

多变量极值搜索系统神经网络自适应协同控制

左 斌^{1,4}, 李 静^{2,3}, 黄宏林⁵

(1. 海军航空工程学院控制工程系, 山东烟台 264001; 2. 海军航空工程学院战略导弹工程系, 山东烟台 264001; 3. 北京图形研究所, 北京 100029; 4. 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100191; 5. 石家庄陆军指挥学院战役战术系, 河北石家庄 050084)

摘要: 针对一类仿射型多变量极值搜索系统的协同控制问题, 提出了一种基于神经网络的自适应协同控制方法。该方法利用协同控制实现状态变量之间的协同收敛, 并确保对系统内部参数扰动和外界干扰具有不变性; 以系统的状态变量、输入量、搜寻变量以及已知模型参数作为输入量, 分别设计两个 3 层神经网络来估计状态变量极值的动态变化过程及未知参数; 并采用可调参数消除此神经网络的残余估计误差。详细的理论分析证明了闭环系统的所有误差信号均指数收敛至原点的有界可调邻域内。仿真结果也说明了理论分析方法的正确性和有效性。

关键词: 多变量极值搜索系统; 极值搜索控制; 协同控制; 神经网络; 自适应控制

中图分类号: TP 273.23

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1001-506X.2013.04.25

Neural network adaptive synergetic control for multivariable extremum seeking system

ZUO Bin^{1,4}, LI Jing^{2,3}, HUANG Hong-lin⁵

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China; 2. Department of Strategic Missile Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China; 3. Beijing Institute of Graphics, Beijing 100029, China; 4. School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 5. Department of Campaign & Tactics, Shijiazhuang Army Command College, Shijiazhuang 050084, China)

Abstract: A systematic procedure for synthesis of neural network adaptive synergetic control is proposed for a class of affine multivariable extremum seeking system. By employing the synergetic control, the synergetic convergence among the states can be realized, and the invariance against system parameter variation and external perturbation can also be achieved. By using the system's states and input, the search variables from the extremum seeking control, and the known model parameters as the inputs, two three-layer neural networks are designed to estimate the dynamic process of the states extrema and unknown parameters, respectively. At the same time, an adjustable parameter is used to minify the estimation errors of the three-layer neural networks. The detailed theoretical analysis proves that all errors of the closed-loop system exponentially converge to a small tunable neighborhood of the origin by appropriately choosing design constants. Simulation results show the effectiveness of the proposed control method.

Keywords: multivariable extremum seeking system; extremum seeking control; synergetic control; neural network; adaptive control

0 引言

极值搜索系统的控制问题一直是最优控制、自适应控制中的研究热点^[1-2]。如何设计极值搜索控制方法,使受到外部干扰和内部扰动的极值搜索系统能够获取期望的最优性能则是极值搜索控制系统设计的目标。特别是,某些极

值搜索系统的多个输入量与输出量之间存在最优参考轨迹关系,且系统状态变量的收敛过程必须满足一定的协同关系时^[3],如何设计控制系统使得系统输出量收敛至其最优值,同时状态变量具有协同收敛过程,对内部参数扰动和外界干扰都具有不变性,是目前多变量极值搜索控制系统研究的难点和重点问题。

当前,仿射型非线性系统的研究方法包括智能控制方法、鲁棒自适应方法、滑模变结构控制方法、预测控制方法等^[4-9]。文献[4]针对一类具有不确定性的单输入单输出(single-input and single-output, SISO)非线性严反馈系统,设计出一种直接自适应模糊跟踪控制方法,运用模糊智能方法逼近未知函数,结合反演设计方法,给出了系统控制律。文献[5]针对一类具有建模不确定性和外部干扰的多输入多输出(multi-input and multi-output, MIMO)仿射型非线性系统,提出了一种鲁棒自适应模糊控制方法,通过利用模糊逻辑系统逼近未知的非线性函数,利用反演方法设计系统的控制器,最终实现了对参考信号的跟踪控制。文献[6]针对具有控制输入不灵敏区和有界不确定性的非线性系统,设计了一种增益调度自适应变结构镇定控制方法,系统的不确定参数和外界干扰由所设计的自适应方法逼近,并基于增益调度方法调节控制器参数,从而减小了变结构控制器的颤振。文献[7]研究了具有不确定性和输入死区混沌系统的混沌抑制问题,提出一种鲁棒自适应变结构控制方法,通过设计新颖的滑模面,简化了闭环控制系统的切换任务。文献[8]针对一类具有未知时变周期干扰的严反馈系统,利用3层神经网络逼近系统的未知非线性函数,通过设计自适应动态面控制方法,使得系统的输出跟踪误差收敛至任意小的邻域内。文献[9]针对无人直升飞机的自动垂直旋转问题,将其建模为一类具有非线性代价函数的仿射型非线性单输入多输出(single-input and multi-output, SIMO)系统,利用递归神经网络实现在线运行,设计出非线性模型预测控制器,提高了系统的使用性能和安全性,且对环境干扰和传感器误差具有较强的鲁棒性。

