第5卷 第1期 中国管理科学 Vol. 5, No.1
1997年 3月 Chinese Journal of Management Science March. ,1997

不完备金融资产市场中的资本资产定价原理①

王志华

(山东经济学院财政金融系，济南 250014)

朱 江

(徐州师范大学数学系，徐州 221000)

摘 要 本文中，我们在不完备金融资产市场的框架下研究了资本资产的定价问题，得到了著名的资本资产定价模型（CAPM）的一个重要推广形式，建立了相应的混合投资基金定理，这些结果对于金融资产市场的理论研究具有重要的意义。

关键词 金融资产，不完备市场，均衡，资本资产定价模型，投资基金定理。

一、引言

众所周知，在近代金融经济的资本市场理论中，三个基本的重要课题是：(1) Warkowitz (1952) 和 Tobin(1958) 的均值－方差证券投资组合理论，以及在此基础上由 Black(1972), lintner (1965), Mossin (1965), Sharpe (1964) 所得到的资本资产定价模型 (Capital Asset Pricing Model)。(2) 由 Merton(1971,1973), Breeden(1979) 和 Cox, Ingersoll, Ross(1985) 建立的动态资本资产定价模型，即 ICIAM。(3) 由 Black 和 Scholes(1973) 所建立的期权定价模型（参见文献〔1〕)。在以上三个问题中，CAPM 起着最为基本的作用（Markowitz 和 Sharpe 因为对于这一问题的突出贡献而得到 1973 年的诺贝尔经济学奖)，这一理论与期权定价理论一起构成了金融工程的基础，而后者则成为九十年代经济和金融领域的一个倍受瞩目的问题。本文的目的是在不完备金融资产市场的框架下讨论资本资产的定价问题，我们最终要建立不完备金融资产市场中的 CAPM 和相应的混合投资基金定理，从而得到 Merton〔3〕中若干重要结果的拓展形式。为便于以下的讨论，我们首先基于一般均衡理论给出完备市场情形的 CAPM, 然后建立不完备市场的经济模型，并在模型的基础上给出相应的 CAPM, 本文中所用到的经济均衡理论可参见 Debreu〔2〕，关于证券市场的数理研究及不完备市场中的一般均衡理论可见 Duffie〔4〕或者 Geanakoplos〔5〕，关于连续时间的金融市场理论可参看 Merton〔3〕。

二、完备市场中的 CAPM

有几种方式可以建立完备市场中的 CAPM, 为了体现 CAPM 对于金融资产的均衡定价思想，我们这里将在一般均衡理论的基础上给出这一结果。我们以 (Ω,Σ,P) 表示一个概率空间，

① 本文 1996 年 11 月 21 日收到。

Y表示定义在此概率空间上所有具有有限方差的随机变量全体，即 $Y=\{\xi,\xi$ 是定义在 Ω 上的随机变量，$Var(\xi)<\infty\}$，$\xi\in Y$ 表示某种证券的随机收益。假定有I个经济人，每个经济人的选择空间都是 $L=Span(Y)$，$Span(Y)$ 表示由Y中的元素生成的子空间，因此，任意的 $\xi\in L$ 表示一个特定的投资组合。我们假定经济人 i 的初始资产为一个随机变量 $\omega_i\in L$，而以 $\omega=\sum_{i=1}^{I}\omega_i$ 表示市场投资组合（证券市场中可供交易的证券全体），并且设 $Var(\omega)\neq 0$。我们以 $e\in L$ 表示一个无风险的证券，即在未来任何的状态下，其收益都是1的证券（例如由政府发行的债券）。设经济人 i 的效用函数为 u_i。在期望－方差的框架下，经济人的效用取决于其所持证券（随机变量）的均值（预期收益）和方差（风险）。我们进一步假设经济人是风险厌恶的，即对于 $\xi,\eta\in L,E(\xi)=E(\eta),Var(\xi)<Var(\eta)$ 时，有 $u_i(\xi)>u_i(\eta)$。设这样的一个交换经济中存在竞争均衡（这是一个很强的假设，因为在目前的情况下，证券市场中是否存在一个竞争均衡尚是没有明确结论的事情，其原因是韦背了一般经济均衡定理中所假设的偏好具有严格单调性的条件。我们在本文中不讨论这一问题），记为 $(x_1,x_2,\cdots,x_I;p)$。此时，无风险证券和市场投资组合的市场价值分别为 $p\cdot e$ 和 $p\cdot\omega$，我们假设它们都是非零的。按照 *Riesz* 表示定理（我们设所考虑的空间是一个 *Hilbert* 空间），必存在唯一的投资组合 $\pi\in L$ 使得

