第 10 卷 第 5 期
2002 年 10 月

Vol. 10, No. 5
Oct., 2002

文章编号: 1003- 207(2002)05- 0057- 05

物流配送中心选址的随机数学模型

杨 波, 梁 樑, 唐启鹤

(中国科学技术大学商学院, 安徽 合肥 230026)

摘 要: 本文对照传统的物流配送中心选址问题提出了一个随机化的模型, 并从数学角度对该模型进行了的一些分析, 给出了单配送中心选址问题的一个量化的处理方法。

关键词: 物流系统; 配送中心选址; 随机变量; 分布函数; 停止- 损失函数; 同单调
中图分类号: C931 文献标识码: A

1 引言

在物流系统中, 配送中心居于重要的枢纽地位, 起着承上启下的作用。因此物流配送中心的合理选址就显得十分重要[6,12]。在物流系统分析与设计时, 物流配送中心选址常需要得到模型化, 数量化的支持。传统的物流配送选址模型往往都是假设在物流系统中各供应点(城市)对某商品的需求量为已知常数, 然后选择单个或多个配送中心[1,2,4,6,12]。但我们认为, 在企业确定物流中心时各个城市对某商品的需求量是不可能已知的。企业只可能对这些需求量做一些预测; 也就是说各个城市对某商品的需求量应该是随机变量, 这些随机变量之间有着一定的随机关联关系。我们在本文中基于这些想法, 提出了一个随机化的数学模型, 并对该模型进行了较为深入的数学处理, 给出配送中心选址的量化方法。

2 模型

设 n 个城市, 记为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。按照一般的算法, 这个城市中任何两个城市的最短距离是可以计算出来的。我们假设城市 a_i 与 a_j 之间的最短距离为 $d_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$。我们现在要在这 n 个城市中建立一个配送中心。要求该中心到各个城市的最短距离之和最小。设中心建在第 m 个城市, $m = 1, 2, \cdots, n$。则它到各个城市的最短距离之和为

$$D_m = d_{1m} + d_{2m} + \cdots + d_{nm} = \sum_{k=1}^{n} d_{km},\ m = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

于是配送中心选址问题归结成为寻找一个 m^*, 使得

$$D_{m^*} = \min_{1 \leqslant m \leqslant n} D_m = \min_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} d_{km}. \tag{2}$$

这样的处理显然有不合理的一面。它没有考虑到各个城市对某商品的需求量。

下文中我们认为单位路程·重量的运费为常数。为数学的简便起见, 我们设运费恒为 1。

鉴于每个城市对某种商品需求量的差异, 上述模型应该修正为: 设第 k 个城市对该种商品的需求量为常数 X_k, $k = 1, 2, \cdots, n$。如果中心建在第 m 个城市, $m = 1, 2, \cdots, n$。则它到各个城市的总配送需求为

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} d_{km} X_k,\ m = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

于是配送中心选址问题归结成为寻找一个自然数 m^*, 使得

$$S_{m^*} = \min_{1 \leqslant m \leqslant n} S_m = \min_{1 \leqslant m \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} d_{km} X_k. \tag{4}$$

关于上述模型的配送中心选址的问题, 文献已做过大量研究[2]。

事实上, 上述模型中的第 k 个城市的需求量 X_k 在确定配送中心时是不可能准确知道的, 其数值只能是预先估计出来的。所以从数学角度来说, $\underline{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 是一个 n 维随机向量, 各维分量之间满足一定的相依关系(Dependence)。从而如果按照(4)的处理, 其中确定的 m^* 也只是一个随机化的足标, 取值于 $\{1, 2, \cdots, \}$。可见, 实际上上述介绍的工作对现在的随机化的场合是无效的。

我们归结所提出的随机化的数学模型具有如下

收稿日期: 2001- 05- 08; 修订日期: 2002- 07- 26
作者简介: 杨波(1965-), 男(汉族), 中国科学技术大学商学院博士研究生, 研究方向: 管理科学与工程.

