文章编号：1001-506X(2010)09-1911-04

基于模糊随机概率的电子产品寿命分析方法

郑光宇[1]，胡昌华[1]，张 伟[2]

（1. 第二炮兵工程学院302教研室，陕西 西安 710025；
2. 西安电子科技大学智能信息处理研究所，陕西 西安 710071）

摘 要：电子产品失效过程是一种兼有随机性和模糊性的模糊随机现象，电子产品的寿命应为一个模糊随机变量。应用模糊随机概率的相关理论，对传统随机概率寿命分析进行改进，建立了一种模糊随机概率寿命分布函数，并且根据寿命的特点提出了选择模糊变量隶属函数的标准。在此基础上，研究了产品失效的可能性分布，以确定产品在某一时刻可能失效的可能性大小。通过实例分析对比，新的寿命分布函数能够反映出更多的寿命信息，且表达更为直观具体，所建立的可能性分布能够真实地反映实际产品失效的可能性大小。

关键词：模糊随机概率；寿命分布函数；模糊事件；隶属函数；可能性分布

中图分类号：TN 911 **文献标志码**：A **DOI**：10.3969/j.issn.1001-506X.2010.09.27

Life analysis method of electronic products based on fuzzy random probability

ZHENG Guang-yu[1], HU Chang-hua[1], ZHANG Wei[2]

(*1. 302 Unit, The Second Artillery Engineering Inst., Xi'an 710025, China;*
2. Inst. of Intelligent Information Processing, Xidian Univ., Xi'an 710071, China)

Abstract: In view of the process of failure is a fuzzy random phenomenon including randomness and fuzziness concurrently, the life of electronic products would be a fuzzy random variable. Applying the theory of fuzzy random probability, the conventional random probability analysis method is improved, a new fuzzy random probability life distribution function is established, and a criterion of choosing the membership function of the fuzzy variable is introduced according to the life's characteristic. Then, the possibility distribution of the failure is studied so as to confirm the possibility that the product will fail at a certain time. By analyzing the example, it is found that the new fuzzy random probability life distribution function can provide more life information intuitionisticly and concretely than the conventional one, and the established possibility distribution can reflect the level of the possibility that the product will fail factually.

Keywords: fuzzy random probability; life distribution function; fuzzy affair; membership function; possibility distribution

0 引 言

传统的寿命分析认为电子产品失效是一种随机现象，将电子产品的寿命视为随机变量来处理，采用概率论理论来计算电子产品在t时刻失效的随机概率。事实上，除随机因素外，电子产品在失效过程中会受到诸多模糊因素的影响，例如失效判据的模糊性、突发事件的不确定性以及人主观意识的差异等。在对寿命试验数据进行统计分析时，不仅要研究随机性对寿命的影响，还应当考虑模糊性的作用。文中将寿命T视为模糊随机变量，应用模糊随机概率的相关理论对寿命分布进行研究和改善。

1978年，Kakerneak在国际上最先提出了模糊随机变量的概念[1-2]，随后，Puri等人又提出了模糊随机变量数学期望的概念[3]，国内也有大量学者对此进行了卓有成效的研究[4-7]，尤其是王光远等人研究了在有界闭模糊数空间中取值的模糊随机过程[6]，并对模糊随机理论作了系统地概括[7]。1995年，李云贵等人基于模糊随机概率建立了结构件的可靠度分析模型[8]，但是在寿命分析中应用模糊随机概率的相关文献却较少，本文在模糊随机概率的理论基础上，提出了一种同时考虑寿命随机性和模糊性的模糊随机概率寿命分布函数，并且在此基础上研究了失效的可能性分布。

收稿日期：2008－03－24；**修回日期**：2010－02－21。

基金项目：国家自然科学基金(60736026)资助课题

作者简介：郑光宇(1984－)，男，主要研究方向为可能性理论、可靠性分析等。E-mail:zgyfrank@126.com

1 失效的模糊随机概率密度函数

1.1 模糊概率

在客观世界和现实生活中，事物在质的表现上具有确定性和不确定性之分，而不确定性又可分为随机性、模糊性以及模糊随机性，即既涉及模糊性，也涉及随机性的现象。根据传统寿命分析的观点，电子产品的失效是随机的，然而这个观点对电子产品的失效过程反映并不全面，失效是一个渐变的过程，从正常到故障之间并没有明确的界限，更多取决于人的主观意识，而这种意识具有很大模糊性。因此，笔者认为电子产品的失效是一类典型的既具有模糊性又具有随机性的模糊随机事件。

