线性规划新解法[1]中的新的分解算法①

马　琛

（北京经济学院信息系　100026）

摘　要　作者在 1987 年提出了线性规划新解法[1]。本文提出一种线性规划的新的分解算法，这种分解算法不同于 Dantzig－Wofe 的分解算法。

关键词　线性规划　分解　算法

§1 新解法下的分解算法

研究下述线性规划问题：

$$
\begin{array}{llllll}
MaxZ = (c_1, x_2) + (c_2,\ x_2) + \cdots + (c_n,\ x_n) & & & & \\
B_1 x_1 & & & & \leqslant b_1 \\
 & B_2 x_2 & & & \leqslant b_2 \\
 & & \ddots & & \\
 & & & B_n x_n & \leqslant b_n \\
A_1 x_1 + & A_2 x_2 + & \cdots & + A_n x_n & \leqslant b \\
x_1 \geqslant 0, & x_2 \geqslant 0, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0 & & &
\end{array}
$$

这里　x_j 是 n_j 维列向量

b_j 是 m_j 维列向量

b 是 m 维列向量

B_j 是 $m_j \times n_j$ 阶矩阵

A_j 是 $m \times n_j$ 阶矩阵

---

①　本文 1994 年 8 月 18 日收到。

c_j 是 n_j 维行向量

定义 1.1 下述线性规划称为线性规划问题(1)中的第 i 个子规划:

$$\begin{aligned} &MaxZ_i = (c_i, x_i) \\ &B_i x_i \leqslant b_i \\ &x_i \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

这里 $B_i = (b_{kj}^{(i)})_{\substack{k=1,2,\cdots,m_i \\ j=1,2,\cdots,n_i}}$,令 $a_k^{(i)} = (b_{k1}^{(i)}, b_{k2}^{(i)}, \cdots\cdots, b_{kn}^{(i)})$ $k = 1,2,\cdots,mi$,

$a_{m+g}^{(i)} = (0,0,\cdots,0,-1,0,\cdots,0)$ $g = 1,2,\cdots,n_i$ 也就是 $a_l^{(i)} = (l = 1,2,\cdots,m_i + n_i)$

令 $D_i = \{x_i | B_i x_i \leqslant b_i, x_i \geqslant 0\}$

对于第 i 个子规划(2),设 k_i 对 c_i 正则,且 $c_i = \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_k^{(i)} a_{kl}^{(i)}, \lambda_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots,n_i$,

$(l_1, l_2, \cdots, l_{n_i}) \subset (1,2,\cdots,m_i + n_i)$

k_i 的最优解集为 GK_i,若 $GK_i \cap D_i \neq \varnothing$ 则 $S_i = GK_i \cap D_i$ 就是子规划(2)的最优解集。

研究线性规划问题(3)

$$\begin{aligned} MaxZ_1 = (c_1, x_1) + (c_2, x_2) + \cdots + (c_n, x_n) & \\ B_1 x_1 \qquad\qquad\qquad & \leqslant b_1 \\ B_2 x_2 \qquad\qquad & \leqslant b_2 \\ \ddots \qquad\qquad & \\ B_n X_n & \leqslant b_n \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0 & \end{aligned}$$

每个线性规划问题(1),除去最后一组约束 $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n \leqslant b$,都有一个线性规划问题(3)与之相应。

我们先来研究线性规划问题(3),再来研究线性规划问题(1)。

定理 1 对于线性规划问题(3),必有:

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_i} \lambda_k^{(i)} A_{kl}^{(i)}$$

这里 $\lambda_k^{(i)} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n,\quad k = 1,2,\cdots,n_i$。

$A_k^{(i)} = (0,0,\cdots,0,a_{kl}^{(i)},0,\cdots,0)$,规划问题(3)的最优解集 S 有

$S = S_1 \otimes S_2 \otimes \cdots \otimes S_n$。

$\otimes$ 这里表示集合的直积。

定理 2，对于线性规划问题(1) 有：

(i) 对 S 中的任一个元素 ξ，若有，

$A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + \cdots + A_n\xi_n \leqslant b$ 成立

