点 η_1 及 η_1 必具有下述性质：

若 $(c_l\, \eta_n) > (c_l\, \eta_2)$，则必有 $(c_2\, \eta_1) < (c_2\, h_2)$ 反之亦然

对于任一 $\eta_l \in B_{1,2,\cdots,n-1}$ 及 η 上的任一可行方向 r，令 $\xi = \eta + r$ 有

$$(cl\ \xi) + \delta (c_2\, \xi) = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i b_i + \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i (a_i, \tau)$$

---

① * 有时称为 c_2 在 $x_{1,2,\cdots,n}$ 处的展开

由于$\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i(a_i,r)<0$，所以比较下列两式：

$$(c_l\,\xi)+\delta(c_2\,\xi)<\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i b_i$$

$$(c_l\,\eta)+\delta(c_2\,\eta)=\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i b_i$$

知$\eta\in R_{PR}^{*}$　　即$B_{12,\cdots,n-1}\subset R_{pa}^{*}$　　证　毕

定理 2.3

在定理 2.1 的条件下，若有关系式：

$$c_1+\delta c_2=\tau_1 a_{i_1}+\tau_2 a_{i_2}+\cdots+\tau_k a_{i_k}$$

这里$\delta>0,\tau_l>0,i=1,2,\cdots,k,\quad 1\leqslant k\leqslant n-1$

令且$B_{j_1,j_2\cdots j_k}=\Pi_{i1}\cap\Pi_{i2}\cap\cdots\cap\Pi ik\cap D$，则$B_{i_1i_2\cdots i_k}\subset R_{PR}^{*},(i_1,i_2,\cdots,i_k)\subset(1,2,\cdots,n)$

证明　为表达方便且不失一般性，可假定

$$c_1+\delta c_2=\tau_1a_1+\tau_2a_2+\cdots+\tau a_{i_k}$$

令　$h_l=\pm(a_l\times a_2\times\cdots\times a_k\times a_{k+1}\times\cdots\times a_j\times\cdots\times a_n)$其正负号由关系式$(a_j\,a_j)<0$来决定，这里$j=k+1,k+2,\cdots,n$

显见有

$$(c_1\,h_j)+\delta(c_2\,h_j)=0$$

注意到此时$B_{12\cdots k}$是一个$n-k$维集合，对任一个$\eta\in B_{12\cdots k}$有：

$$(c_1\,\eta_j)+\delta(c_{2l}\,\eta_j)=\tau_l b_1+\tau_1\,b_2+\cdots+\tau_k b_k$$

对η上的可行方向r，必有$(a_i\,r)\leqslant 0\quad i=1,2,\cdots,k$其中至少有一个不等式，其不等号严格成立，令$\xi=\eta+r$，于是有：

$$(c_1\,\xi)+\delta(c_2\,\xi)=\sum_{i=1}^{k}\tau_i b_i+\sum_{i=1}^{k}\tau_i(a_i\,r)<\sum_{i=1}^{k}\tau_i b_i$$

$\therefore\quad B_{12\cdots k}\subset R_{pa}^{*}$　　证　毕

定义 2.1 若有一个非零矢量g，对问题(1)中的任何一个目标矢量都有：

$$(c_i\,g)=0\qquad i=1,2,\cdots,l$$

则称此方向矢量g为多目标线性规划问题的目标函数族的等值方向。

根据上述定义，在问题(2.1)中有$n-k-1$个等值方向$\{g_j\}\quad j=k+1,k+2,\cdots,n-1$构成$n-k-1$维等值面

$$g_j=\pm(a_l\times a_2\times\cdots\times a_k\times a_{k+1}\times\cdots\times a_j\times\cdots\times a_{n-1}\times c_2)$$

$$j=k+1,k+2,\cdots,n-1$$

下面研究几个例题，分别取自文献[4][5]其目的使读者可与老法求解作一比较

例 1①

$$MaxZ=\begin{pmatrix}Z_1\\Z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2&\leqslant 12\\x_2&\leqslant 3\\3x_1-x_2&\geqslant 0\end{aligned}$$

① [3]P33

$x_1, x_2 \geqslant 0$

解　引进符号：

$c_1 = (4, -1)$，　$c_2 = (-2, 5)$

$a_1 = (2,3), a_2 = (0,1), a_3 = (-3,1)$

$a_4 = (-1,0), a_5 = (0, -1)$.