上述文献对仿射型非线性控制系统研究的前提条件是已知系统输出的期望跟踪轨迹。但是,许多仿射型多变量极值搜索系统的期望跟踪轨迹是完全未知且随时间、环境条件而变化。因此,这类对象就不满足文献[4-9]控制方法的应用前提。此外,某些仿射型多变量极值搜索系统还要求状态变量具有协同收敛过程,且系统对内部参数扰动和外界干扰具有不变性。如果单独应用协同控制方法^[10-11]进行设计,由于系统的期望跟踪轨迹未知,仍将导致控制系统设计受阻。

目前,国内外关于此类多变量极值搜索系统的控制方法研究包括:基于正弦激励函数的极值搜索控制方法^[12]、滑模极值搜索控制方法^[1]和退火递归神经网络极值搜索控制方法^[13-14],其中在基于正弦激励函数的极值搜索控制方法上发展形成了源搜索控制方法^[15-16]和随机源搜索控制方法^[17-19]。然而,基于正弦激励函数的极值搜索控制方法、源搜索控制方法以及随机源搜索控制方法,在工作原理上都是利用外界扰动信号和高通滤波器的配合,估计出系统的输出函数对搜索变量的梯度,通过搜索梯度极值使得系统输出收敛至其期望极值。由于这类方法都采用了外部扰动信号,会导致状态变量在收敛邻域内的不停变化和可控量的来回切换问题,因此在控制效果上还有待于进一步提高。

滑模极值搜索控制方法是基于变结构控制理论,使系统输出直接跟踪指令输入值,当进入极值搜索邻域后,再利用系统的自适应性使输出量收敛至其期望的极值。由于该方法采用了变结构控制的设计模式,因此系统的控制量存在颤振问题。退火递归神经网络极值搜索控制方法是将极值搜索控制问题转化为一组对偶形式的函数最优化问题,再通过构建退火递归神经网络来求解此最优化问题,基于函数最优化的结果,实现对被控对象的极值搜索控制,然而该类方法的收敛速度和鲁棒性还有待于提高。

为此,本文提出了一种基于神经网络的自适应协同控制方法,该方法适用于解决仿射型多变量极值搜索系统的协同控制问题,且不需要已知系统的期望跟踪轨迹。利用协同控制实现状态变量之间的协同收敛关系,并确保对系统内部参数扰动和外界干扰具有不变性;以系统的状态变量、输入量、搜索变量以及已知模型参数作为输入量,设计3层神经网络来逼近状态变量的极值变化率和未知变量与函数;并运用自适应参数来削弱神经网络逼近的残余估计误差。该设计方法保证了闭环系统的所有误差信号均指数收敛至原点的有界可调邻域内。同时,对仿真实例的结果进行了对比分析,进一步说明了该方法可以确保被控系统的极值搜索能力、协同收敛能力以及鲁棒性。

1 问题阐述

考虑如下仿射型多变量极值搜索系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{u} + \Delta_1 \\ y = \ell(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ 为系统的状态变量; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 和 $y \in \mathbf{R}$ 分别为系统的输入量和输出量; $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 为已知的光滑非线性函数,且存在伪逆 $g^{-1}(\mathbf{x})$; Δ_1 表示系统内部参数扰动和外界干扰,其范数有界 $\|\Delta_1\| \leq \delta_\Delta$, δ_Δ 是未知值; $\ell(\mathbf{x})$ 为输出函数,且存在未知的状态变量极值 \mathbf{x}^* ,使输出量 $y = \ell(\mathbf{x})$ 具有极值 $y^* = \ell(\mathbf{x}^*)$ (极大值或极小值)。

控制目标是针对仿射型多变量极值搜索系统(1),设计一种基于神经网络的自适应协同控制方法,使得闭环控制系统稳定,且状态变量 \mathbf{x} 满足协同收敛条件,系统的所有误差信号均有界且指数收敛至原点的有界邻域。

2 理论基础

为方便问题的研究,需要引入如下假设条件和引理。

假设 1 存在一个紧集 $\Omega_x \subset \mathbf{R}^m$,使得 $\mathbf{x} \in \Omega_x$ 。

假设 2 在一紧集内,仿射型多变量极值搜索系统(1)的状态变量极值 \mathbf{x}^* 及其动态变化率 $\dot{\mathbf{x}}^*$ 可分别由未知的非线性函数 $l_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})$ 和 $l_2^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\zeta})$ 表示,其中 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^r$ 为极值搜索控制所需的搜索变量, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbf{R}^p$ 为已知可测的模型参数;并且极值 \mathbf{x}^* 为有限值,可满足 $\|\mathbf{x}^*\| < X_u$,其中 X_u 是未知的。

引理 1^[20] 已知3层神经网络逼近器 $\mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{V}^T \mathbf{X})$ 的结

构如图 1 所示。

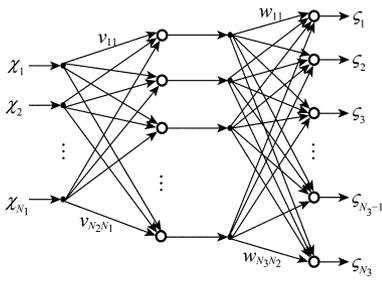


图 1 3 层神经网络逼近器的结构图

在图 1 中,相关变量为

$$\mathbf{X} = [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{N_1}]^T$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N_2} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N_3 1} & w_{N_3 2} & \dots & w_{N_3 N_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1N_1} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2N_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N_2 1} & v_{N_2 2} & \dots & v_{N_2 N_1} \end{bmatrix}$$