结构:

1. 设 n 个城市 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。城市 a_i 与 a_j 之间的最短距离为常数 $d_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$;

2. 第 k 个城市对某种商品的需求量为非负随机变量 $X_k, k = 1, 2, \cdots, n$;

3. 如果中心建在 $a_m, m = 1, 2, \cdots, n$, 则各个城市的总配送需求 S_m 由(3) 给出。

我们将在第4节给出一定的标准, 并按照这个标准寻求一个 m^* 使 S_{m^*} 达到最优。

3 有关数学工具

3.1 停止-损失序(Stop-Loss Order)

本节, 我们总是假设随机变量具有有限的数学期望, 对一个随机变量 X, 设它的分布函数为 $P(X \leqslant x) = F_X(x)$, 尾巴概率为 $P(X > x) = \overline{F_X}(x) = 1 - F_X(x)$。在许多应用学科(如现代风险理论, 保险精算, 应用概率等) 中, 人们对随机变量引入了一些比较准则, 使相互之间可以比较"大小"(序)。为此, 我们给出一个源于保险学的名词"止损函数"(Stop-Loss Premium)。对于随机变量 X 和一个常数 r, 我们称 $E[(X - r)_+]$ 为 X 的带有留值(Retention) r 的止损函数, 其中 $(x - r)_+ = \max(x - r, 0)$。显然, 由分部积分我们可得

$$E[(X - r)_+] = \int_r^{\infty} \overline{F_X}(x)\,dx. \tag{5}$$

下面定义中阐明了一个非常实用的关于随机变量的比较准则[5, 9, 3]

定义1 设 X 和 Y 是两个随机变量。如果对任何的保留值 $-\infty < r < \infty$ 有

$$E[(X - r)_+] \leqslant E[(Y - r)_+] \tag{6}$$

我们说在停止-损失序(Stop-Loss Order) 的意义下随机变量 X 优于随机变量 Y (X is precede Y)。记为 $X \leqslant_{sl} Y$。

于是, 如果 $X \leqslant_{sl} Y$, 那么 X 的任何一个右尾不重于 Y 对应的右尾。从风险理论的角度来说, 风险变量 X 优于风险变量 Y。按照现代效用理论, 停止-损失序的金融解释如下[9, 11]: 设 X 和 Y 是两个需求变量, 那么 $X \leqslant_{sl} Y$, 当且仅当对任何使得 $Eu(-X)$ 和 $Eu(-Y)$ 有限的非降的凹效用函数 $u(\cdot)$, 有 $Eu(-X) \geqslant Eu(-Y)$, 当且仅当对任何使得 $Ev(X)$ 和 $Ev(Y)$ 有限的非降的凸效用函数 $v(\cdot)$, 有 $Ev(X) \leqslant Ev(Y)$。

3.2 随机向量的同单调性(Comonotonicity)

现代风险理论中还有另一个非常重要的概念, 它就是一组变量之间的"同单调"(Comonotonicity) 关系。为了说明这个概念我们定义 n 维向量集合的同单调性如下:

定义2 设 $A \subset IR^n$ 是一个 n 维实向量集合。如果对 A 中的任何两个元素 $\underline{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 与 $y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, 要么对 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $x_i \geqslant y_i$, 要么对 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $x_i \leqslant y_i$, 那么我们称集合 A 是同单调的。

为了给出随机变量之间的"同单调"的概念, 我们还要明确一下 n 维随机向量 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的支撑集的概念。一般地说, 任何一个使得 $P(\underline{X} \in A) = 1$ 的 n 维实向量集合 A 均可以称为随机向量 X 的支撑集, 但我们现在感兴趣的是使得 $P(\underline{X} \in A) = 1$ 成立的最小的集合 A。为区别起见, 我们称这个最小的集合 A 为随机向量 X 的谱集。

定义3 设 $\underline{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 是一个 n 维实随机向量。如果 $\underline{X}$ 具有一个同单调的谱集, 我们则称向量 $\underline{X}$ 为同单调的。

随机向量的同单调性描述的是它的各个分量之间"一大俱大"或"一小俱小"的一种性质。该性质被许多具有实际应用背景的随机向量满足。在金融和保险领域, 随机向量同单调的概念有着很强的背景支持[8], 我们不再一一赘述。在此我们仅指出, 在本文第一节引入的物流管理随机化的模型中, 假设各城市对某商品的需求量 $\underline{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 具有同单调性质, 应该是非常合理的。现代精算学中关于同单调的研究已经非常系统, 得到了许多深入的结果[10, 13]。

3.3 分布函数的反函数

按照通常的方法, 分布函数 F_X 的反函数 $F_X^{-1}(p)$ 定义为

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in IR \mid F_X(x) \geqslant p\}, p \in [0, 1], \tag{7}$$

