第 32 卷 第 7 期 系统工程与电子技术 Vol. 32 No. 7
2010 年 7 月 Systems Engineering and Electronics July 2010

文章编号:1001-506X(2010)07-1430-07

具有 Choquet 积分形式的模糊合作对策

孟凡永, 张 强
(北京理工大学管理与经济学院, 北京 100081)

摘 要: 结合模糊数的限制运算,探讨了一类具有模糊支付的模糊合作对策——Choquet 积分形式的模糊合作对策,研究了其单调性和连续性。具有模糊支付的模糊合作对策是凸模糊合作对策时,研究了 Choquet 积分形式的模糊合作对策的模糊核心和模糊 Shapley 值,并探讨了两者之间的关系,有趣的是这种关系与经典情形相一致。需要指出的是,所给有关模糊合作对策的定义都是对经典情形的推广。最后通过一个算例来说明其应用。

关键词: 模糊数; 模糊合作对策; Choquet 积分; Shapley 值
中图分类号: O 225 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-506X.2010.07.019

Fuzzy cooperative games with Choquet integral form

MENG Fan-yong, ZHANG Qiang
(*School of Management and Economics, Beijing Inst. of Technology, Beijing 100081, China*)

Abstract: A class of fuzzy cooperative games with fuzzy payoffs-fuzzy cooperative games with Choquet integral form is proposed, which combines the fuzzy numbers limited operations. Its monotonicity and continuity are studied. This paper discusses this kind of fuzzy cooperative games' fuzzy core and fuzzy Shapley value when the fuzzy cooperative games with fuzzy payoffs are fuzzy convex. At the same time, this paper studies the relation between fuzzy core and fuzzy Shapley value of the fuzzy cooperative games with Choquet integral form, which is coincide with the classical case. It need to be pointed that all the definitions about fuzzy cooperative games are the extension for the classical case. Finally, a numerical example is given to illustrate its application.

Keywords: fuzzy numbers; fuzzy cooperative games; Choquet integral; Shapley values

0 引 言

由于现实生活的复杂性和不确定性,人们在参与合作时,通常不会把自己所拥有的某一资源全部投入到一个合作中,而是部分的参与。有些情形下,人们参与合作所得的支付是不确定的即模糊的。人们称此类合作对策为模糊合作对策。模糊合作对策大体可分为三类:具有模糊联盟的合作对策、具有模糊支付的合作对策和具有模糊支付与模糊联盟的合作对策(简称为:具有模糊支付的模糊合作对策)。其中,研究较多的是具有模糊联盟的合作对策,Aubin[2] 第一次提出具有模糊联盟的合作对策概念以来,许多专家学者对此进行了深入研究,文献[3-5]对此类合作对策的核心进行了探讨;文献[6]研究了此类合作对策的字典序解;对具有模糊支付的合作对策的研究学者主要有 Nishizaki[7-8]、Mares[9]、Vijay[10]等。

文献[11]提出用 Shapley 值作为合作对策中局中人所得支付的解的概念以来,由于其具有良好的性质,得到广泛的应用和深入的研究[12-15]。目前关于Shapley值的探讨主要集中在两类合作对策上:经典合作对策和具有模糊联盟的合作对策,当局中人部分的参与合作时,由于支付值与组成模糊联盟的局中人以及他们的参与水平有关,对不同的合作对策这种关系很可能不同,如文献[12-14]。目前关于 Shapley 函数在具有模糊支付的模糊合作对策上的研究还很少。

为此,我们在前人研究成果的基础上,结合文献[1]提出的关于模糊数的限制运算,探讨了一类具有模糊支付和 Choquet 积分形式的模糊合作对策,通过推广文献[14]中关于模糊人口单调分配体制的定义和经典Shapley函数的定义,给出具有模糊支付的模糊人口单调分配体制的定义和具有模糊支付的模糊合作对策 Shapley 函数的定义。当具有模糊支付的合作对策是凸模糊合作对策时,研究了具有模糊支付和 Choquet 积分形式的模糊合作对策的模糊分配、具有模糊支付的模糊人口单调分配体制、模糊 Shapley 函数和模糊核心等。通过本文读者可以发现,文献[14]中

收稿日期: 2009-05-26; **修回日期:** 2009-08-02。
基金项目: 国家自然科学基金(70471063,70771010);"985"工程二期(107008200400024)资助课题
作者简介: 孟凡永(1981-),男,博士,主要研究方向为模糊数学、模糊决策、模糊对策。E-mail:mengfanyongtjie@163.com

关于模糊合作对策的研究是本文的一种特例。

1　预备知识

1.1　模糊数的限制运算和序关系

实数全体记为 $\mathbf{R}$，正实数全体记为 $\mathbf{R}_+$；$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}_+$ 上的模糊数的全体分别记为 $\tilde{R}$ 和 $\tilde{R}_+$；R 和 R_+ 上的 n 维模糊向量分别记为 $\tilde{\boldsymbol{R}}^n$ 和 $\tilde{\boldsymbol{R}}^n_+$。没有特别说明，本文所讨论的模糊数均指正模糊数。

定义 1　对任意的两个模糊数 $\tilde{a}$，$\tilde{b}$，给出它们之间的序关系如下：

(1) $\tilde{a}>\tilde{b}\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，$a_\alpha^l>b_\alpha^l$，$a_\alpha^u>b_\alpha^u$；

(2) $\tilde{a}\geqslant\tilde{b}\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，

$$\begin{cases}a_\alpha^l\geqslant b_\alpha^l,a_\alpha^u\geqslant b_\alpha^u\\a_\alpha^l\geqslant b_\alpha^l,a_\alpha^u<b_\alpha^u,(a_\alpha^l+a_\alpha^u)/2\geqslant(b_\alpha^l+b_\alpha^u)/2\\a_\alpha^l<b_\alpha^l,a_\alpha^u\geqslant b_\alpha^u,(a_\alpha^l+a_\alpha^u)/2\geqslant(b_\alpha^l+b_\alpha^u)/2\end{cases}$$

(3) $\tilde{a}=\tilde{b}\Leftrightarrow\forall\alpha\in[0,1]$，$a_\alpha^l=b_\alpha^l$，$a_\alpha^u=b_\alpha^u$。

定义 2[1]　设 E 是实数 $\mathbf{R}$ 上的模糊集，如果其隶属函数 $E(x)$ 满足下述性质：(1) $E(0)=1$；(2) 在 $[-1,0)$ 上 $E(x)$ 单增右连续，在 $(0,1]$ 上单降左连续；(3) 对任意的 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$，有 $E(x)=0$，则称 E 为模糊结构元。