第一步：对于第一个(单目标)线性规划，我们有：

$\xi_1^* = \xi_{15}^* = (6,0)'$

$c_1 = 2a_1 + 7a_5$

第二步：从 ξ_1^* 处出发，首先计算 c_2 在 ξ_1^* 矢量表达式，有：

$c_2 = -a_1 - 8a_5$

第三步：计算　$c_1 + \delta c_2$　有

$c_1 + \delta c_2 = (2 - \delta)a_1 + (7 - 8\delta)a_5$

取 $\delta = 7/8$，于是有：

$$c_1 + \frac{7}{8}c_2 = (9/8)a_1$$

寻求前进方向 $n_1, n_1 \perp a_1$ 且 $(a_5, n_1) < 0$，求出 $n_1 = (-3, 2)$，从 x_{15} 作射线 $x_{15} + \lambda n = (6 - 3\lambda, 2\lambda)$ 由于 $x_{15}^* + x_n$ 应在 D 内，故应满足所有约束，起作用约束为 $(a_2 x) < b_2$　求出 $\lambda = 3/2$ 即有 $x_{12} = (3/2, 3)'$

在 x_{12} 处重复上述步骤：

令 $c = c_1 + \frac{7}{8}c_2$，c_2 在 x_{12} 处展开有

$c_2 = -a_1 + 8a_2$

重复步骤 3，有 $c_1 + \delta c_2 = (\frac{7}{8} - \delta)a_1 + 8\delta a_2$

取 $\delta = 9/8$　　有 $c_1^* + \frac{7}{8}c_2 = 9a_2$

求方向 n_2　　$n_2 \perp a_2$ 且 $(a_1 n_2) < 0$　　有 $n_2 = (-1, 0)$

过 x_{12} 作射线　$x_{12} + \lambda n_2 = (3/2 - \lambda, 3)$

起作用约束为 $(a_3 x) \leqslant b_3$，求出 $\lambda = 1/2$ 即有

$x_{23}^* = (1,3)$

在 x_{23}^* 处 c_2 的表达式为：

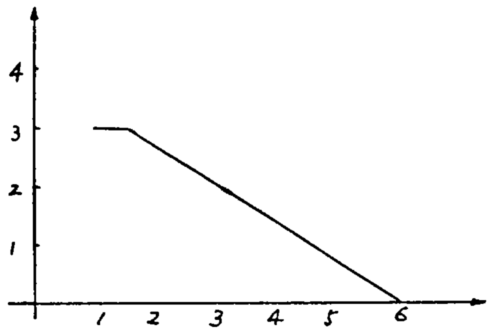
$$c_2 = \frac{2}{3}a_3 + \frac{13}{3}a_2$$

可知 x_{23}^* 是第 2 个(单目标)线性规划的最优解，即有　$\xi_2^* = x_{23}^*$，于是

$R_{pa} = A_1 \cup A_2$　　($x_{15} - x_{12} - x_{23}^*$ 称为通法)

这里　$A_1 = \{x | x = (6,0) + \lambda(-3,2), 0 \leqslant \lambda \leqslant 3/2\}$

$A_2 = \{x | X = (3/2,3) + \mu(-1,0), 0 \leqslant \mu \leqslant 1/2\}$



例 2①

$$MaxZ = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcll} 2x_2 & + & x_2 & \leqslant 20 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & \leqslant 60 \\ -x_3 & - & x_2 & \geqslant -10 \\ & x_1, x_2 & & \geqslant 0 \end{array}$$

解,引进符号:

$c_1 = (4,1), c_2 = (0,2)$

$a_1 = (2,1), a_2 = (5,6), a_3 = (-1,-1)$

$a_4 = (-1,0), a_5 = (0,-1)$.