这里我们约定 $\inf \phi = \infty$。反函数 $F_X^{-1}(p)$ 又称为 F_X 的 p-分位数。由定义我们易见, 对任意的 $x \in IR$ 和 $p \in [0, 1]$, 有 $F_X^{-1}(p) \leqslant x \Leftrightarrow p \leqslant F_X(x)$.

$$\tag{8}$$

为了下文的需要, 我们现在给出一个更为一般的分布函数 F_X 的反函数的形式。设 $p \in [0, 1]$, 我们考虑下面的闭区间。

$$[\inf\{x \in IR \mid F_X(x) \geqslant p\}, \sup\{x \in IR \mid F_X(x) \leqslant p\}],$$

这里我们约定 $\inf \phi = \infty$。$\sup \phi = -\infty$。可见由(7) 定

义的反函数恰为这个区间的左端点。我们记该区间的右端点为 F_X 的另一个反函数, 即

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in IR \mid F_X(x) \leqslant p\}, p \in [0, 1]. \tag{9}$$

我们易证: 1) $F_X^{-1}(0) = -\infty$, $F_X^{-1+}(1) = \infty$; 2) $P(F_X^{-1+}(0) \leqslant X \leqslant F_X^{-1}(1)) = 1$。由(7) 和(9), 我们可以定义分布函数 F_X 的更一般的反函数如下: 对任何 $\alpha \in [0, 1]$, 我们称

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha)F_X^{-1+}(p), p \in (0, 1), \tag{10}$$

为 F_X 的α– 混合反函数, 特别地, 我们有 $F_X^{-1(0)}(p) = F_X^{-1+}(p)$ 和 $F_X^{-1(1)}(p) = F_X^{-1}(p)$。又, 对任何的 $\alpha \in [0, 1]$, 显然有

$$F_X^{-1}(p) \leqslant F_X^{-1(\alpha)}(p) \leqslant F_X^{-1+}(p).$$

我们引入 F_X 的α– 混合反函数(10) 的目的从下面的讨论中可以看到。设 $r \in IR$ 使得 $0 < F_X(r) < 1$。于是 $F_X^{-1}(F_X(r))$ 和 $F_X^{-1+}(F_X(r))$ 有限且 $F_X^{-1}(F_X(r)) \leqslant r \leqslant F_X^{-1+}(F_X(r))$。所以存在某个 $\alpha_r \in [0, 1]$ 使得

$$r = \alpha_r F_X^{-1}(F_X(r)) + (1-\alpha_r)F_X^{-1+}(F_X(r)) = F_X^{-1(\alpha_r)}(F_X(r)).$$

3.4　同单调随机变量和的停止– 损失函数

本小节我们设 $\underline{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 为一个同单调的 n 维随机向量。记它的各维分量之和为 $S = \sum_{k=1}^n X_k$。下面研究的 S 的停止– 损失函数 $E[S - r]_+$ 的计算问题, 其中 $-\infty < r < \infty$。下面的引理可以参阅[7]。

引理 1　设 $\underline{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 为一个同单调的 n 维随机向量, $S = \sum_{k=1}^n X_k$。记分布函数 F_S 的α– 混合反函数为 $F_S^{-1(\alpha)}$。我们有

$$F_S^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{k=1}^n F_{X_k}^{-1(\alpha)}(p), 0 < p < 1, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{11}$$

下面的引理在下节寻找配送中心时起着重要作用, 其证明亦可见于[7]。

引理 2　设 $\underline{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 为一个同单调的 n 维随机向量, $S = \sum_{k=1}^n X_k$。我们有

$$E[(S - r)_+] = \sum_{k=1}^n E[(X_k - r_k)_+], \forall r \text{ 满足 } F_S^{-1+}(0) < r < F_S^{-1}(1), \tag{12}$$

其中, $r_k = F_{X_k}^{-1(\alpha_r)}(FS(r))$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 而 α_r 由 $F_S^{-1(\alpha_r)}(F_S(r)) = r$ 决定。

4　解决方案

首先应该注意到, 对某两个随机变量 X 和 Y, 按照定义 1, 可能会出现对一部分 $r \in IR$ 有(6) 成立, 而对另一部分 $r \in IR$ 有(6) 不成立。也就是说, 如果简单地按照定义 1 的标准, 那么会出现两个随机变量不能比较大小的情形。所以我们下面要重新制定一个比较标准, 并且使用这个标准来解决我们在第 2 节提出的配送中心选址的问题。