$$p\cdot x=E(\pi x)Ax\in L \tag{1}$$

对于经济人的最优选择 x_i，利用回归分析的方法，我们可以建立下面的回归方程

$$x_i=A+B\pi+\varepsilon, \tag{2}$$

其中 A 和B是相应的回归系数，而 ε 是一个均值为零的随机变量，并且有 $Cov(\varepsilon,\pi)=0$。从而

$$E(\varepsilon)=Cov(\varepsilon,\pi)=E(\varepsilon\pi)-E(\varepsilon)E(\pi)=0。$$

因为 $e,\pi\in L$，经济人可以选择投资组合 $x_i^*=Ae+B\pi$。因为 $E(\varepsilon\pi)=E(\pi)E(\varepsilon)+Cov(\varepsilon,\pi)=0$，我们有

$$p\cdot x_i^*=E[\pi(A+B\pi)]=E[\pi(A+B\pi+\varepsilon)]=p\cdot x_i, \tag{3}$$

从而 x_i^* 是预算可行的。因为 $E(\varepsilon)=0$ 及 $Cov(x_i^*,\varepsilon)=Cov(A+B\pi,\varepsilon)=0$，于是由风险厌恶假设，我们有 $u_i(x_i^*)>u_i(x_i)$，这与最优性假设相矛盾。于是我们有 $\varepsilon=0$。所以得到

$$x_i=A_i+B_i\pi,\quad 而\ \omega=\sum_{i=1}^{I}\omega_i=\sum_{i=1}^{I}(A_i+B_i\pi)=a+b\pi,\ a=\sum_{i=1}^{I}A_i,\ b=\sum_{i=1}^{I}B_j$$

因为市场投资组合具有非零的方差，从而 $b\neq 0$。对于任意的 $x\in L$，我们从以上诸式可以得到

$$p\cdot x=E(\pi x)=E[(\frac{\omega-a}{b})x]=cE(x)+dCov(x,\omega),\ c=E(\omega-a)/b,\ d=1/b. \tag{4}$$

对于任意的投资组合 $x\in L$，我们定义其收益率为 $R_x=x/p\cdot x$，预期收益为 $E(Rx)$。则由（4）我们可以得到

$$E(R_x)=R_e+\beta_x(E(R_\omega)-R_e)\beta_x=Cov(R_x,R_\omega)/Var(R_\omega), \tag{5}$$

(5)式即是证券市场理论中著名的资本资产定价模型（CAPM），而 β_x 则称为投资组合 x 的 β 系数。(5)式表明，证券市场中风险资产的预期收益等于无风险收益与风险补偿收益的和，因为是均衡状态决定的预期收益，因此此处的风险补偿实际上是系统风险补偿。由（5）立即可以得出重要的证券市场线。资本资产定价模型具有三方面的重要含义：

(1) 证券市场是有效的（证券市场的有效性即是指证券的价格已经反映了所有映响证券价

格的信息)。

(2) 金融资产的价格依赖于该资产的收益率与特定证券组合的协方差，而不是取决于所讨论资产收益的方差。

(3) 在市场均衡的条件下，任意的投资组合都可以通过某两个特定的投资组合产生，这从一个角度表明了投资基金的重要意义（投资基金定理)。

在以上关于 CAPM 的研究中，我们作了两个本质性的假设，一是要求市场是完备的，二是要求所有经济人的初始财富都是可以交易的金融资产（证券)，并且市场投资组合由所有的初始财富（证券）构成。这两个假设都限制了 CAPM 的应用范围。本文中，我们将研究第一个问题，即在不完备市场的框架下讨论 CAPM, 这是对经典 CAPM 的一个重要拓展，在另外的一篇文章中，我们将研究上面提到的第二个问题。

三、不完备市场模型

现在我们简要地给出不完备市场的经济模型，不完备市场理论是本世纪八十年代经济学理论的一个重要进展，已经对经济学和金融经济产生了深刻的影响，建立了许多在以前经济学的框架下无法得到的新结果，例如金融工具的非中立性，企业金融结构的不切题性（Midigliani－Miller 原理)。关于不完备市场理论的一个综述可以参见 Geanakoplos〔5〕。

