2009年太原科技大学硕士研究生入学考试

（831）高等代数 试题

（可以不抄题，答案必须写在答题纸上）

一．填空题（每小题 5 分，共 25 分）

1．矩阵 $A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$ 的不变因子为__________，$A(\lambda)$ 的若当标准型为__________.

2．设 A、B 和 C 都是 n 级矩阵，若 $AB=0$，$BC=C$，且秩 $C=n$，则行列式 $|AC-B|=$__________

3．设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基，$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$，则由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1$ 的过渡矩阵 $T=$__________，α 在基 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1$ 下的坐标为________.

4. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶实方阵，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}=A_{ij}$，且 $a_{33}=-1$，则 $|A|=$________.

5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(B+E)^{-1}=$________.

二．选择题（每小题 5 分，共 20 分）

1．设非零的 $n\times n$ 矩阵 A 的行列式为零，则（　　）

(A) A 中至少有一行（列）元素全为零或至少有两行（列）元素对应成比例；

(B) 齐次线性方程组 $A^*X=0$ 有非零解，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵；

(C) A 的行向量组和列向量组不可能都是线性相关的；

(D) 线性方程组 $AX=b$ 有无穷多解.

2. 设矩阵 A 的秩为 $r(r>1)$，那么（　　）

(A) A 中每个 $s(s<r)$ 阶子式都不为零；　(B) A 中每个 r 阶子式都不为零；

(C) A 中可能存在不为零的 $r+1$ 阶子式；　(D) A 中肯定有不为零的 r 阶子式。

3. 设 A 是3阶方阵，A 的秩为 1，则 A 的属于特征值 0 的特征子空间的维数为（　　）

(A) 2　　(B) 1　　(C) 3　　(D) 1 或 2 或 3

4. 设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　　）

(A) A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关；

(B) A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关；

(C) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关；

(D) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

三.（本题满分 10 分）

计算 n 阶行列式. $\begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a \end{vmatrix}$

四.（本题满分 30 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$，

（1）　写出这个二次型的矩阵 A；

（2）　求出矩阵 A 的特征值的和与积；

（3）　用配方法把这个二次型化为标准形，并写出所作的线性替换；

（4）　写出这个二次型的秩、正负惯性指数及符号差；

（5）　写出这个二次型在实数域和复数域上的规范形。

五.（本题满分 15 分）试就 a,b 的各种情况，讨论下列方程组是否有解？若有解，则求之.

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2bx_3 = 3 \end{cases}$$

六.（本题满分 10 分）证明：线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩或者等于它的系数矩阵 A 的秩或者等于系数矩阵 A 的秩再加 1.

七.（本题满分 15 分）设 A 是线性空间 V 上的线性变换，且满足 $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$，证明

（1） A 的特征值为 0 或 1；

（2） $V = \mathrm{A}V \oplus \mathrm{A}^{-1}(0)$。

八.（本题满分 15 分）设 A、B 是两个固定的 n 级矩阵，证明：

（1） $W = \left\{ X \middle| X \in P^{n\times n}, AX = XB \right\}$ 是 $P^{n\times n}$ 的一个子空间；

（2）当 $A = B$ 是主对角元两两互异的对角矩阵时，W 是什么样的子空间，并求 W 的维数及一组基.

九.（本题满分 10 分）

设 A 是 n 级正定矩阵，证明：存在 n 级正定矩阵 B，使得 $\mathrm{A} = B^2$.