定义 3[1]　若模糊结构元 E 满足：(1) 对任意的 $x\in(-1,1)$，有 $E(x)>0$；(2) 在 $[-1,0)$ 上 $E(x)$ 连续且严格单增，在 $(0,1]$ 上连续且严格单降，则称 E 为正则模糊结构元。

定理 1[1]　对给定的正则模糊结构元 E 和任意的有界闭模糊数 $\tilde{A}$，总存在一个 $[-1,1]$ 上的单调函数 f，使得 $\tilde{A}=f(E)$。

在本文中，我们采用模糊数的结构元运算，对任意的两个有界闭模糊数 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，其运算如下[1]

$$\tilde{A}*\tilde{B}=f(E)*g(E)$$

式中，$*\in\{-,+,\times,\div,\vee,\wedge\}$，$\tilde{A}=f(E)$ 和 $\tilde{B}=g(E)$。

$$c\cdot\tilde{A}=c\cdot f(E),\ c\in R$$

对模糊数的上述运算具有如下性质：

(1) 若 $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{C}$，则有 $\tilde{A}=\tilde{C}-\tilde{B}$ 和 $\tilde{B}=\tilde{C}-\tilde{A}$，特别的 $\tilde{A}-\tilde{A}=0$；

(2) $\tilde{A}\cdot\tilde{A}=\tilde{A}^2$。

1.2　模糊合作对策的基本概念

记局中人集合为 N，N 中的所有清晰联盟和模糊联盟分别记为 $P(N)$ 和 $L(N)$。对 $P(N)$ 中的清晰联盟记为 S_0，T_0，…，它们的基数分别表示为 $s,t,\cdots$，$L(N)$ 中的模糊联盟记为 $S,T,\cdots$。对任意的 $i\in N$ 和 $S\in L(N)$，记 $S(i)$ 为局中人 i 在模糊联盟 S 中的隶属度。将 $S_0\cup\{i\}$，$S\cup\{U(i)\}$ 分别简记为 $S_0\cup i$，$S\cup U(i)$，其中 $S\cup U(i)$ 表示局中人 i 以参与水平 $U(i)$ 加入模糊联盟 S。任意的模糊联盟 $S\in L(N)$，其支集记为 $SuppS=\{i\in N|S(i)>0\}$。对任意 $h\in[0,1]$，记 $[S]_h=\{i\in N|S(i)\geqslant h\}$ 为模糊联盟 S 的 h 水平集。若函数 $\tilde{v}:P(N)\to\tilde{R}_+$ 满足 $\tilde{v}(\varnothing)=0$，则称 $\tilde{v}$ 为 $P(N)$ 上的具有模糊支付的合作对策，其全体记为 $\tilde{G}_0(N)$。若函数 $\tilde{v}:L(N)\to\tilde{R}_+$ 满足 $\tilde{v}(\varnothing)=0$，则称 $\tilde{v}$ 为 $L(N)$ 上的具有模糊支付的模糊合作对策，其全体记为 $\tilde{G}(N)$。$w(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的单调增函数，满足 $w(x)=0$ 当且仅当 $x=0$，$w(1)=1$。

两个模糊集并、交运算定义为

$$(S\cup T)(i)=\max\{S(i),T(i)\},\ \forall i\in N$$
$$(S\cap T)(i)=\min\{S(i),T(i)\},\ \forall i\in N$$

定义 4　对 $\tilde{v}\in\tilde{G}(N)$，若满足

$$\tilde{v}(S\cup T)-\tilde{v}(T)\geqslant\tilde{v}(S)\ \forall S,$$
$$T\in L(N)\ SuppS\cap SuppT=\varnothing$$

则称 $\tilde{v}$ 为模糊超可加的。

定义 5　对 $\tilde{v}\in\tilde{G}(N)$，若满足

$$\tilde{v}(S\cup T)-\tilde{v}(T)\geqslant\tilde{v}(S)-\tilde{v}(S\cap T)\ \forall S,T\in L(N)$$

则称 $\tilde{v}$ 为模糊凸的。

定义 6[14]　函数 $\tilde{\boldsymbol{x}}:L(N)\to\tilde{\boldsymbol{R}}^n_+$ 称为模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}(N)$ 的一个模糊分配，若 $\tilde{x}$ 对 $\forall U\in L(N)$ 满足：

(1) $\tilde{x}_i(U)=0\ \forall i\notin SuppU$；

(2) $\sum\limits_{i\in SuppU}\tilde{x}_i(U)=\tilde{v}(U)$；

(3) $\tilde{x}_i(U)\geqslant U(i)\cdot\tilde{v}(i)$，$\forall i\in SuppU$；

其中，$\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{U})=(\tilde{\boldsymbol{x}}_1(\boldsymbol{U}),\tilde{\boldsymbol{x}}_2(\boldsymbol{U}),\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n(\boldsymbol{U}))$，$\tilde{v}$ 上模糊分配的全体记为 $FI(\tilde{v})$。

定义 7　对 $\forall\tilde{x},\tilde{y}\in FI(\tilde{v})$ 和 $\forall R\in L(N)$，称模糊分配 $\tilde{x}$ 通过 R 模糊优超 $\tilde{y}$，若其满足

$$\begin{cases}\tilde{x}_i>\tilde{y}_i,\ \forall i\in SuppR\\\tilde{v}(R)\geqslant\sum\limits_{i\in SuppR}\tilde{x}_i\end{cases}$$

记为 $\tilde{x}\succ_R\tilde{y}$。

定义 8　$FI(\tilde{v})$ 上不被模糊优超的模糊分配的全体组成的集合称为 $\tilde{v}$ 关于 $\tilde{G}(N)$ 的模糊核心，其全体记为 $FC(\tilde{v})$。

定义 9　模糊联盟 $T\in L(N)$，称为模糊合作对策 $\tilde{v}$ 关于 $\tilde{G}(N)$ 的一个模糊支撑，若 T 满足

$$\tilde{v}(S\cap T)=\tilde{v}(S),\ \forall S\in L(N)$$

其全体记为 $FS(\tilde{v})$。

定义 10　模糊向量 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{\boldsymbol{x}}_i(\boldsymbol{U}))_{i\in Supp\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\in L(N)}$ 称为一个具有模糊支付的模糊人口单调分配体制，若 $\tilde{x}$ 满足如下条件

$$\begin{cases}\sum\limits_{i\in SuppU}\tilde{x}_i(U)=\tilde{v}(U),\ \forall U\in L(N)\\\tilde{x}_i(S)\leqslant\tilde{x}_i(T)\ \forall i\in SuppS,S,T\in L(N),\ S\subseteq T\end{cases}$$