第一步:求第一个目标所对应的(单目标)线性规划问题的最优解,得到最优解为:

$\xi_1^* = X_{13} = (10,0)$ 且 $c_1 = 3a_1 + 2a_3$

第二步:从 x_{13}^* 处展开 c_2,得到 $c_2 = -a_1 - 2a_3$

第三步:计算　　$c_1 + \delta c_2 = (3-\delta)a_1 + (2-2\delta)a_3$

取 $\delta = 1$,有:

$c_1 + c_2 = 2a_1$　求出方向 $n_1, n_1 = (-1,2)$ 作射线　$x_{13} + \lambda n_1 = (10-\lambda, 2\lambda)$

起作用约束为 $(a_2\, x) \leqslant b_2$　求出 $\lambda = 10/7$,从而得到 $x_{12} = (\frac{60}{7}, \frac{20}{7})$

在 x_{12} 处重复上述步骤,有:

$c_2 = -\frac{5}{7}a_1 + \frac{2}{7}a_2$

令 $c_1^* = c_1 + c_2, c_1^* + \delta c_2 = (2 + \frac{2}{7}\delta)a_2 - \frac{5}{7}\delta a_1$ 取 $\delta = 0$ 有,$c_1^* + \alpha c_2 = 2a_2$

求方向 n_1,求出 $n_2 = (-6,5)$

作射线 $x_{12}^* + xn = (\frac{70}{6} - 6\lambda, \frac{20}{7} + 5\lambda)$

求出起作用约束为 $(a_3\, x) \leqslant b_3$ 且 $\lambda = 10/7$,得到 $x_{23} = (0,10)$

在 x_{23}^* 处展开 c_2　有 $c_2 = a_2 + 5a_3$,可知 $\xi_2 = x_{23}^*$,计算到此中止,有

$R_{pa}^* = A_1 \cup A_2$　　通法为 x_{13}^*—x_{12}—x_{23}^*

---

① [3]P60

这里 $A_1 = \{x|x = (10,0) + \lambda(-1,2) \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{10}{7}\}$

$$A_2 = \{x|x = (\frac{60}{7},\frac{20}{7}) + \mu(-6,5) \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \frac{10}{7}\}$$

下面我们来解例题(3),这里用到文献[2]中的构造性解法,可以得到极其鲜明的几何形象。

例 3①

$$MaxZ = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leqslant 3 \\ & & x_2 & - & x_3 & \leqslant 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leqslant 2 \end{array}$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,3$$

解,引进符号:

$c_1 = (-2, -1, -3), c_2 = (1, -1, 0)$

$a_1 = (1,1,2), a_2 = (0,1,-1), a_3 = (1,1,1)$

$a_4 = (-1,0,0), a_5 = (0,-1,0), a_6 = (0,0,-1)$

第一步:求第一个目标出数所对应的线性规划问题,得到其最优解,为:

$\xi_1 = \xi_{456} = (00,0)$ 且有 $\quad c_1 = 2a_4 + a_5 + 3a_b$

第二步:从 x_{13} 处展开 c_2,有 $c_2 = -a_4 + a_4$

第三步:计算 $\quad c_1 + \delta c_2 = (2-\delta)a_4 + (1+\delta)a_5$

取 $\delta = 2$,有:$c_1 + c_2 = (2-\delta)a_4 + (1+\delta)a_5 + 3a_b$

取 $\delta = 2$,有 $c_1 + 2c_2 = 3a_5 + 3a_b$

令 $h_{56} = \pm a_5 \times a_b$ 其正负号由关系式$(a_4 h_{56}) < 0$ 决定,求出 $h_{56} = (1,0,0)$.

x^*_{456} 出发射线 $x^*_{456} + xh_{56}$

求出$(a_3 x) \leqslant b_3$ 是起作用约束,且 $\lambda = 2$,于是有 x^*_{356} 发出射线 $x^*_{456} + xh_{56} = (2,0,0)$

在 x^*_{356} 处重复上述步骤,有

$c_2 = a_3 + 2a_5 + a_b \qquad$ 故知 $\xi^*_2 = x^*_{356}$

$$R^*_{pa} = \{x|(x = (0,0,0) + \lambda(1,0,0), 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\}$$

附注:以下用文献[2]中的方法,来分析题中的可行域 D。

取第1第4第5第6不等式约束,构成 K 区域记为 $K(1.4.5.6)$,有:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(K) = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