设 Ω 为样本空间，则 Ω 上任一模糊集 A 称为一个模糊事件，若该事件还具有随机性，则为模糊随机事件。模糊随机概率问题通常有 3 类：模糊事件—精确概率、清晰事件—模糊概率、模糊事件—模糊概率。文中根据研究的实际情况，即事先无法确定产品失效的准确时间，而又期望获得在某一个大概时间段内产品失效的精确概率值，采用第一类模糊随机概率来分析寿命分布。

假设 A 为论域 U 上的模糊事件，Ω 为模糊随机试验 E 的样本空间，而 $\mu_A(u)$ 和 $f(u)$ 是实数域上的可积函数，则模糊事件 A 的概率为

$$P(A)=\int_{\Omega}\mu_A(u)f(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

式中，$f(u)$ 是变量 u 的概率密度函数；$\mu_A(u)$ 是模糊事件 A 的隶属函数。

若论域 U 是有限集，$U=\{u_i|i=1,2,\cdots,n\}$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)f(u_i) \tag{2}$$

1.2 失效事件的模糊随机概率密度

在传统的寿命分析中，认为电子产品失效是一类随机事件。在概率论基础上，仅考虑产品失效的随机性，其寿命分布函数为

$$F(t)=P(T<t)=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u \tag{3}$$

式中，$f(u)$ 为产品的失效密度函数。

然而，在实际情况中，电子产品在失效过程中还会受到许多模糊因素的影响，诸如产品自身设计的可靠性、失效判据的模糊性、突发事件的不确定性以及人主观意识的差异等，这些因素主要来源于人为的主观意识，它们对产品的影响程度以及变化规律等都无法预知，也是不可能准确测量的。因此，电子产品的失效不仅是一个简单的随机事件，还受到许多模糊因素的影响，在分析电子产品的寿命分布时，必须考虑其模糊性。

以寿命为研究对象，电子产品的失效是一类模糊随机事件，为分析方便，定义模糊事件 $A=\{$产品在 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻失效$\}$，其隶属函数为 $\mu_A(u)$。这里 $\underset{\sim}{t_0}$ 为区间数，表示在 t_0 时刻左右，反映的是失效的模糊性。此时，产品失效的模糊随机概率密度函数为

$$f(\underset{\sim}{t_0})=\int_{\underset{\sim}{t_0}}f(u)\mu_A(u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

式(4)是建立在寿命 T 为模糊随机变量的基础上的，$f(u)$ 体现的是寿命的随机性，反映了客观规律对失效过程的作用，而 $\mu_A(u)$ 体现的则是模糊性，反映了主观因素对失效过程的影响。式(4)的积分域与区间数 $\underset{\sim}{t_0}$ 的上下限相对应。值得注意的是，$f(\underset{\sim}{t_0})$ 计算的是 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻的失效概率，是一种概率密度函数，与概率论中的 $f(t)$ 相对应，文中与概率论分布函数 $F(t)$ 相对应的是可能性分布函数，将在下文中进行研究。

由式(4)可知，只要已知失效密度函数 $f(u)$ 和隶属函数 $\mu_A(u)$ 的具体形式或表达式，就可以求解模糊事件 A 的概率。其中，$f(u)$ 可以通过传统的概率统计和概率分析得到，比较简单，因此 $\mu_A(u)$ 的选择和确定就成为能够对寿命进行定量分析的关键。

1.3 失效事件隶属函数的确定

隶属函数是模糊事件 A 最直观的表达形式，也是对寿命进行定量分析的关键。能否确定事件的隶属函数，将直接影响到建立寿命分布函数的成功与否，而能否确定一个合理的隶属函数，也将直接影响到该函数分析精度的大小。

目前，常见的模糊分布的隶属函数类型主要有矩形分布、尖 Γ-分布、正态分布、柯西分布、梯形分布、岭形分布、三角形分布、S 型分布、Z 型分布、π 型分布等[10]。需要根据寿命的实际情况，选择合理的隶属函数。模糊事件 A 的隶属函数 $\mu_A(u)$ 应当满足以下条件：