说明　同理可以给出模糊对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_0(N)$ 的上述定

义，本文不再具体列出。

1.3 具有模糊支付的合作对策的模糊 Shapley 函数

定义 11 函数 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}: P(N)\to\tilde{\boldsymbol{R}}^n$ 称为模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_0(N)$ 上的一个模糊 Shapley 函数，若其满足如下三条公理：

公理 1 （模糊有效性） 对 $\tilde{G}_0(N)$ 上的任意支撑 T_0，有 $\sum\limits_{i\in T_0}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})=\tilde{v}(T_0)$；

公理 2 （模糊对称性） 对 $\forall S_0\in P(N)$ 满足 $i,j\notin S_0$，若 $\tilde{v}(S_0\cup i)=\tilde{v}(S_0\cup j)$，则 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})=\tilde{\varphi}_j(\tilde{v})$；

公理 3 （模糊可加性） 对模糊合作对策 $\tilde{v}_1,\tilde{v}_2\in\tilde{G}_0(N)$，若存在模糊合作对策 $\tilde{v}_1+\tilde{v}_2\in\tilde{G}_0(N)$，对任意的 $S_0\in P(N)$，有 $(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(S_0)=\tilde{v}_2(S_0)+\tilde{v}_1(S_0)$，则对 $\forall i\in N$，有 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)=\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1)+\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_2)$。

定理 2 对于给定的模糊函数 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}: P(N)\to\tilde{\boldsymbol{R}}^n$，定义为

$$\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})=\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}(\tilde{v}(T_0\cup i)-\tilde{v}(T_0))\quad \forall i\in N \tag{1}$$

则 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上关于 $\tilde{v}$ 的模糊 Shapley 函数。

证明 公理 1 设 T_0 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的任意支撑，对 $\forall i\in N$ 且 $i\notin T_0$ 和 $\forall S_0\in P(N)$，有 $\tilde{v}(S_0\cup i)=\tilde{v}(S_0)$ 成立，故 $\tilde{v}(T_0)=\tilde{v}(N\cap T_0)=\tilde{v}(N)=\sum\limits_{i\in N}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})=\sum\limits_{i\in T_0}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})$。

公理 2 若局中人 i 和 j，对 $\forall S_0\in P(N)$ 且 $i,j\notin S_0$，满足 $\tilde{v}(S_0\cup i)=\tilde{v}(S_0\cup j)$，则有 $\tilde{v}(S_0\cup i)-\tilde{v}(S_0)=\tilde{v}(S_0\cup j)-\tilde{v}(S_0)$ 成立，由式(1)得到：$\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})=\tilde{\varphi}_j(\tilde{v})$。

公理 3 对模糊合作对策 $\tilde{v}_1,\tilde{v}_2\in\tilde{G}_0(N)$，若存在模糊合作对策 $\tilde{v}_1+\tilde{v}_2\in\tilde{G}_0(N)$，对 $\forall S_0\in P(N)$，有 $(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(S_0)=\tilde{v}_2(S_0)+\tilde{v}_1(S_0)$，则对 $\forall i\in N$，有

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)&=\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}((\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(T_0\cup i)-(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(T_0))=\\
&\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}(\tilde{v}_1(T_0\cup i)+\tilde{v}_2(T_0\cup i)-[\tilde{v}_1(T_0)+\tilde{v}_2(T_0)])=\\
&\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}(\tilde{v}_1(T_0\cup i)+\tilde{v}_2(T_0\cup i)-\tilde{v}_1(T_0)-\tilde{v}_2(T_0))=\\
&\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}(\tilde{v}_1(T_0\cup i)-\tilde{v}_1(T_0)+\tilde{v}_2(T_0\cup i)-\tilde{v}_2(T_0))=\\
\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}&(\tilde{v}_1(T_0\cup i)-\tilde{v}_1(T_0))+\sum_{T_0\subseteq N\setminus i}\frac{t!(n-t-1)!}{n!}(\tilde{v}_2(T_0\cup i)-\tilde{v}_2(T_0))=\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1)+\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_2)
\end{aligned}$$

定理 3 若 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的凸模糊合作对策，则模糊向量 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{U}_0)=(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i(\tilde{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{U}_0))_{i\in U_0,U_0\in P(N)}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的一个模糊人口单调分配体制，即

(1) $\sum\limits_{i\in U_0}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(U_0)=\tilde{v}(U_0)$，$\forall U_0\in P(N)$；

(2) $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(S_0)\leqslant\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(T_0)$，$\forall i\in S_0$，$S_0,T_0\in P(N)$，$S_0\subseteq T_0$。

证明 由定理 2 知，条件(1)显然成立；下证，条件(2)成立。当 $S_0=T_0$ 时，结论显然成立；当 $S_0\neq T_0$ 时，由递推关系，只需证 $\forall i\in S_0\subseteq S_0\cup j=T_0$，$j\neq i$，有 $\tilde{\varphi}_i(S_0)\leqslant\tilde{\varphi}_i(T_0)$ 成立即可。

(1) 当 $s=1$ 时，得到 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(S_0=i)=\tilde{v}(i)$ 和 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(T_0=i\cup j)=\frac{1}{2}\tilde{v}(i)+\frac{1}{2}(\tilde{v}(i,j)-\tilde{v}(j))$，由 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的凸模糊合作对策，得到 $\tilde{v}(i,j)-\tilde{v}(j)\geqslant\tilde{v}(i)$，此时结论成立；

(2) 假设当 $s=m-1(2\leqslant m<n-2)$ 时结论成立，下证当 $s=m$ 时结论成立。

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(S_0)=&\frac{(m-1)!}{m!}\tilde{v}(i)+\frac{(m-2)!}{m!}\sum_{\substack{k\neq i,j\\ k\in S_0}}(\tilde{v}(i,k)-\tilde{v}(k))+\\
&\frac{2!(m-3)!}{m!}\sum_{\substack{k_1,k_2\neq i,j\\ k_1,k_2\in S_0}}(\tilde{v}(i,k_1,k_2)-\tilde{v}(k_1,k_2))+\cdots+\frac{(m-1)!}{m!}(\tilde{v}(S_0)-\tilde{v}(S_0\setminus i)),\\
\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(T_0=S_0\cup j)=&\frac{m!}{(m+1)!}\tilde{v}(i)+\frac{(m-1)!}{(m+1)!}\sum_{\substack{k\neq i,j\\ k\in S_0}}(\tilde{v}(i,k)-\tilde{v}(k))+\frac{(m-1)!}{(m+1)!}(\tilde{v}(i,j)-\tilde{v}(j))+\\
&\frac{2!(m-2)!}{(m+1)!}\sum_{\substack{k_1,k_2\neq i,j\\ k_1,k_2\in S_0}}(\tilde{v}(i,k_1,k_2)-\tilde{v}(k_1,k_2))+\frac{2!(m-2)!}{(m+1)!}\sum_{\substack{k\neq i,j\\ k\in S_0}}(\tilde{v}(i,j,k)-\tilde{v}(j,k))+\cdots+\\
&\frac{(m-1)!}{(m+1)!}\sum_{\substack{i\notin U_0,j\in U_0\subseteq T_0\\ u=m-1}}(\tilde{v}(U_0\cup i)-\tilde{v}(U_0))+\frac{(m-1)!}{(m+1)!}(\tilde{v}(S_0)-\tilde{v}(S_0\setminus i))+\frac{m!}{(m+1)!}(\tilde{v}(T_0)-\tilde{v}(S_0))
\end{aligned}$$