① [4]P233

$A_1^* = x_{456} = (0,0,0), A_4 = x_{156} = (3,0,0)$

$A_5 = x_{146} = (0,0,0), A_6 = x_{145} = (0,0,3/2)$

引进第 2 个约束对 $K(1.4.5.6)$ 进行切割,有

$(a_2 A_1) = 0 < 2$, $(a_2 A_4) = 0 < 2$

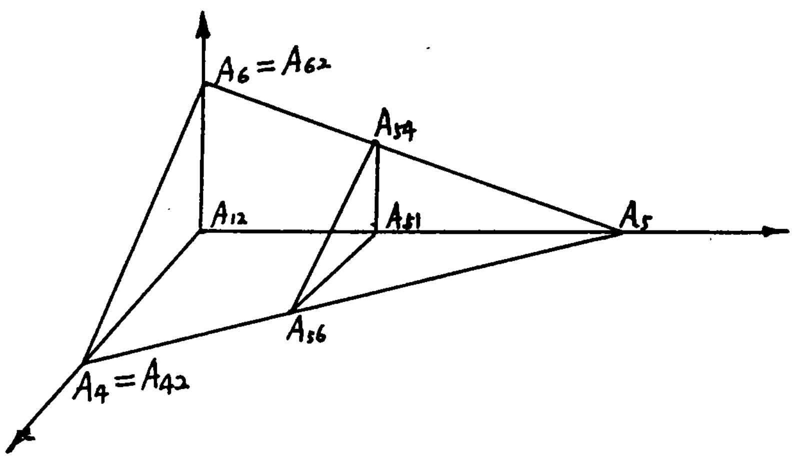
$(a_2 A_5) = 3 > 2$, $(a_2 A_6) = -\frac{3}{2} < 2$

$$\begin{array}{cccccccc|c|cc} A_{12} & A_{42} & A_{62} & \leftarrow & A_1 & A_4 & A_6 & & A_5 & & \\ & & & & u_{14} & u_{41} & u_{61} & & u_{51} & & A_{51} \\ & & & & u_{16} & u_{46} & u_{64} & & u_{54} & \rightarrow & A_{54} \\ & & & & u_{15} & u_{45} & u_{65} & & u_{56} & & A_{56} \end{array}$$

有:$A_{12} = A_1 = X_{456} = (0,0,0), A_{51} = X_{246} = (0,2,0)$,

$A_{42} = A_4 = X_{165} = (3,0,0), A_{54} = X_{126} = (1,2,0)$,

$A_{62} = A_6 = X_{145} = (0,0,3/2), A_{56} = X_{124} = (0,7/3,1/3)$



引进第 3 个不等式约束,对 $D(1.2.4.5.6)$ 进行切割有:

$(a_3 A_{12}) = 0 < 2$, $(a_3 A_{42}) = 3 > 2$,

$(a_3 A_{62}) = 3/2 < 2$

$(a_3 A_{51}) = 2 = 2$, $(a_3 A_{54}) = 3 > 2$, $(a_3 A_{56}) = 8/2 > 2$

进行表上作业;

$$\begin{array}{cccc|c|cccccc} A_{123} & A_{623} & A_{12} & A_{62} & u_{51} & A_{42}, & A_{54} & A_{56} & & & \\ & \leftarrow & u_{124} & u_{621} & u_{12} & u_{421} & u_{541} & u_{5611} & A_{421} & A_{541} & A_{561} \\ & & u_{125} & u_{624} & u_{14} & u_{425} & u_{542} & u_{562} \rightarrow & & & A_{562} \\ & & u_{126} & u_{625} & u_{516} & u_{426} & u_{546} & u_{564}\ A_{426} & & & \end{array}$$