我们采用的新标准为在(6) 两边对变量 r 按照 dr 进行积分, 然后比较积分值的大小。如果 $\int_0^\infty E[(X - r)_+]dr \leqslant \int_0^\infty E[(Y - r)_+]dr$, 那么我们认为在积分停止– 损失序(Integrated Stop– Loss Order) 的意义下, 变量 X 优于变量 Y, 记为 $X \leqslant_{isl} Y$。而如果 $\int_0^\infty E[(X - r)_+]dr \geqslant \int_0^\infty E[(Y - r)_+]dr$, 那么我们认为变量 Y 优于变量 X, 记为 $X \geqslant_{isl} Y$。

我们指出, 上面比较积分 $\int_0^\infty E[(X - r)_+]dr$ 的大小的方法并不是可以比较出变量 X 与变量 Y 的大小的唯一标准。例如, 根据具体问题, 我们也可以引入一个正函数 $f(r)$ 作为调节因子, 从而来通过比较积分值 $\int_0^\infty f(r)E[(X - r)_+]dr$ 与积分值 $\int_0^\infty f(r)E[(Y - r)_+]dr$ 的大小的办法来确定变量 X 与变量 Y 的序。

回忆第 2 节中我们介绍的关于配送问题随机化的数学模型。设 n 个城市 $a_1, a_2, \cdots, a_n$。城市 a_i 与 a_j 之间的最短距离为已知常数 d_{ij}, $i, j = 1, 2, \cdots, n$。第 i 个城市对某种商品的需求量为非负随机变量 X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$。如果中心建在 a_m, $m = 1, 2, \cdots, n$, 则它到各个城市的总配送需求 S_m 由(3) 给出。

按照上述积分停止– 损失序的标准, 为了寻求一个 m^* 使 S_{m^*} 达到最优, 下面列出我们的解决方案如下:

(1) 对由 n 个城市 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的图, 求出任意两个城市 a_i 与 a_j 之间的最短距离 d_{ij}, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 关于 d_{ij} 的算法问题是图论等学科中最基本的问题, 我们在此就不一一赘述了。

(2) 设各个城市对某种商品的需求量构成的随机向量 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 为一个同单调的 n 维随机向量。这个假设在实际应用中应该是非常合理

的。于是随机向量 $X_d = \{d_{1m}X_1, d_{2m}X_2, \cdots, d_{nm}X_n\}$ 也是同单调的。回忆(3) 式, (5) 式, (12) 式以及引理 2, 有

$$\int_0^\infty E[S_m - r]\,dr$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=1}^n E[(d_{km}X_k - F^{-1(\alpha r)}_{d_{km}X_k}(F_{S_m}(r)))_+]\,dr$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E[(d_{km}X_k - F^{-1}_{d_{km}X_k}(F_{S_m}(r)))_+]$$

$$- \int_0^\infty \sum_{k=1}^n \int_{F^{-1}_{d_{km}X_k}(F_{S_m}(r))}^{F^{-1(\alpha_r)}_{d_{km}X_k}(F_{S_m}(r))} \overline{F_{d_{km}X_k}}(x)\,dx\,dr$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E[(d_{km}X_k - F^{-1}_{d_{km}X_k}(F_{S_m}(r)))_+]\,dr$$

$$- \int_0^\infty \sum_{k=1}^n (F^{-1(\alpha_r)}_{d_{km}X_k}(F_{s_m}(r)) - F^{-1}_{d_{km}X_k}(\overline{F_{S_m}}(r)))\,FSm(r)\,dr$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E[(d_{km}X_k - d_{km}F^{-1}_{X_k}(F_{S_m}(r)))_+]\,dr$$

$$- \int_0^\infty (F^{-1(\alpha_r)}_{S_m}(F_{S_m}(r)) - F^{-1}_{S_m}(F_{S_m}(r)))\,\overline{F_{S_m}}(r)\,dr$$

$$= \sum_{k=1}^n d_{km} \int_0^\infty E[(X_k - F^{-1}_{X_k}(F_{S_m}(r)))_+]\,dr$$

$$- \int_0^\infty (r - F^{-1}_{S_m}(F_{S_m}(r)))\,\overline{F_{S_m}}(r)\,dr. \quad (13)$$