由 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的模糊凸合作对策，易知

$$\frac{m!}{(m+1)!}\tilde{v}(i)+\frac{(m-1)!}{(m+1)!}(\tilde{v}(i,j)-\tilde{v}(j))\geqslant\left(\frac{m!}{(m+1)!}+\frac{(m-1)!}{(m+1)!}\right)\tilde{v}(i)=\frac{(m-1)!}{m!}\tilde{v}(i),$$

$$\frac{(m-1)!}{(m+1)!}\sum_{\substack{k\neq i,j\\k\in S_0}}(\tilde{v}(i,k)-\tilde{v}(k))+\frac{2!(m-2)!}{(m+1)!}\sum_{\substack{k\neq i,j\\k\in S_0}}(\tilde{v}(i,j,k)-\tilde{v}(j,k))\geqslant$$

$$\left(\frac{(m-1)!}{(m+1)!}+\frac{2!(m-2)!}{(m+1)!}\right)\sum_{\substack{k\neq i,j\\k\in S_0}}(\tilde{v}(i,k)-\tilde{v}(k))=\frac{(m-2)!}{m!}\sum_{\substack{k\neq i,j\\k\in S_0}}(\tilde{v}(i,k)-\tilde{v}(k)),$$

$$\cdots$$

$$\frac{(m-1)!}{(m+1)!}(\tilde{v}(S_0)-\tilde{v}(S_0\backslash i))+\frac{m!}{(m+1)!}(\tilde{v}(T_0)-\tilde{v}(S_0))\geqslant$$

$$\left(\frac{(m-1)!}{(m+1)!}+\frac{m!}{(m+1)!}\right)(\tilde{v}(S_0)-\tilde{v}(S_0\backslash i))=\frac{(m-1)!}{m!}(\tilde{v}(S_0)-\tilde{v}(S_0\backslash i))$$

故当 $s=m$ 时，有 $\tilde{\varphi}_i(S_0)\leqslant\tilde{\varphi}_i(T_0)$，由数学归纳法知原命题成立。

2　具有模糊支付和 Choquet 积分形式的模糊合作对策

2.1　具有模糊支付和 Choquet 积分形式的模糊合作对策的提出和有关概念

定义 12　对模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}(N)$ 和 $\forall S\in L(N)$，若模糊联盟 S 的模糊支付可表示为

$$\tilde{v}(S)=\sum_{l=1}^{m(S)}\tilde{v}([S]_{k_l})(w(k_l)-w(k_{l-1}))\tag{2}$$

则称此模糊合作对策为具有 Choquet 积分形式的模糊合作对策，其中 $M(S)=\{S(i)\mid S(i)>0,i\in N\}$，$m(S)$ 是 $M(S)$ 的势指标，$0=k_0<k_1<\cdots<k_{m(S)}$，$\tilde{G}(N)$ 上具有 Choquet 积分形式的模糊合作对策的全体记为 $\tilde{G}_C(N)$。

说明　对 $\forall\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 和 $\forall S\in L(N)$，若 $M(S)\subseteq\{k_1,k_2,\cdots,k_q\}$，则 $\tilde{v}(S)=\sum\limits_{l=1}^{q}\tilde{v}([S]_{k_l})(w(k_l)-w(k_{l-1}))$，其中 $0=k_0\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_q\leqslant 1$。

由上面的讨论易知，$\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$ 上的凸(超可加)模糊合作对策当且仅当 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的凸(超可加)模糊合作对策。

定义 13　函数 $\tilde{\boldsymbol{x}}:L(N)\rightarrow\tilde{\boldsymbol{R}}^n_+$ 称为模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 上的一个模糊分配，若 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 对 $\forall U\in L(N)$ 满足：

(1) $\tilde{x}_i(U)=0$，$\forall i\notin SuppU$；

(2) $\sum\limits_{i\in SuppU}\tilde{x}_i(U)=\tilde{v}(U)$；

(3) $\tilde{x}_i(U)\geqslant w(U(i))\cdot\tilde{v}(i)$，$\forall i\in SuppU$；

其中 $\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{U})=(\tilde{\boldsymbol{x}}_1(\boldsymbol{U}),\tilde{x}_2(\boldsymbol{U}),\cdots,\tilde{\boldsymbol{x}}_n(\boldsymbol{U}))$。$\tilde{v}$ 上模糊分配的全体仍记为 $FI(\tilde{v})$。

在不引起混淆的情形下，$\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 上模糊支撑和模糊核心的全体仍分别记为 $FS(\tilde{v})$ 和 $FC(\tilde{v})$。

2.2　模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 的单调性和连续性

定理 4　若 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$ 上的凸模糊合作对策，则下式成立

$$\tilde{v}(S)\leqslant\tilde{v}(T),\ \forall S,T\in L(N),S\subseteq T$$

证明　$S\subseteq T$ 当且仅当对 $\forall h\in[0,1]$ 有 $[S]_h\subseteq[T]_h$，由 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$ 上的凸模糊合作对策知：$\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的凸模糊合作对策，故对 $\forall h\in[0,1]$ 有 $\tilde{v}([S]_h)\leqslant\tilde{v}([T]_h)$，又

$$\tilde{v}(S)=\sum_{l=1}^{m(T)}\tilde{v}([S]_{k_l})(w(k_l)-w(k_{l-1})),$$

$$\tilde{v}(T)=\sum_{l=1}^{m(T)}\tilde{v}([T]_{k_l})(w(k_l)-w(k_{l-1}))$$

式中，$M(T)=\{T(i)\mid T(i)>0,i\in N\}$，$m(T)$ 是 $M(T)$ 的势指标，故原命题成立。

定理 5　对 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 和 $\forall S,T\in L(N)$，定义 $L(N)$ 上的距离 d 为 $d(S,T)=\max\limits_{i\in N}|S(i)-T(i)|$。若 $w(x)$ 是连续的，则 $\tilde{v}$ 关于 d 是连续的。