我们研究一个两期经济，$t=0,1$ 表示经济的两个时间。当 $t=1$ 时，经济的自然状态出现不确定性，设在第二个时期有 S 个状态，以 $\Omega=\{1,2,\cdots,S\}$ 表示经济的状态集。设在每个状态仅有一种商品可供消费，于是所讨论的商品空间为 R_+^{S+1}。经济中有 I 个经济人，每个经济人的特征由 (u_i,e_i) 描述，其中 $u_i:R_+^{S+1}\rightarrow R$ 是一个严格拟凹的单调函数，$e_i\in R_+^{S+1}$ 表示经济人关于 $S+1$ 种商品的初始禀赋，并且是严格正的。设证券市场中有 H 种证券，证券 $h\in H=\{1,2,\cdots,H\}$ 可以表示为一个向量 $r_h\in R^S$, 它说明了该证券未来收益的所有可能情形。我们假设其中的第一种证券是无风险的，即其未来的收益是确定的。H 种证券的收益情况可以用一个 $S\times H$ 阶的矩阵 R 表示，即 $R=(r_h^s)_{S\times H}$。对于一个特定的投资组合 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_H)\in R^H$, 其未来的收益是 $R\cdot\theta\in R^S$。我们称一个证券市场是完备的，如果有 $D=\{R\cdot\theta.\ \theta\in R^H\}=R^S$。否则，称市场是不完备的。假定所考虑的经济是私有制的，因此每个经济人关于证券有一个初始的持有量，记为 $\theta_i=\theta_i^1,\cdots,\theta_i^H)\in R_+^H$, 即在开始时，不允许对证券进行卖空交易。我们现在可以建立不完备市场经济均衡的概念。因为所讨论的经济本质上是币制的，我们可以假定商品在每个状态下的价格都是1。称 $(p^*,(\theta_i^*)_{i=1}^I)\in R_{++}^H\times R^{I\times H}$ 是一个不完备市场均衡（简称为GEI 均衡)，如果有

(1) $\sum_{i=1}^{I}\theta_i^*=\sum_{i=1}^{I}\theta_i$;

(2) $\theta_i^*\in\arg\max\{u_i(e_i+R\cdot\theta):p^*\cdot\theta\leqslant e_i(0)+p^*\cdot\overline{\theta}_i,\ e_i(s)+R\cdot\theta\geqslant 0,\ s\in\Omega\}$.

我们称一个 GEI 均衡是一个内部均衡，如果有 $e_i+R\cdot\theta_i^*\in R_{++}^S$。(内部均衡在理论研究中经常起着重要的作用，参见〔1〕)。关于交换经济中 GEI 均衡的存在性，自八十年代中期以来已有大量的工作，开创性的贡献由*Cass* 在1984 年给出，此后，许多著名的学者，如*Duffie*, *Margil, Geanakoplos, Balasko* 等人都作了重要的工作，可以证明，在适当的假定下，本文所建立的不完备市场经济模型中存在一个 GEI 均衡，这是我们以下讨论的起点。

四、不完备市场中的 CAPM

本节我们建立不完备市场中的资本资产定价模型，并给出相应的投资基金定理。首先，我们给出以下的假设：

(1) 经济人关于 S+1 种商品的初始禀赋满足 $e_i \in Span(R)$，即存在某个 $\alpha \in R^H$，使得 $e_i=R\cdot\alpha$，并且有 $e_i \in R^S_{++}$。

(2) 经济人是风险厌恶的，并且具有二次的 Von Neumann Morgestern 期望效用函数，即

$u_i(x)=x-\frac{1}{2}\lambda_i x^2$. 实际上，其原来的效用函数也可以详细地表示出来，对于经济人 i,

$u_i(\omega_0,\cdots,$ 为 $\omega_S)=\sum_{s=0}^{S}\pi_S(\omega_S-\frac{1}{2}\lambda_i\omega_S^2),\lambda_i>0,\ i=1,2,\cdots,I$.