(1) 当 $t=t_0$ 时，$\mu_A(t)=1$，即寿命集合 T 的核 $\ker T=\{t_0\}$；

(2) 当 $t<t_0$ 时，$\mu_A(t)$ 为单调递增函数，$\mu_A(t)<1$ 且 $\mu_A(t|t\ll t_0)=0$；

(3) 当 $t>t_0$ 时，$\mu_A(t)$ 为单调递减函数，$\mu_A(t)<1$ 且 $\mu_A(t|t\gg t_0)=0$。

上述条件确立了选择隶属函数的标准，从形式上有多种隶属函数均满足此标准，如尖 Γ-分布、正态分布、柯西分布、梯形分布、三角形分布等，在应用中可以根据研究问题的实际情况进行选择。由于失效时间 $\underset{\sim}{t_0}$ 是一个区间数，且 t_0 时刻的隶属度为 1，区间外任意时刻的隶属度均为 0，同时考虑到计算量的大小，本文采用的是三角形分布隶属函数。

2 失效的可能性分布

前面探讨了模糊事件 $A=\{$产品在 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻失效$\}$ 的概率表达，只要给定 $\underset{\sim}{t_0}$ 就可以通过式(4)求出其概率值。然而，事件发生的概率大小并不等同于事件发生的可能性大小，也就是说，事件发生的概率大，并不等于其可能性就一定大，相反，发生的概率小也不等于其可能性就一定小。这是因为概率是建立在随机性数学基础上的，而随机性是针对事件的某种结果出现的机会而言的。由于条件不充分而导致各种可能的结果，即随机性事件总的结果是确定的，只是其中某一种结果发生的概率不确定；而可能性是建立在

模糊性数学基础上的,模糊性是指存在于现实中的不分明现象,其间找不到明确的边界,即模糊时间能否产生结果、能产生什么样的结果都是不确定的[11]。

但是,作为同样研究不确定性的两种数学基础,随机性与模糊性也有很多相似以及深刻的联系。事件发生的概率经过一系列的转化就可以得到事件发生的可能性分布。

用 $\pi(\underset{\sim}{t_0})$ 来表示在 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻失效事件发生的可能性,此处 $\underset{\sim}{t_0}$ 仍为区间数,表示 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻左右。根据模糊统计的原理,定义 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻之前所有失效产品数与产品总数的比值为 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻产品失效的可能性,表示为

$$\pi(\underset{\sim}{t_0}) = \frac{n}{N} \tag{5}$$

式中,n 表示 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻之前所有失效产品数;N 表示产品总数。由于 $\underset{\sim}{t_0}$ 是一个区间数,而 n 的确定需要一个准确的时间点,从理论上讲,$\underset{\sim}{t_0}$ 内任意时间点均可,可根据实际情况作出选择,本文选择的是 $\underset{\sim}{t_0}$ 的中心时刻 t_0。

将产品的失效数据按照等时间间隔进行分组,每组时间间隔为 Δt,假设共有 m 组,而 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻之前有 m_1 组,则

$$\pi(\underset{\sim}{t_0}) = \frac{n}{N} = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} p(\Delta t_i)\cdot N}{\sum_{i=0}^{m} p(\Delta t_i)\cdot N} = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} p(\Delta t_i)}{\sum_{i=0}^{m} p(\Delta t_i)} \tag{6}$$

式中,$p(\Delta t_i)$ 为第 i 组在 Δt 时间内失效的模糊随机概率密度。这里,Δt 是一个时间区间,符合式(4)的定义要求,因此,$p(\Delta t_i)$ 可通过式(4)求得。

当 Δt 越来越小,逐渐趋于 0 时,就可以求得 $p(t)$ 为连续函数时的可能性分布,有

$$\pi(\underset{\sim}{t_0}) = \frac{\lim\limits_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{m_1} p(\Delta t_i)\cdot N}{\lim\limits_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{m} p(\Delta t_i)\cdot N} = \frac{\lim\limits_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{m_1} p(\Delta t_i)}{\lim\limits_{\Delta t_i\to 0}\sum_{i=0}^{m} p(\Delta t_i)} = \frac{\int_0^{t_0} p(t)\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} p(t)\mathrm{d}t} \tag{7}$$

通过式(6)和式(7)就可以求出产品在 $\underset{\sim}{t_0}$ 失效的可能性大小。由式(6)、式(7)可知,随着时间的增长,产品失效的可能性越来越大,并且最终达到 1,即完全失效,这与实际情况是一致的。

3　实例分析

以某电子元件的寿命为例,在正常贮存条件下测得 50 个该元件的寿命分别为(单位:h):30,12,62,81,102,27,71,121,33,228,65,84,26,24,170,138,46,23,48,87,110,138,78,259,114,26,162,61,39,43,186,87,52,30,54,95,118,149,36,37,45,213,77,68,103,155,19,80,196,27。