证明　当 $d(S,T)<\delta\rightarrow 0$ 时，由函数 w 的连续性知，对 $\forall i\in N$，$w(S(i))\rightarrow w(T(i))$ 且 $[S]_{h_l}=[T]_{h_l}$，其中 $l=1,2,\cdots,m(S)$，$m(S)$ 是 $M(S)=\{S(i)\mid S(i)>0,i\in N\}$ 的势指标，由式(2)易知，当 $d(S,T)<\delta\rightarrow 0$ 时 $\tilde{v}(S)\rightarrow\tilde{v}(T)$，即 $\tilde{v}$ 关于 d 是连续的。

2.3　模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 的模糊 Shapley 函数

定义模糊函数 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}:\tilde{\boldsymbol{G}}_C(\boldsymbol{N})\rightarrow(\tilde{\boldsymbol{R}}^n)^{L(N)}$ 为

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)=\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))\tag{3}$$

式中，$\tilde{\varphi}$ 同定理 2 中所给的模糊函数，$m(U)$ 是 $M(U)=\{U(i)\mid U(i)>0,i\in N\}$ 的势指标且满足 $0=k_0\leqslant k_1<\cdots<k_{m(U)}$。

定义 14　函数 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}:L(N)\rightarrow\tilde{\mathbf{R}}^n$ 称为模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$ 上的一个模糊 Shapley 函数，若它满足如下三条公理：

公理 4　(模糊有效性)　对 $U\in L(N)$ 上关于 $\tilde{v}$ 的 $\forall T\in FS(\tilde{v})(U)$，有 $\sum\limits_{i\in SuppT}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(U)=\sum\limits_{i\in SuppU}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(U)$；

公理 5　(模糊对称性)　对 $U\in L(N)$ 和局中人 i,j 有 $U(i)=U(j)$，若 $\forall S\in L(U)$ 且 $i,j\notin SuppS$，有 $\tilde{v}(S\cup U(i))=\tilde{v}(S\cup U(j))$，则 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(U)=\tilde{\varphi}_j(\tilde{v})(U)$；

公理 6　(模糊可加性)　对模糊合作对策 $\tilde{v}_1,\tilde{v}_2\in$

$\tilde{G}_C(N)$,若存在模糊合作对策 $\tilde{v}_1+\tilde{v}_2\in\tilde{G}_C(N)$,对任意的 $S\subseteq U\in L(N)$,有$(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(S)=\tilde{v}_2(S)+\tilde{v}_1(S)$,则对任意的 $i\in SuppU$,有 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(U)=\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1)(U)+\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_2)(U)$。

引理 1 若 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$是凸模糊合作对策,对任意给定的 $S,T\in L(N)$满足 $S\subseteq T$,则 $\tilde{v}(S)=\tilde{v}(T)$当且仅当$\forall k\in[0,1]$有 $\tilde{v}([S]_k)=\tilde{v}([T]_k)$。

证明

充分性 对$\forall k\in[0,1]$有 $\tilde{v}([S]_k)=\tilde{v}([T]_k)$,则显然有 $\tilde{v}(S)=\tilde{v}(T)$;

必要性 设 $M(S)=\{S(i)\mid S(i)>0,i\in N\}$,$M(T)=\{T(i)\mid T(i)>0,i\in N\}$且 $M(S,T)=M(S)\cup M(T)=\{k_1,k_2,\cdots,k_{m(S,T)}\}$,其中 $0=k_0<k_1<k_2<\cdots<k_{m(S,T)}$,$m(S,T)$是 $M(S,T)$的势指标,则

$$\tilde{v}(T)-\tilde{v}(S)=\sum_{l=1}^{m(S,T)}(\tilde{v}([T]_{k_l})-\tilde{v}([S]_{k_l}))(w(k_l)-w(k_{l-1}))$$

由 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$上的凸模糊合作对策知,$\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$上的凸模糊合作对策,又已知 $S\subseteq T$ 当且仅当$\forall k\in[0,1]$有$[S]_k\subseteq[T]_k$,因此,对$\forall k\in[0,1]$有 $\tilde{v}([S]_k)\leqslant\tilde{v}([T]_k)$,故若 $\tilde{v}(S)=\tilde{v}(T)$,则对 $\forall k_l\in M(S,T)$,有 $\tilde{v}([T]_{k_l})-\tilde{v}([S]_{k_l})=0$ 成立,又 $\forall k\in(k_{l-1},k_l]$,有$[S]_k=[S]_{k_l}$和$[T]_k=[T]_{k_l}$得到,$\forall k\in(0,k_{m(S,T)}]$,有$[S]_k=[T]_k$;而当 $k>k_{m(S,T)}$时,易知$[S]_k=[T]_k=\varnothing$,故对$\forall k\in[0,1]$,有 $\tilde{v}([S]_k)=\tilde{v}([T]_k)$。

引理 2 若 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$是凸模糊合作对策,$S$ 是模糊联盟 $U\in L(N)$上关于 $\tilde{v}$ 的一个模糊支撑,则对$\forall k\in(0,1]$,$[S]_k$ 是联盟$[U]_k\in P(N)$上关于 $\tilde{v}\in\tilde{G}_0(N)$的一个支撑。

证明 对$\forall k\in(0,1]$,$T\in L(U)$,有$[T]_k\in P([U]_k)$,由引理 1,得到

$$S\in FS(\tilde{v})(U)\Leftrightarrow\tilde{v}(S\cap T)=\tilde{v}(T)\ \ \forall T\in L(U)\Leftrightarrow$$
$$\tilde{v}([S\cap T]_k)=\tilde{v}([T]_k)\ \ \forall T\in L(U)\ \forall k\in(0,1]\Leftrightarrow$$
$$\tilde{v}([S]_k\cap R_0)=\tilde{v}(R_0)\ \ \forall R_0\in P([U]_k)\ \ \forall k\in(0,1]\Leftrightarrow$$
$$[S]_k\in Su(\tilde{v})([U]_k)\ \forall \mathrm{k}\in(0,1]$$

式中,$Su(\tilde{v})([U]_k)$是$[U]_k\in P(N)$上关于 $\tilde{v}\in\tilde{G}_0(N)$的一个支撑。

定理 6 由式(3)定义的模糊函数 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$上的一个模糊 Shapley 函数。

证明 本文只给出 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$上凸模糊合作对策的证明,关于 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$上凹模糊合作对策的证明同理可得。

公理 7 若模糊联盟 T 是 $U\in L(N)$上关于 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$的一个模糊支撑,对任意的 $i\in SuppT$。