这里 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$

则 ξ 也是规划问题(1) 的一个最优解。

(ii) 若(i) 的情形不成立，对于任一 $\xi \in s$，在约束群 $A_1X_1 + A_2X_2 + \cdots + A_nX_n \leqslant b$ 中至少有一个约束，不妨记成 $(a,x) \leqslant \beta$，使得 $(a,\xi) > \beta$ 此时

$K = \{x \mid (A_{ln}^{(i)}, x) \leqslant b_{ik}^{(i)} \quad i = 1,2,\cdots,n, k = 1,2,\cdots,n_i, (a,x) \leqslant \beta\}$

构成一个对 $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 的正则 K 区域。可按照线性规划的新解法[1] 中所提出的方法计算，其计算的便捷程度大大优于 *Dantzig* − *Woefle* 分解方法。

§ 2　例题及应用

例①

$$
\begin{aligned}
MaxZ = x_1 + x_2 + 2y_1 + y_2 & \\
x_1 + 3x_2 & \leqslant 30 \\
2x_1 + x_2 & \leqslant 20 \\
y_1 & \leqslant 10 \\
y_2 & \leqslant 10 \\
y_1 + y_2 & \leqslant 15 \\
x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 & \leqslant 40 \\
x_1, x_2 \geqslant 0, y_1, y_2 \geqslant 0 &
\end{aligned}
$$

解：先解上述规划问题中的两个子规划

$$
\begin{aligned}
& MaxZ_1 = x_1 + x_2 && c_1 = (1,1) \\
& x_1 + 3x_2 \leqslant 30 && a_1 = (1,3) \\
& 2x_1 + x_2 \leqslant 20 && a_2 = (2,1) \\
& x_1, x_2 \geqslant 0 &&
\end{aligned}
$$

由于 $c_1 = \frac{1}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2$，求其最优解为 $x^* = (6,8)'$

① 此题选自 "线性规划"管梅谷，郑汉鼎，P348

$$
\begin{aligned}
&MaxZ_2 = y_1 + y_2 && c_2 = (2,1)\\
&\quad y_1 \leqslant 10 && b_1 = (1,0)\\
&\quad y_2 \leqslant 10 && b_2 = (0,1)\\
&\quad y_1 + y_2 \leqslant 15 && b_3 = (1,1)\\
&\quad y_1, y_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

求最优解为 $y^* = (10,5)'$ 且 $c_2 = b_1 + b_3$

令 $\xi = (x^*, y^*) = (6,8,10,5)'$，代入该题中最后一个约束：$x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 \leqslant 0$，得到

$$x_1^* + 2x_2^* + 2y_1^* + y_2^* = 47 > 40$$

于是

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 &\leqslant 30\\
2x_1 + x_2 &\leqslant 20\\
y_1 &\leqslant 10\\
y_1 + y_2 &\leqslant 15\\
x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &\leqslant 40
\end{aligned}
$$

构成一个新的 K 区域

因为 $c = \varepsilon_1\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix} + \varepsilon_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \varepsilon_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \varepsilon_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

这里 $\varepsilon_1 = \frac{1}{5}, \varepsilon_2 = \frac{2}{5}, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = 1$

注意到

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} = \sigma_1\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \sigma_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

这里 $\sigma_1 = \frac{3}{5}, \sigma_2 = \frac{1}{5}, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1$

$$Min(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} | \sigma_i > 0) = \frac{1}{3} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}$$

于是有

$$c = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

解方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2y_1 + y_2 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 &= 20 \\ y_1 &= 10 \\ y_1 + y_2 &= 15 \end{aligned}$$

求出最优解为 $\xi^* = (\frac{25}{3}, \frac{10}{3}, 10, 5)'$，此时，

$$MaxZ = \frac{110}{3}.$$

参 考 文 献

[1] 马 琛，线性规划的新解法，数学季刊，2，4(1987)，53 77

[2] Vasek chvatal, Linear programming, W. M Freeman and Company, P425

[3] 管梅谷、郑汉鼎，线性规划，山东科学出版社，P339。