分析以上数据可知,其寿命服从参数为 λ 的指数分布,且平均寿命为 85 h,即 $\lambda=1/85$,则寿命的概率密度函数为

$$f(t) = \lambda\exp(-\lambda t) = \frac{1}{85}\cdot\exp\left(-\frac{t}{85}\right) \tag{8}$$

根据隶属函数的选择条件和实际情况,并且考虑到计算量的大小,选取三角形隶属函数作为模糊事件 A 的隶属函数模型,令其左、右展形均为 $\frac{1}{4}t_0$,$\underset{\sim}{t_0}=\left[\frac{3}{4}t_0,\frac{5}{4}t_0\right]$,则

$$\mu_A(t) = \begin{cases} \dfrac{4t-3t_0}{t_0},\ \dfrac{3}{4}t_0 < t \leqslant t_0 \\ \dfrac{5t_0-4t}{t_0},\ t_0 \leqslant t < \dfrac{5}{4}t_0 \\ 0,\ t \leqslant \dfrac{3}{4}t_0 \text{ 或 } t \geqslant \dfrac{5}{4}t_0 \end{cases} \tag{9}$$

将式(8)和式(9)代入式(4)中即可得产品在 $\underset{\sim}{t_0}$ 时刻失效的模糊随机概率函数,即

$$f(\underset{\sim}{t_0}) = \int_{\frac{3}{4}t_0}^{t_0} \lambda\exp(-\lambda t)\cdot\left(\frac{4t-3t_0}{t_0}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{\frac{5}{4}t_0} \lambda\exp(-\lambda t)\cdot\left(\frac{5t_0-4t}{t_0}\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{\lambda t_0}\cdot \left[\exp\left(-\frac{3}{4}\lambda t_0\right)+\exp\left(-\frac{5}{4}\lambda t_0\right)-2\exp(-\lambda t_0)\right] \tag{10}$$

通过式(10),可以对任意的 $\underset{\sim}{t_0}$ 计算出概率值。例如 $\underset{\sim}{t_0}=[45,75]$ 时,$t_0=60$,$f(\underset{\sim}{t_0})=0.087$。图 1 为相同条件下传统的概率密度函数和模糊随机概率函数的曲线对比图。

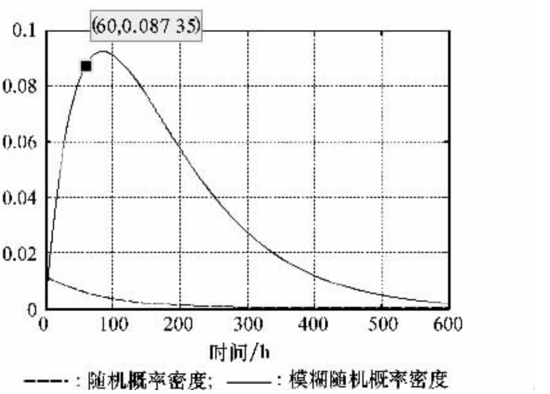

图 1　概率密度函数、模糊随机概率函数曲线图

由图 1 可知:

(1) 模糊随机概率曲线在时间区间[84.7 h,87.1 h]内出现了一个峰值,也就是说产品在这一时间区间内失效的概率最大。在传统的概率分析中,产品的平均寿命为 85 h,这个时间也在该时间区间内,说明在反映产品最大失效概率的时间信息上,模糊随机概率分布函数和概率分布函数是一致的。

(2) 模糊随机概率曲线在到达峰值之前上升趋势很快,说明产品的前期失效密度很大;而过了峰值之后下降趋势慢慢减小,说明随着时间的增长,产品的失效密度越来越小。这与概率密度函数所表达的信息是一致的,与实际情况也是相符合的。

(3) 概率密度曲线只是一条平滑的递减曲线,从直观上仅能反映产品在单位时间内失效的概率以及这个概率的变化趋势;而模糊随机概率函数曲线不仅能反映产品失效概率的变化趋势,还反映了产品最大失效概率值和失效时

刻，以及产品失效密度的变化规律。这就说明模糊随机概率函数能够直观地反映更多的寿命分析的信息，这也是模糊随机概率函数的优势所在。

(4) 模糊随机概率在数值上要比传统概率大得多，因为二者的约束条件有所不同，概率密度函数必须满足 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$。由于模糊随机概率引入了模糊信息的隶属函数，因而不再满足该条件。这种概率值上的差异并不影响寿命分析的结果。