由引理 2 和定理 2 知

$$\sum_{i\in SuppU}\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)=\sum_{i\in SuppU}\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)}\Big(\sum_{i\in SuppU}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\Big)\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)}\Big(\sum_{i\in SuppT}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\Big)\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=$$
$$\sum_{i\in SuppT}\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=\sum_{i\in SuppT}\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)$$

公理 2 由已知得,要证 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(U)=\tilde{\varphi}_j(\tilde{v})(U)$,只需证对$\forall l\in\{1,2,\cdots,m(U)\}$,$\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})=\tilde{\varphi}_j(\tilde{v})([U]_{k_l})$成立即可。式(2)知,对$\forall l\in\{1,2,\cdots,m(U)\}$,$\tilde{v}([S\cup U(i)]_{k_l})=\tilde{v}([S\cup U(j)]_{k_l})$,故由定理 2 得到,对$\forall l\in\{1,2,\cdots,m(U)\}$,有 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})=\tilde{\varphi}_j(\tilde{v})([U]_{k_l})$成立;

公理 6 由已知得,对$\forall l\in\{1,2,\cdots,m(U)\}$,有

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(U)=\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))$$

由定理 2 知 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)([U]_{k_l})=\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1)([U]_{k_l})+\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_2)\cdot([U]_{k_l})$,故对$\forall i\in SuppU$,$\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1+\tilde{v}_2)(U)=\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_1)\cdot(U)+\tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_2)(U)$成立。

2.4 模糊合作对策 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$的模糊核心

定理 7 若 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$是凸模糊合作对策,则由式(3)得到的模糊向量 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\tilde{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{U})=(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i(\tilde{\boldsymbol{v}})(\boldsymbol{U}))_{i\in Supp\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\in L(N)}$是一个具有模糊支付的模糊人口单调分配体制。

证明 对$\forall U\in L(N)$,由定理 6 知 $\sum_{i\in SuppU}\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)=\tilde{v}(U)$;下证,对$\forall S\subseteq T$和$\forall i\in N$,有 $\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(S)\leqslant\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(T)$。由 $S\subseteq T$ 当且仅当对$\forall k\in(0,1]$有$[S]_k\subseteq[T]_k$,又 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$上的凸模糊合作对策,故 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$上的凸模糊合作对策,由定理 3 知,对$\forall i\in N$且$[S]_k\subseteq[T]_k$,有$\tilde{\varphi}_i([S]_k)\leqslant\tilde{\varphi}_i([T]_k)$,又 $w(x)$是递增函数,故对$\forall i\in N$,有 $\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(S)\leqslant\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(T)$成立。

定理 8 若 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$是凸模糊合作对策,则 $\tilde{\phi}(\tilde{v})\in FI(\tilde{v})$。

证明 对$\forall U\in L(N)$,由定理 6 知 $\sum_{i\in SuppU}\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)=\tilde{v}(U)$,下证,对$\forall i\in N$,有 $\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)\geqslant w(U(i))\cdot\tilde{v}(i)$。对$\forall k>U(i)$,由定理 2 知,$\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_k)=0$,由定理 3 和 $\tilde{v}$ 的凸性知,对$\forall k\leqslant U(i)$,有 $\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_k)\geqslant\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(i)=\tilde{v}(i)$,因此

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U)=\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=$$
$$\sum_{l:k_l\leqslant U(i)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))\geqslant$$
$$\sum_{l:k_l\leqslant U(i)}\tilde{v}(i)\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=$$
$$\tilde{v}(i)\cdot w(U(i))$$

由定义 13 知,$\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\tilde{\boldsymbol{v}})\in FI(\tilde{v})$。

引理 3 若 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$上的凸模糊合作对策,则其核心 $C(\tilde{v})\neq\varnothing$。

证明 令 $\tilde{x}_1=\tilde{v}(1)$且 $\tilde{x}_i+\tilde{v}(1,2,\cdots,i-1)=\tilde{v}(1,2,\cdots,i)$,其中 $i=2,3,\cdots,n$,由模糊数限制运算知 $\sum_{i\in N}\tilde{x}_i=\tilde{v}(N)$。对$\forall R_0\in P(N)$且 $R_0\neq N$,记 $N\backslash R_0=\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}$,满足 $j_1<j_2<\cdots<j_p$。令 $T_0=\{1,2,\cdots,j_1\}$,则有 $R_0\cup$

$T_0 = R_0 \cup j_1$ 且 $R_0 \cap T_0 = R_0 \backslash j_1$，故有已知得到

$$\tilde{v}(R_0 \cup j_1) - \tilde{v}(T_0) \geqslant \tilde{v}(R_0) - \tilde{v}(T_0 \backslash j_1) \Rightarrow$$
$$\tilde{v}(T_0 \backslash j_1) - \tilde{v}(R_0) \geqslant \tilde{v}(T_0) - \tilde{v}(R_0 \cup j_1) \Rightarrow$$
$$\tilde{v}(T_0 \backslash j_1) - \tilde{v}(R_0) \geqslant \tilde{x}_{j_1} + \tilde{v}(T_0 \backslash j_1) - \tilde{v}(R_0 \cup j_1) \Leftrightarrow$$
$$-\tilde{v}(R_0) \geqslant \tilde{x}_{j_1} - \tilde{v}(R_0 \cup j_1) \Leftrightarrow$$
$$\sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i + (-\tilde{v}(R_0)) \geqslant \sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i + (\tilde{x}_{j_1} - \tilde{v}(R_0 \cup j_1)) \Leftrightarrow$$
$$\sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i - \tilde{v}(R_0) \geqslant \sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i + \tilde{x}_{j_1} - \tilde{v}(R_0 \cup j_1) \Leftrightarrow$$
$$\sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i - \tilde{v}(R_0) \geqslant \sum_{i \in R_0 \cup j_1} \tilde{x}_i - \tilde{v}(R_0 \cup j_1)$$

上述过程重复 p 次，得到 $\sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i - \tilde{v}(R_0) \geqslant \sum_{i \in N} \tilde{x}_i - \tilde{v}(N) = \tilde{v}(N) - \tilde{v}(N) = \tilde{0}$，故 $\sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i \geqslant \tilde{v}(R_0)$，即 $\tilde{x} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n\}$ 是 $\tilde{v}$ 在 $\tilde{G}_0(N)$ 上的一个模糊分配，由 R_0 的任意性和 $\sum_{i \in R_0} \tilde{x}_i \geqslant \tilde{v}(R_0)$ 易知，不存在 $\tilde{v}$ 在 $\tilde{G}_0(N)$ 上的模糊分配 $\tilde{y}$，使得 $\tilde{y}$ 模糊优超 $\tilde{x}$，即 $\tilde{x} \in C(\tilde{v}) \neq \varnothing$。