如果每一个随机变量 X_i 的分布函数严格单调增加, $i = 1, 2, \cdots, n$, 那么它们的线性组合 S_m 的分布函数 F_{S_m} 也是严格单调增加的。从而上式的第二项为 0。于是

$$\int_0^\infty E[S_m - r]\,dr$$

$$= \sum_{k=1}^n d_{km} \int_0^\infty E[(X_k - F^{-1}_{X_k}(F_{S_m}(r)))_+]\,dr. \quad (14)$$

利用(13) 式(当每一个随机变量 X_i 的分布函数都严格单调增加时利用(14) 式) 计算出 $\int_0^\infty E[S_m - r]\,dr$, $m = 1, 2, \cdots n$。

3. 从计算出的值 $\{\int_0^\infty E[(S_m - r)_+]\,dr, m = 1, 2, \cdots n\}$ 中寻找到最小的一个。设这个最小值为 $\int_0^\infty E[(S_{m^*} - r)_+]\,dr$, 则我们认为配送中心应该定在城市 a_{m^*} 处。

5 方法评价

比起过去的一些模型来说, 我们在第 2 节引入的随机化的物流配送模型更符合物流实际。按照这个随机化的思想, 我们也可以继续深入下去, 提出更一般的模型(如多配送中心随机化物流模型等)。

在确定物流中心时, 我们是按照总配送需求在积分停止－损失函数最小的意义下来进行的, 当然, 基于这个思想, 我们也可以提出其它一些可能更为实际的确定标准。

在我们本文的标准下, 最后真正要计算的量为(13) 的右边, 其计算的复杂度也不算大, 关键在于计算 S_m 的分布函数。在随机向量 X 为同单调且的其每一个边际分布 F_{X_k} 为一些特殊形式的时候, 分布函数 F_{S_m} 的形式往往比较简单。例如, 当每一个边际分布函数 F_{X_k} 为指数分布时, 我们可以从数学角度严格证明最后的同单调随机变量的线性组合 S_m 的分布函数 F_{S_m} 也是一个清晰的指数分布函数表达式。又如, 当边际分布函数 F_{X_k} 为 Pareto 分布时, 分布函数 F_{S_m} 的形式也是非常清晰的。本文限于篇幅的要求就不进行 详细讨论了。

参考文献:

[1] Bachtel, C. and Jayanth, J. Supply chain management: A strategic perspective[J]. The International Journal of Logistics Management, 1997, 8(1).

[2] Bowersox, D. J. and Closs, D. J. Logistical Management: The Integrated Supply Chain Process [M]. McGraw－Hill, Inc, 1998.

[3] Denuit, M., De Vylder, F. and Lefevre, C. Extrema with respect to s－convex orderings in moment spaces: a general solution [J]. Insurance: Mathematics & Economics, 1999, 24: 201－217.

[4] Donna, L. Doane Cooperation, Technology and Japanese Development[M]. Westview Press, 1995.

[5] Goovaerts, M. J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E. and Bauwelinckx T. Effective actuarial methods[M], Xorth－Holland, Amsterdam, 1990.

[6] 胡双增, 张明. 物流系统工程[M]. 清华大学出版社, 2000.

[7] K, R, Dhaene, J. and Goovaerts, M. J. Upper and lower bounds for sums of random variables[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2000, 27: 151－168.

[8] Kaas, R., Goovaerts, M. J., Dhaene, J. and Denuit, M. Modern Actuarial Risk Theory [M]. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 2001.

[9] Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E. and Goovaerts, M. J. Ordering of actuarial risks [M]. Caire Edu－cation Series, Amsterdam, 1994.

[10] Muller, A. Stop- Loss order for portfolios of dependent risks[J]. Insursance: Mathematics & Economics, 1997, 21:219- 223.

[11] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. Stochastic orders and their applications[M]. Academic Press, 1994.

[2] 宋华, 胡左浩. 现代物流与供应链管理[M]. 经济管理出版社, 2000.

[13] W, S. and Dhaene, J. Comonotonicity, correlation order and stop- loss premiums[J]. Insursance: Mathematics & Economics, 1998, 22:235- 243.

A Randomized Mathematic Model of Logistic System and Allocation of Its Distribution Center

YANG Bo, LIANG Liang, TANG Qi- he

School of Business, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In some classical models of logistic system the demand of each city is assumed to be constant. In this paper we propose a randomized model of logistic system, in which the demand of each city is regarded as a random variable. A quantitative approach to determine the distribution center is derived. In doing this, some details of mathematics are involved.

Key words: logistics system; distribution center allocation; random variable; stop- loss function; comonotonicity.