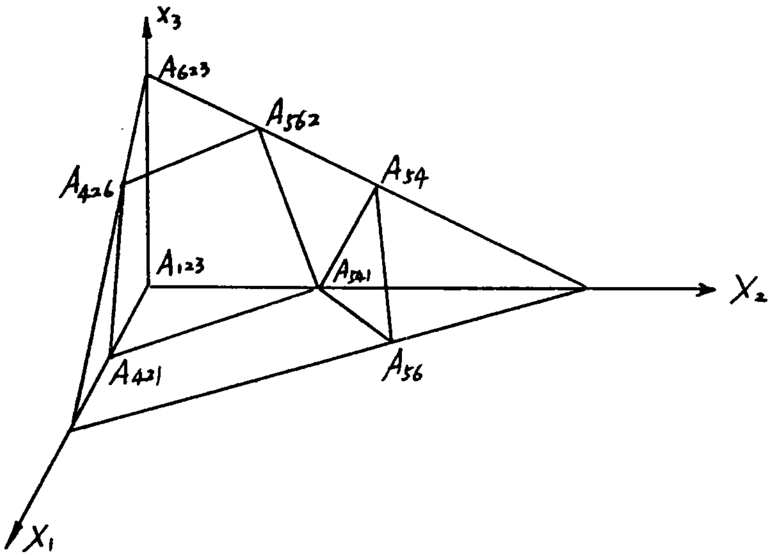
有: $A_{123} = A_{12} = (0,0,0), A_{236} = A_{62} = (0,0,3/2)$

$$A_{513}=A_{51}=A_{514}=A_{513}=A_{561}=X_{2346}=(0,2,0)$$

$$A_{421}=A_{356}=(2,0,0) \qquad A_{562}=x_{134}=(0,1,1)$$

$$A_{426}=X_{135}=(1,0,1)$$

共有 6 个顶点，其几何形状为：



§3 一般理论

这一节我们来研究线性多目标规划的一般理论，为此引进了一些新概念及新定义，这为简化问题是完全必要的。

§3.1 封闭关系式及骨架矢量组。

定义 3.1 在矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中，对某个 c_k 若有下述关系成立：

$$c_k=\sum_{i=1}^{p}\mu_i\cdot c_{ji} \qquad \mu_i>0 \quad i=1,2\cdots,p$$

$C_{(j1,j2,\cdots,j8}\subset(1,2,\cdots,l)$，则称矢量 c_k 是矢量组 $\{c_1,c_2,c_l\}$ 中的中心型矢量

定义 3.2 若有关系式

$$\sum_{i=1}^{q}\mu_i\cdot c_{ji}=0$$

这里 $\mu_i>0, i=1,2,\cdots,q$，称此种矢量关系式为封闭关系式，此时，矢量组 $C_{(j_1,j_2,\cdots,j_q}$ 的秩称为该封闭关系式的封闭秩。又若该矢量组 $C(j_1,j_2,\cdots,j_q)$ 的封闭秩等于 $q-1$，则称此封闭关系式是质封闭关系式。

引理 3.1 二个封闭关系式之和仍是一封闭关系式，若二个封闭关系式的封闭秩分别为 r_1 及 r_2 式，若此封闭关系式之和其封闭秩为 r，则有

$$r\leqslant r_1+r_2$$

反之，若有一个封闭关系式 $\sum_{i=1}^{k}\mu_i \cdot c_i = 0 \quad \mu_i > 0 \quad i = 1,2,\cdots,k$，其封闭秩小于 $k-1$，则此封闭关系式至少可表示成二个不同封闭关系式之和。

定义 3.3　E^n 中，矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 内若含有封闭关系式，在矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中所有可能的封闭关系式中最大的封闭秩，称为该矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 的封闭秩。若矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 的封闭秩为 n，则称该矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 是满秩封闭的。

引理 3.2　E^n，若矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 满秩封闭的，对任一非零矢量 τ 必有 c_i 及 c_j 使得

$$(c_j\,\tau) > 0, \qquad (c_i\,\tau) < 0$$

成立，这里(c_i 及 c) 属于矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$

定理 3.1　在线性多目标规划问题(1)中，若目标矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 是满秩封闭的，且 $D \neq \varnothing$ 则　$R^*_{pa} = R^*_{wa} = D$。

引理 3.3 若目标矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 内含有满秩封闭矢量组 $\sum_{i=1}^{k}\mu_i c_i = 0, \mu_i > 0, i = 1,2,\cdots,k(k < l)$ 则对任一矢量 c_j，$(j \in k+1,k+2,\cdots,l)$　c_j 必是一中心型矢量。

若矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 内不含有满秩封闭矢量组，根据 *Farkas* 引理，矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 可以划分成两个互不相交的部分，一部分是中心型矢量，另一部分是非中心型矢量。

定义 3.4　矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中，若不包含满秩的封闭矢量组，则可将矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 分解成互不相交的两部分，$\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中的中心型矢量组为 $C\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$，$\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中的非中心型矢量化为 $B\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$，$B\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 称为矢量组 $\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 的骨架矢量组，显见有