(3) 经济人对未来状态的发生具有相同的预期，即若以 $\pi_S, S\in\Omega$ 表示状态 s 发生的概率，则对任意两个经济人 i 和 j, 有 $\pi_s^i=\pi_s^j,\forall s\in\Omega$。

(4) 经济人在均衡配置处的边际效用向量是一个严格正的向量。

现在我们在以上的假设下建立不完备市场中的CAPM。设 $(p^*,(\theta_i^*)_{i=1}^I)$ 是一个内部均衡（我们不讨论内部均衡的存在性），又不妨设无风险资产的价格是 1。我们首先证明，存在一个唯一的价格系统q, 使得对于每个资产的收益r, 经济人所持有的投资组合θ_i^*在价格水平$q(r)$ 将不会再进行交易。事实上，在我们的假设下，经济的内部均衡是 Pareto 有效的，我们所指的 Pareto 有效性，是对于均衡配置$x_i=e_i+R\cdot\theta_i$而言的。注意到关于效用函数的有关假设，这一点是容易证明的。以 μi 表示经济人 i 在均衡配置处的边际效用向量，又引进状态内积算子 *: 对任意的 $a,b\in R^S, a*b=\sum_{s=1}^{S}\pi_s a_s b_s$

然后我们定义 $q(r)=(\mu_i*r)/\mu_i*\bar{1},\bar{1}=(1,1,\cdots,1)$。按照效用函数的定义和假设，所有的边际效用向量必定是相关的，从而以上的定义与经济人无关。

我们定义资产的收益率为 $\xi(r)=r/q(r), z=e+R\bar{\theta}, \xi(z)=z/q(z)$, 而预期的收益则为 $E(\xi(r)), E(\xi(z))$. 则必有

$$E(\xi(r))=1+\frac{Cov(\xi(r),\xi(z))}{Var(\xi(z))}(E(\xi(z))-1), \tag{6}$$

显然，当市场完备时，(6) 式即为通常的资本资产定价模型，只不过我们在这里用 1 来表示无风险资产的未来收益。下面我们来证明 (6) 式成立。对于特定的投资组合收益 $e=(1,1,\cdots,1),\xi(z)$ 我们可以证明 $(Cov(e,\xi(z)),Ee)=(0,1),(Var(\xi(z)),E\xi(z))$ 这两个点满足方程 (6)。因此，如果对于所有的投资组合收益 $\xi(r), q(r)=1, Cov(\xi(r),\xi(z))$ 与 $E(\xi(r))$ 之间存在一个线性关系，则 (6) 成立（我们始终假定 $Var(\xi(z))>0$）。由定义，$1=q(\xi(r))=(\mu_i*\xi(r))/(\mu_i*\xi(e))$, 而显然有 $a*b=Cov(a,b)+Ea\cdot Eb$, 从而有

$$\mu_i*\xi(r)=Cov(\xi(r),\mu_i)+E\mu_i\cdot E\xi(r)。$$

由边际效用的定义，存在常数 κ,δ 使得 $\mu_i=\kappa_i e+\delta_i\xi(z)$. 从而我们得到

$$\mu_i*\xi(r)=\kappa_i Cov(\xi(r),\xi(z))+E\mu_i E\xi(r).$$

由此易知 (6) 式成立，因为若取常数 $\mu_i\ e,\kappa_i,E\mu_i$, 则 $Cov(\xi(r),\xi(z)),E\xi(r)$ 之间存在线性关系。

现在我们给出相应的投资基金定理。我们的结论是，如果内部均衡存在，并且上面的假设成立。$x_i=e_i+R\theta_i^*$, $z=\sum_{i=1}^{I}e_i+R\theta^*$，则必存在常数 a_i, b_i 使得

$$x_i=a_ie+b_iz,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ I. \tag{9}$$

参考文献

1. D. Duffie, Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, 1993.
2. G. Debreu, Theory of Value, Yale Univesrity, 1959.
3. M. Merton, Consintue Time Finance Theory, Blakwell, 1992.
4. G. Duffie, Security Markets——Stochastic Models, Academic Press, 1988.
5. J. Geanakoplos, An introduction to genearl equilibrium with incopmlete asset markets, J. of Math. Econo., 19, 1−38 (1990).

Capital Asset Pricing Model In Incomplete Financial Asset Markets

Wang Zhihua

(Department of Finance, Shandong Economics Institute,)

Zhu Jiang

(Department of Mathematics, Xuzhou Teachers' University)

Abstract In this paper, we consider capital asset pricing model in a framwork of incomplete asset markets, an extension of CAPM and a mutel−fund theorem are proved.

Key Words Financial asset, incomplete market, equilibrium CAPM, mutal−fund theorem