定理 9 若 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$ 上的凸模糊合作对策，则其模糊核心 $FC(\tilde{v}) \neq \varnothing$，且可表示为

$$FC(\tilde{v})(U) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{y} \mid \tilde{y} = \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) = \left(\sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}_1^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) \right), \cdots, \\ \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}^{k_l}_{m([U]_{k_l})} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})), \forall \tilde{x}^{k_l} = (\tilde{x}_1^{k_l}, \cdots, \tilde{x}^{k_l}_{m([U]_{k_l})}) \in C(\tilde{v})([U]_{k_l}) \end{array} \right\}$$

式中，$U \in L(N)$，$m([U]_{k_l})$ 是 $[U]_{k_l}$ 的基数，$m(U)$ 是 $M(U) = \{U(i) \mid U(i) > 0, i \in N\}$ 的势指标且满足 $0 = k_0 \leqslant k_1 < \cdots < k_{m(U)}$。

证明 由 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$ 上的凸模糊合作对策知，$\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的凸模糊合作对策，由引理 3 知，$C(\tilde{v})([U]_{k_l}) \neq \varnothing (l = 1, 2, \cdots, m(U))$，下证

$$\tilde{y} = \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) \in FC(\tilde{v})(U),$$
$$\forall \tilde{x}^{k_l} \in C(\tilde{v})([U]_{k_l})$$

由 $\tilde{x}^{k_l} \in C(\tilde{v})([U]_{k_l})$，得到

$$\sum_{i \in SuppU} \tilde{y}_i = \sum_{i \in SuppU} \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}_i^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)} \left(\sum_{i \in SuppU} \tilde{x}_i^{k_l} \right) \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{v}([U]_{k_l}) \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) = \tilde{v}(U)$$

又对 $\forall S \in L(U)$，有

$$\sum_{i \in SuppS} \tilde{y}_i = \sum_{i \in SuppS} \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}_i^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)} \left(\sum_{i \in SuppS} \tilde{x}_i^{k_l} \right) \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) \geqslant$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{v}([S]_{k_l}) \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$
$$\sum_{l=1}^{m(S)} \tilde{v}([S]_{k_l}) \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) = \tilde{v}(S)$$

故 $\tilde{y} \in FC(\tilde{v}) \neq \varnothing$。

下证，对 $\forall \tilde{y} \in FC(\tilde{v})$，$\tilde{y}$ 可表示为

$$\tilde{y} = \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) \tag{4}$$

式中，$\tilde{x}^{k_l} \in C(\tilde{v})([U]_{k_l})$。$\forall \tilde{x}^{k_l} \in C(\tilde{v})([U]_{k_l})$，记

$$\underline{\tilde{x}}_p^{k_1} = \min \{\tilde{x}_p^{k_l} \mid \tilde{x}^{k_l} \in C(\tilde{v})([U]_{k_l}), p \in [U]_{k_l}\}$$
$$\bar{\tilde{x}}_h^{k_1} = \max \{\tilde{x}_h^{k_l} \mid \tilde{x}^{k_l} \in C(\tilde{v})([U]_{k_l}), h \in [U]_{k_l}\}$$

且

$$S_0 = \{h \mid \tilde{y}_h > \sum_{l=1}^{m(U)} \bar{\tilde{x}}_h^{k_1} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})), h \in SuppU\}$$
$$T_0 = \{p \mid \tilde{y}_p < \sum_{l=1}^{m(U)} \underline{\tilde{x}}_p^{k_1} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})), p \in SuppU\}$$

则显然有

$$\bar{\tilde{x}}_h^{k_1} = \begin{cases} v(p), & p \in [U]_{k_l} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

若存在 $\exists \tilde{y} \in FC(\tilde{v})$，使得 $\tilde{y}$ 不能被式(4)表示，则只可能存在两种情形：

情形 1 $\tilde{y}_p < \sum_{l=1}^{m(U)} \underline{\tilde{x}}_p^{k_1} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1}))$；

情形 2 $\tilde{y}_h > \sum_{l=1}^{m(U)} \bar{\tilde{x}}_h^{k_1} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1}))$。

下面我们证明 $S_0 = T_0 = \varnothing$。

对于情形 1，若 $T_0 \neq \varnothing$，则

$$\tilde{v}(T_0) \cdot \sum_{l=1}^{m(U)} (w(k_l) - w(k_{l-1})) \leqslant$$
$$\sum_{p \in T_0} \tilde{y}_p < \sum_{p \in T_0} \sum_{l=1}^{m(U)} \underline{\tilde{x}}_p^{k_1} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$
$$\sum_{p \in T_0} v(p) \cdot \sum_{l=1}^{m(U)} (w(k_l) - w(k_{l-1}))$$

得到

$$\tilde{v}(T_0) \cdot \sum_{l=1}^{m(U)} (w(k_l) - w(k_{l-1})) <$$
$$\sum_{p \in T_0} v(p) \cdot \sum_{l=1}^{m(U)} (w(k_l) - w(k_{l-1}))$$

这与 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_0(N)$ 上的凸模糊合作对策矛盾，故 $T_0 = \varnothing$。

对于情形 2，若 $S_0 \neq \varnothing$，则

$$\sum_{h \in SuppU} \tilde{y}_h = \sum_{h \in S_0} \tilde{y}_h + \sum_{h \in SuppU \backslash S_0} \tilde{y}_h >$$
$$\sum_{h \in S_0} \sum_{l=1}^{m(U)} \bar{\tilde{x}}_h^{k_1} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) +$$
$$\sum_{h \in SuppU \backslash S_0} \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}_h^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) \geqslant$$
$$\sum_{h \in S_0} \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}_h^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) +$$
$$\sum_{h \in SuppU \backslash S_0} \sum_{l=1}^{m(U)} \tilde{x}_h^{k_l} \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$
$$\sum_{l=1}^{m(U)} \left(\sum_{h \in SuppU} \tilde{x}_h^{k_l} \right) \cdot (w(k_l) - w(k_{l-1})) =$$

$$\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{v}([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=\tilde{v}(U)$$

此于 $\tilde{y}\in FC(\tilde{v})$ 矛盾，故 $S_0=\varnothing$。原命题成立。

定理 10 若 $\tilde{v}$ 是 $\tilde{G}_C(N)$ 上的凸模糊合作对策，则对 $\forall U\in L(N)$，由式(3)定义模糊函数得到的模糊向量 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\tilde{v})(\boldsymbol{U})=(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_i(\tilde{v})(\boldsymbol{U}))_{i\in SuppU}\in FC(\tilde{v})(U)$。

证明 由定理 6 只需证，对 $\forall S\in L(U)$，有 $\sum_{i\in SuppS}(\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U))\geqslant\tilde{v}(S)$ 成立即可。