$C\{c_1,c_2,\cdots,c_l\} \cup B\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$　$(p \leqslant l)$ 则下述线性规划(多目标)称为多目标线性规划的相应的骨架问题：

$$MaxZ = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_l, & x) \\ (c_2, & x) \\ \vdots & \\ (c_p, & x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \vdots & \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$$(a_i\,k) \leqslant b_i \qquad i = 1,2,\cdots,m+n$$

定量 4.2，线性多目标规划(1.1)与(4.1)有相同的 R^*_{pa} 及 R^*_{wa}

以下我们研究线性多目标规划问题，可仅限于研究(3.1)型问题。

§3.2　基本定理及原则

定义 3.6　若有下述关系式成立

$$\lambda_1 c_{i1} + \lambda_2 c_{i2} + \cdots + \lambda_p c_{ip} = \mu_1 c_{j1} + \mu_2 c_{j2} + \cdots + \mu_p c_{jp}$$

这里 $\lambda_i > 0 \quad i = 1,2,\cdots,p \quad \mu_i > 0 \quad i = 1,2,\cdots,q$，且 $2 \leqslant p+q \leqslant n+1$ 称这种关系式为 $M—K—T$ 关系式是 *Kuhn − Tuckeu* 关系式的推广。

在 E^n 中若上述 $M—K—T$ 关系式满足下述条件

(i)　$p + q = n + 1$

$(ii) Sank\ \{c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_p},a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_q}\} = n$

则称此 $M—K—T$ 关系式是满秩的，否则称此 $M—K—T$ 关系式是降秩的。

定义 3.7　假定 $B_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \pi_{j_1} \cup \pi_{j_2} \cdots \pi_{j_q} \cup D$，$(1 \leqslant q \leqslant n)$ 是 D 区域旧的一个 $n-q$ 推边

界面，同时又假定有 $M—K—T$ 关系式成立

$$\lambda_1 c_{i_1} + \lambda_{2i_2} + \cdots + \lambda_p c_{i_p} = \mu_1 c_{j_1} + \mu_2 c_{j_2} + \cdots + \mu_p c_{j_p}$$

则称 $B_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ 是一个 $M—K—T$ 关系式是满秩的，则称 $B_{j_1 j_2 \cdots jq}$ 是一个满秩的 $M—K—T$ 型块，若上述 $M—K—T$ 关系式是降秩的，则称 $B_{j_1 j_2 \cdots jq}$ 是一个降秩 $M—K—T$ 型面块。

引理 3.4　　若有 $M—K—T$ 关系式：

$$\lambda_{11} c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 + \cdots + \mu_p c_p$$

$p + q > n + 1$，则必存在另一个 $M—K—T$ 关系式

$$\lambda_1 c_{i_1} + \lambda_2 c_{i_2} + \cdots + \lambda_r c_{i_r} = \mu_1 a_{j_1} + \mu_2 c_{j_2} + \cdots + \mu_s c_{j_s}$$

这里 $r + s \leqslant n + 1$。　$(i_1, i_2, \cdots, i_r) \subset (1, 2, \cdots, p)$

$(j_1, j_2, \cdots, j_s) \subset (1, 2, \cdots, q)$

定理 3.3　　满秩的 $M—K—T$ 型面块必属于有效解集即 $B_{j1, j2 \cdots jq} \subset R^{\cdot}_{pa}$，降秩的 $M—K—T$ 型面块必属于弱有效解集，即 $B_{j1, j2 \cdots jq} \subset R^{\cdot}_{wa}$

证明：为表达方便，同时也不失一般性，我们用下述 $M—K—T$ 关系式，及 $B_{12 \cdots q}$ 表示 $M—K—T$ 面块

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \mu_{pp} \quad (*)$$

$p + q > n + 1$, $Sank\ \{c_1, c, \cdots, c_p, a_1, a_2, \cdots, a_q\} = n$

这里 $\lambda_i > 0$，　$i = 1, 2, \cdots, p$　$\mu_i > 0$　$i = 1, 2, \cdots, q$

若为 η 是 $B_{12 \cdots q}$ 上的任意一点，在 η 上任取一可行方向 r，则必有 $(a_j r) \leqslant 0, j = 1, 2, \cdots, q$，用 r 对（＊）式两侧作内积，有；

$$\lambda_1(c_1 r) + \lambda_2(c\ r) + \cdots + \lambda_p(c_p r) = \mu_1(a_1 r) + \mu_2(a\ 2r) + \cdots + \mu_p(a_p r)$$