上面分析了该电子产品失效的模糊随机概率和概率之间的联系和差异，从中可以看出模糊随机概率函数在寿命分析中的正确性和优越性。为了能够更进一步地反映产品失效的变化趋势，由式(7)和式(10)可以得到产品失效的可能性分布函数

$$\pi(\underset{\sim}{t}_0) = \frac{\int_0^{t_0} \frac{4}{\lambda t} \cdot \left[\exp\left(-\frac{3}{4}\lambda t\right) + \exp\left(-\frac{5}{4}\lambda t\right) - 2\exp(-\lambda t)\right]\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} \frac{4}{\lambda t} \cdot \left[\exp\left(-\frac{3}{4}\lambda t\right) + \exp\left(-\frac{5}{4}\lambda t\right) - 2\exp(-\lambda t)\right]\mathrm{d}t} \tag{11}$$

通过式(11)就可以确定产品在某一时刻失效的可能性大小。例如 $\underset{\sim}{t}_0 = [45, 75]$ 时，$\pi(\underset{\sim}{t}_0) = 0.153$，就意味着在[45 h, 75 h]这一时间区间内产品有 15.3% 的可能失效。图 2 给出了概率分布函数和可能性分布函数的曲线对比。从图中可以看出，可能性分布反映了该电子元件失效的趋势，随着时间的增长，产品失效的可能性越来越大，到 600 h 左右接近于 1，与实际测量的数据相符。

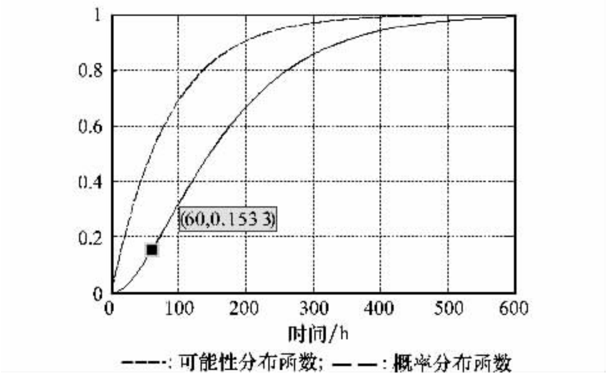

图 2　概率分布函数、可能性分布函数曲线图

对图 2 进行分析可以得知，在 0 时刻可能性分布函数曲线的斜率远远小于概率分布函数曲线的斜率，也就是说，可能性分布认为在 0 时刻左右产品失效的可能性是很小的，这与实际情况更加吻合。

4　结　论

本文研究了模糊性对电子产品寿命的影响，应用第一类模糊随机概率改善了原有的寿命分布函数，建立了一种模糊随机概率寿命分布函数，该函数能够有效地帮助人们在不确定产品失效时间时对产品的寿命进行分析和预测。通过实例分析，该函数不仅能够求出模糊时间下产品失效的精确概率，而且与原来的寿命分布函数相比，还能更为直接、具体地反映最大失效概率、失效时刻以及失效密度变化规律等信息。在此基础上，建立了产品失效的可能性分布函数，该函数能够直观地反映出产品在某一时刻失效的可能性大小，与概率分布相比，能够更真实地反映产品随时间增长的失效趋势。

参考文献：

[1] Kwakerneak H. Fuzzy random variables I[J]. *Information Science*, 1978, 15: 1-29.

[2] Kwakerneak H. Fuzzy random variables II[J]. *Information Science*, 1979, 17: 253-278.

[3] Puri M L, Ralesca D A. Fuzzy random variables[J]. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 1986,114:409-422.

[4] 张继国，张文修．模糊随机变量及其概率分布[J]．模糊系统与数学，1996, 10(4): 76-82.

[5] 吕恩琳，钟佑明．模糊密度随机变量的数学描述[J]．应用数学和力学，2000, 21(8): 861-869.

[6] Wang G, Zhang Y. Theory of fuzzy stochastic processes[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 51: 161-178.

[7] 张跃，王光远．模糊随机动力系统理论[M]．北京：科学出版社，1993.

[8] 李云贵，赵国藩．基于模糊随机概率理论的可靠度分析模型[J]．大连理工大学学报，1995, 35(4): 528-531.

[9] 陈水利，李敬功，王向公．模糊集理论及其应用[M]．北京：科学出版社，2005.

[10] 杨纶标，高英仪．模糊数学原理及应[M]．广州：华南理工大学出版社，2005.

[11] Zadeh L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(1):3-28