2011年太原科技大学硕士研究生入学考试

（841）高等代数 试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一．填空题。（每小题5分，共25分）

1．设矩阵 A 可逆，且 $|A|=1$，则 A 的伴随矩阵 A^* 的逆矩阵为_______。

2．若线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则在基

$\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为__________________。

3．设 A,B,C 是 n 阶方阵，其中，B 和 C 可逆，则秩（A）______秩（BAC），

（选填：小于，等于，大于）。

4．设矩阵 A 与对角矩阵 B 相似，其中，$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$，

则 $a=$___________，$b=$___________。

5．若向量组中含有零向量，则此向量组线性__________。

二．选择题。（每小题5分，共25分）

1．下列集合有（　　　）个是 R^n 的子空间。

$w_1=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\mid x_i\in R, x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$；

$w_2=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\mid x_i\in R, x_1=x_2=\cdots=x_n\}$；

$w_3=\{\alpha=(a,b,a,b,\cdots,a,b)\mid a,b\in R\}$；

$w_4=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots x_n)\mid x_i$为整数$\}$；

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D） 4个

2. 下列行列式中，值为零的是（　　）。

（A）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$　　（B）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

（C）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$　　（D）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

3. 以下关于特征值、特征向量的命题中，不正确的是（　　）

（A）若λ是矩阵A的特征值，则齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$必有非零解

（B）若λ是线性变换σ的一个特征值，则λ^2是σ^2的一个特征值

（C）设λ_1,λ_2是线性变换σ的两个不同的特征值，α_1是属于λ_1的一个特征向量，则α_1一定不是属于λ_2的特征向量

（D）设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是数域P上线性变换σ的属于特征值λ的特征向量，则对于任一不全为零的数$k_1,\cdots,k_s\in P$，向量$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$也是$\sigma$的属于$\lambda$的特征向量

4. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n元实二次型，则f负定的充要条件是（　　）。

（A）负惯性指数=n　　（B）负惯性指数=f的秩

（C）符号差=0　　（D）所有顺序主子式都小于零

5. 对非齐次线性方程组$AX=b$及其导出组$AX=0$，则（　）。

（A）若$AX=0$仅有零解，则$AX=b$无解

（B） 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解

（C） 若 $AX=b$ 有唯一解，则 $AX=0$ 有非零解

（D） 若 $AX=b$ 有无穷多解，则 $AX=0$ 有非零解

三．计算题。（每小题 15 分，共 45 分）

1. 确定 λ 的值，使齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解。

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{100}。

3. 设多项式 $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，试求 $f(A)$。

四．证明题。（每小题 15 分，共 45 分）

1. 设 A 为 n 阶正定矩阵，B 为 n 阶半正定矩阵，证明 $A+B$ 为正定矩阵。

2. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，证明表法唯一的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

3. 设 σ 为线性空间 R^n 上的线性变换，且 $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$\sigma(x)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})\in R^n$。

（1）证明：$\sigma^n=0$；

（2）求核 $\sigma^{-1}(0)$ 和值域 $\sigma(R^n)$，并指出它们的基及维数；

（3）是否有 $R^n=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(R^n)$？说明理由。

五．（本题 10 分）

设 A,B 分别为 $s\times n,n\times m$ 矩阵，试证秩（AB）$\geq$ 秩A $+$ 秩B $-n$。