推知：

$$\lambda_1(c_1 r) + \lambda_2(c_2 r) + \cdots + \lambda_p(c_p r) \leqslant 0$$

若 $(a_1 r) \leqslant 0$　$i = 1, 2, \cdots, q$ 这 q 个不等式中，有一个不等式严格成立，则有

$$\lambda_1(c_1 r) + \lambda_2(c_2 r) + \cdots + \lambda_p(c_p r) < 0$$

若 $(a_1 r) \leqslant 0$　$i = 1, 2, \cdots, q$，则由 $Sank\{c_1, c_2, \cdots, c_p, a_1, a_2, \cdots, a_q\} = n$ 知 $(c_i r) = 1$　$i = 1, 2, \cdots, p$ 不能同时成立，即必有等个 $(c_m r) > 0$ 同时有某个 $(c_h, r) <$，这里 $m, h \in (1, 2, \cdots, q)$　同时保持下式成立

$$\lambda_1(c_1 r) + \lambda_2(c_2 r) + \cdots + \lambda_p(c_p r) = 1$$

所以 $\forall\ \xi \in B_{12 \cdots q}$　　则必有 $\xi \in R^{\cdot}_{pa}$

所在 $B_{12 \cdots q} \subset R^{\cdot}_{pa}$

若 $Sank\{c_1, c_2, \cdots, c_p, a_1, a_2, \cdots, a_q) = n$ 知 $(c_i r\} = n$，则可能有某个非零矢量，使 $(c_i r) = 0$　$i = 1, 2, \cdots, q$ 成立

所以 $\forall\ \xi \in B_{12 \cdots q}$　　则必有 $\eta \in R^{\cdot}_{np}$

故　$B_{12 \cdots q} \subset R^{\cdot}_{wp}$

定理 3.4　　不是 $M—K—T$ 型面块的 D 区域的任何一个 $n + q$ 维连界面 $B_{j_1, j_2, \cdots, j_q}$ 既不属于 $R^{\cdot}_{pa}$ 也不属于 $R^{\cdot}_{wp}$。

证明：不失一般性，假定 $B_{12 \cdots q}$ 是 D 的一个 $n - q$ 维连界面，由于 $B_{12 \cdots q}$ 不是 $M—K—T$ 型面块，所以在下述关系式中

$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p c_p = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \cdots + \cdots + \mu_q a_q$ 有下述三种情况且必发生其一：

$(i) \mu_i > 0$　$i = 1, 2, \cdots, q$ 中至少有一个是负数，不 $\lambda_p < 0$

$(ii)\mu_i > 0 \quad i = 1,2,\cdots,q$ 　则 $\mu_1,\mu_2\cdots\mu_q$ 中至少有一个是负数,不对使 $\mu_p < 0$

$(iii)\lambda_i > 0 \quad j = 1,2,\cdots,p$ 有正有负,同时 $\mu i \quad i = 1,2,\cdots,q$ 中亦有正有负。

下面分情况讨论

在情形(i),已知 $\lambda_p < 0$,假定 $\lambda_p > 0$ 　令 $\tau \equiv \pm (c_2 \times c_3 \times \cdots \times c_{p-1} \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_q)$,$\tau$ 的正负号由$(c\,\tau) > 0$ 　决定,由于$(a\,\tau) = 0, i = 1,2,\cdots,q$ 成立,对任一个 $\eta \in B_{12\cdots q}$ 取 $\eta - \tau$ 有$(c_p),\eta + \tau) > (c_1,\eta\,\tau)(c_1,\eta + \tau) > (c_p,\eta\,\tau)$ 　$(c_j,\eta + \tau) = (c_j,\eta)$ 　$j = 2,3,\cdots,p - 1$ 　所以