由定理 2、定理 9 和 $\tilde{v}$ 的凸性知，对 $\forall k_l\in\{k_1,k_2,\cdots,k_{m(U)}\}$ 有

$$(\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l}))_{i\in[U]_{k_l}}\in C(\tilde{v})([U]_{k_l})$$

于是

$$\sum_{i\in SuppS}(\tilde{\phi}_i(\tilde{v})(U))=\sum_{i\in SuppS}\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=\sum_{l=1}^{m(U)}\Big(\sum_{i\in SuppS}(\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})([U]_{k_l}))\Big)\cdot$$
$$(w(k_l)-w(k_{l-1}))\geqslant\sum_{l=1}^{m(U)}\tilde{v}([S]_{k_l})\cdot(w(k_l)-w(k_{l-1}))=\tilde{v}(S)$$

即 $(\tilde{\varphi}_i(\tilde{v})(U))_{i\in SuppU}\in FC(\tilde{v})(U)$。

3 算例分析

为了说明问题，我们以局中人所得模糊支付是三角模糊数为例，给出如下算例：对 $\tilde{v}\in\tilde{G}_C(N)$，设局中人集合 $N=\{1,2,3\}$，已知各个清晰联盟的模糊支付如下

$$\tilde{v}(1)=(1,2,4),\ \tilde{v}(2)=(2,3,5),\ \tilde{v}(3)=(1,2,6)$$
$$\tilde{v}(1,2)=(4,8,12),\ \tilde{v}(1,3)=(3,6,12)$$
$$\tilde{v}(2,3)=(7,9,15),\ \tilde{v}(1,2,3)=(10,15,30)$$

模糊联盟 $U=\{U(1)=0.4,U(2)=0.2,U(3)=0.8\}$，当 $w(x)$ 分别为：$w(x)=x$，$w(x)=x^2$ 与 $w(x)=x^{1/2}$ 时，求模糊联盟 U 的模糊支付 $\tilde{v}(U)$ 和局中人关于模糊联盟 U 的模糊 Shapley 值。

解 首先求模糊联盟 U 的模糊支付，由式(2)知

$$当\ w(x)=x\ 时，\tilde{v}(U)=(3,5,10.8)$$
$$当\ w(x)=x^2\ 时，\tilde{v}(U)=(1.24,1.74,5.52)$$
$$当\ w(x)=x^{1/2}\ 时，\tilde{v}(U)=(5.33,8.41,17.34)$$

下面求解局中人关于模糊联盟 U 的模糊 Shapley 值，由式(3)得到：

当 $w(x)=x$ 时，局中人 1,2,3 的模糊 Shapley 值分别为

$$\tilde{\phi}_1(\tilde{v})(U)=(-0.6,1.43,4),\ \tilde{\phi}_2(\tilde{v})(U)=(0.37,1.23,2.97)$$
$$\tilde{\phi}_3(\tilde{v})(U)=(0.27,2.23,6.93)$$

当 $w(x)=x^2$ 时，局中人 1,2,3 的模糊 Shapley 值分别为

$$\tilde{\phi}_1(\tilde{v})(U)=(-0.12,0.29,0.8),\ \tilde{\phi}_2(\tilde{v})(U)=(0.07,0.25,0.6)$$
$$\tilde{\phi}_3(\tilde{v})(U)=(0.43,1.45,4.43)$$

当 $w(x)=x^{1/2}$ 时，局中人 1,2,3 的模糊 Shapley 值分别为

$$\tilde{\phi}_1(\tilde{v})(U)=(-0.7,1.3,4.2),\ \tilde{\phi}_2(\tilde{v})(U)=(0.82,2.76,6.63)$$
$$\tilde{\phi}_3(\tilde{v})(U)=(0.1,3.1,9.61)$$

4 结束语

由于模糊联盟的模糊支付不仅同组成模糊联盟的局中人有关还与局中人的参与水平有关，对不同的模糊合作对策这种关系很可能不同，因此这类模糊合作对策的理论研究难度较大且很难适用于所有可能的此类模糊合作对策。为此本文探讨了一类具有 Choquet 积分形式的模糊合作对策，并通过定义模糊分配，具有模糊支付的模糊人口单调分配体制，模糊核心和模糊 Shapley 函数，研究了此类模糊合作对策的有关性质，重点探讨了此类模糊合作对策的模糊核心和模糊 Shapley 函数。目前对具有模糊支付的模糊合作对策的研究还不是很多，理论体系也很不完善，今后我们将继续致力于这方面的探讨。

参考文献：

[1] 郭嗣琮，刘海涛. 模糊数的相等、同一与等式限定运算[J]. 模糊系统与数学，2008,22(6):76-82.

[2] Aubin J P. *Mathematical methods of game and economic theory*[M]. North-Holland, Amsterdam, 1982.

[3] Tijs S, Branzei R, Ishihara S, et al. On cores and stable sets for fuzzy games[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004,146(2):285-296.

[4] Branzei R, Dimitrov D, Tijs S. Convex fuzzy games and participation monotonic allocation schemes[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003,139(2):267-281.

[5] Butnariu D, Kroupa T. Enlarged cores and bargaining schemes in games with fuzzy coalitions[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009,160(5):635-643.

[6] Sakawa M, Nishizalzi I. A lexicographical solution concept in an n-person cooperative fuzzy game[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994,61(3):265-275.

[7] Nishizaki I, Notsu T. Nondominated equilibrium solutions of a multiobjective two-person nonzero-sum game in extensive form and corresponding mathematical programming problem[J]. *Journal of Global Optimization*, 2008,42(2):201-220.

[8] Nishizaki I, Sakawa M. *Fuzzy and multiobjective games for conflict resolution*[M]. Physica-Verlag Heidelberg, 2001:121-244.

[9] Mares M. *Fuzzy cooperative games-cooperative with vague expectations*[M]. Physica-Verlag Heidelberg, 2001.

[10] Vijay V, Mehra A, Chandra S, et al. Fuzzy matrix games via a fuzzy relation approach[J]. *Fuzzy Optimization Decision Making*, 2007,6(4):299-314.

[11] Shapley L S. *Contributions to the theory of games*[M]. Princeton University Press, Princeton, 1953:307-317.

[12] Owen G. Multilinear extensions of games[J]. *Management Sciences*, 1972,18(5):64-79.

[13] Butnariu D. Stability and shapley value for an n-persons fuzzy game[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1980,4(1):63-72.

[14] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001,129(3):596-618.

[15] Butnariu D, Kroupa T. Shapley mappings and the cumulative value for n-person games with fuzzy coalitions[J]. *European Journal of Operational Research*, 2008,186(1):288-299.