# 2011年太原科技大学硕士研究生入学考试

# （601）数学分析 试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一．填空题（每小题4分，共20分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{\tan x}=$______

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-\sin^2 x}{n}\right)^n=$__________

3．函数$I(x)=\int_0^x\dfrac{2u-1}{u^2-u+1}du$在区间$[-1,1]$上的最大值为____________

4．幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n(n+2)}}$的收敛域为_____________

5．$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{1+x^2+\alpha^2}=$__________

二．计算题（每小题10分，共30分）

1．计算积分

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dydz+e^x dzdx$$

其中$S:0\le x\le 1,0\le z\le 1,y=0$，其法线方向与$(0,1,0)$同向，函数$f(x,y,z)$在$S$上连续。

2．计算积分$\int_L\dfrac{dy-dx}{x-y+1}$，其中$L$是下半圆周$x^2+y^2=ax(a>0)$沿$x$增加的方向。

3．设$f$为可微函数，$u=f(x^2+y^2+z^2)$，并有方程

$$3x+2y^2+z^3=6xyz \qquad (*)$$

试对以下两种情形分别计算$\dfrac{\partial u}{\partial x}$在点$P_0(1,1,1)$处的值：

（1）由方程$(*)$确定了隐函数$z=z(x,y)$；

（2）由方程$(*)$确定了隐函数$y=y(x,z)$。

三．证明题（每小题 20 分，共 **100** 分）

1．（1）正面陈述无界函数的定义；

（2）证明 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 为（0, 1）上的无界函数；

（3）举出函数 $f$ 的例子，使 $f$ 为闭区间[0, 1]上的无界函数。

2．设 $f$ 为 $U_-^0(x_0,\delta)$ 内的递增函数。证明：若存在数列 $\{x_n\}\subset U_-^0(x_0,\delta)$ 且 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 则有

$$f(x_0-0)=\sup_{x\in U_-^0(x_0,\delta)}f(x)=A$$

3．设函数 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导，在 $[a,b]$ 上连续，且导函数 $f'(x)$ 严格递增，若 $f(a)=f(b)$，证明：对一切 $x\in(a,b)$ 均有 $f(x)<f(a)=f(b)$。

4．设 $f(x)$ 为定义在有限区间 $I$ 上的函数，若对 $I$ 内任何收敛数列 $\{x_n\}$, $\{f(x_n)\}$ 也是收敛数列，则 $f(x)$ 是 $I$ 上的一致连续函数。

5．设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在[a,b]上收敛，$\{f_n'(x)\}$ 在[a,b]上一致有界，证明：$\{f_n(x)\}$ 在[a,b]上一致收敛。