$\eta \notin R^*_{pa}$ 同时 $\eta \notin R^*_{pa}$

$\therefore \quad B_q \not\subset R^*_{pa} \qquad B_q \not\subset R^*_{wp}$

情形(ii) 已知 $\mu_q < 0$,不失一般性可假定 $\mu_i > 0$

令 $\tau = \pm (c_2 \times c_3 \times \cdots \times c_{p-1} \times a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{q-1})$,其正负号由关系式$(c\,\tau) > 0$决定,由于$(c_1\,r) > 0$,可知$(a_q\,r) < 0$ 从定义知 　$(a_i\,r) = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,q - 1$。

$\forall\, \eta \in B_{12\cdots q}$ 有$(c_1,\eta + \tau) \supset (c_1,\eta)$ 且 τ 是一可行方向 　同时$(c_1\,\tau) = 0, j = 2,3,\cdots,p$ 有$(c_j,\eta + \tau) = (c_j,\eta_j)$ 　$j = 2,3,\cdots,p - 1$ 　故 $\eta \notin R^*_{pa}$ 同时 $\eta \notin R^*_{wp}$

故 　$B_{12\cdots q} \not\subset R^*_{pa} \qquad B_{12q} \not\subset R^*_{wp}$

(iii) 中$(i)(ii)$ 中任何一种方法都可以证明同样的讨论。　　　　证　　毕

定理 3.4(基本定理) 对于多目标线性规划问题(3.1) 所有的满秩 $M—K—T$ 型面块之和集构成 R^*_{pa}。

所有满秩及降秩的 $M—K—T$ 型面块和集构成 R^*_{wp}。

§4　算法及程序

下面我们来归纳上述新理论提出的新方法,分两大部分。

第一部分:研究摘要中的问题的目标函数矢量族:

$$\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$$

(1°)$\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中有满秩封闭矢量组,且 $D \neq \varnothing$ 则有 $R^*_{pa} = R^*_{wp} = D$,计算到此结束。

(2°)$\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中不含有满秩封闭矢量组,寻求$\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$ 中的骨架矢量组 $B\{c_1,c_2,\cdots,c_l\}$,假定 $B\{c_1,c_2,\cdots,c_l\} = \{c_1,c_2,\cdots,c_p\}$,这里 $p \leqslant l$,转而求解多目标线性规划问题(3.1)

第二部分,求解多目标线性规划问题(3.1)

第一步,先求一个(单目标) 线性规划的最优解,不失一般性先求第一个(单目标) 线性规划的最优解 　　$MaxZ_1 = (c_1\,x)$

$$(a_i\,x) \leqslant b_i \qquad i = 2,\cdots,m + n$$

假定其最优解为 ξ_i^*,若最优解不唯一,则假定最优解集为 M_i。

第二步,$c_j\,h\,\xi_1$ 到$(c_l c\,x)$ 为目标的线性规划最优解 ξ_j^* 线 M_j 的通法,或称为先求出由 ξ_i^* 到 ξ_j^* 或 M_j 的一维 $M—K—T$ 型面块。

若第一个线性规划最优解是 M_1,则从 M_1 上的各个顶点求到达 ξ_1^* 或 M_j 的一维 $M—K—T$ 型向块。

第三步,求 2 维至 $n - 1$ 维各种可能的 $M—K—T$ 面块

最后由从 0 维到 $n-1$ 维的满秩 $M—K—T$ 型向块构成 R^{*}_{pa}。

由从 0 维到 $n-1$ 维的满秩及降秩的 $M—K—T$ 型面块构成 R^{*}_{wp}。

§5 讨　论

上述方法的使用文献[3][4]中单纯形参数方法要简捷直观。

当然在进一步详细讨论 M—K—T 关系式方面还有许多工作可以深入做下去，本文限于讨论到此打住。

参 考 文 献

[1] 马　琛，线性规划的新解法，数学学刊，1987，P53—77

[2] 马　琛，线性不等式组 Ax≤b 的一种新的构造性解法，系统科学与数学， 11(3)，1991，P272—283

[3] M. Zeleny，Linear Multiobjective Programming，Springer. Veslag，Berlin，1974

[4] Po—Lung Yu，Maltiple—Csilesia &esison Making Concepts techniques and Extensions. Plenumlses，New York and London 1985

[5] 张建中，许绍吉，线性规划，科学出版社　1990.