采用 $\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{X})$ 表示所设计的 3 层神经网络, $\mathbf{W}^{*T} \mathbf{S}(\mathbf{V}^{*T} \mathbf{X})$ 表示理想的 3 层神经网络, \mathbf{S} 表示 S 型的激活函数。那么此 3 层神经网络的逼近误差为

$$\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{X}) - \mathbf{W}^{*T} \mathbf{S}(\mathbf{V}^{*T} \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{W}}^T (\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}}' \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{X}) + \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{S}}' \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{X} + \mathbf{d}_u$$

式中, \mathbf{W}^* 和 \mathbf{V}^* 分别表示理想的权重矩阵; $\hat{\mathbf{W}}$ 和 $\hat{\mathbf{V}}$ 分别表示设计的权重矩阵; $\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{W}^*$ 和 $\hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{V}} - \mathbf{V}^*$ 分别表示此 3 层神经网络权重矩阵的估计误差; $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{X})$; $\hat{\mathbf{S}}' = \text{diag} \{ \hat{s}'_1, \hat{s}'_2, \dots, \hat{s}'_k \}$, 其中 $\hat{s}'_i = s'(\hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{X}) = \frac{d[s(x_a)]}{dx_a} \Big|_{x_a = \hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{X}}$; 剩余项 $\|\mathbf{d}_u\| \leq \|\mathbf{V}^*\|_F \|\hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{S}}\|_F \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{W}^*\|_F \|\hat{\mathbf{S}}' \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{X}\|_F + \|\mathbf{W}^*\|_F \sqrt{N_2}$ 是有界的, 且 $\sqrt{N_2} \geq \|\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}^*\|$ 。

3 基于神经网络的自适应协同控制方法设计

针对仿射型多变量极值搜索系统(1), 考虑到状态变量 x 之间的协同收敛条件以及系统内部参数扰动和外界干扰, 采用协同控制方法设计控制律 u 。该方法基于定向自组织原理, 根据系统所要求的控制目标, 在被控对象的状态空间中构造流形, 并利用流形来求解系统的控制律, 而且协同控制对于系统内部参数扰动和外部干扰具有很强的鲁棒性。

根据已知的状态变量 x 之间的协同收敛条件, 设计流形 φ 为

$$\varphi = \mathbf{K}(x - x^*) \quad (2)$$

式中, $\varphi \in \mathbf{R}^n$ 为流形形式; x^* 为状态变量 x 的极值; $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为根据状态变量的协同收敛条件而设计的参数矩阵, 且存在伪逆 \mathbf{K}^{-1} 。

由于在多变量极值搜索系统(1)中极值 x^* 是未知的, 因此只能由估计值 \hat{x}^* 代替极值 x^* , 则有

$$\varphi = \mathbf{K}(x - \hat{x}^*) \quad (3)$$

式中, \hat{x}^* 为状态变量极值 x^* 的估计值。

定义系统状态轨迹向流形 φ 的动态演变规律为

$$\mathbf{T} \dot{\varphi} + \varphi = 0 \quad (4)$$

式中, $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为系统状态趋向流形(3)的收敛速率, 且 \mathbf{T} 是对称正定矩阵。

设计控制律 u 为

$$u = -g^{-1}(x) [f(x) + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \varphi - \eta - \hat{Q} \hat{\rho} \beta - \dot{\hat{x}}^*] \quad (5)$$

式中, η 为神经网络抵消项; 向量 $\mathbf{Q} = [1, 1, \dots, 1]_{1 \times m}^T$; 自适应参数 $\hat{\rho} \geq 0$ 为对参数 ρ^* 的估计, 其中 ρ^* 如式(31)所示; 参数 β 如式(33)所示; $\dot{\hat{x}}^*$ 为极值变化率的估计值。

根据假设 2 可知, 极值变化率 $\dot{x}^* = l_2^*(x, y, \theta, \zeta)$ 是紧集内的函数, 依据多层神经网络对任意多项式函数都具有较好的逼近能力^[20], 故可利用理想的 3 层神经 $\mathbf{W}_1^T \mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{V}_1^T \mathbf{X}_1) + \varepsilon_1$ 来逼近 \dot{x}^* , 即

$$\dot{x}^* = \mathbf{W}_1^T \mathbf{S}_1 (\mathbf{V}_1^T \mathbf{X}_1) + \varepsilon_1 \quad (6)$$

式中, $\mathbf{X}_1 = [x^T, y, \theta^T, \zeta^T]^T$ 为此 3 层神经网络的输入向量; \mathbf{W}_1^* 和 \mathbf{V}_1^* 为理想的权重矩阵; ε_1 为神经网络的逼近误差, 且 $\|\varepsilon_1\| \leq \varepsilon_{m1}$, 其中 ε_{m1} 为逼近误差 ε_1 的上界值。

然而, 极值变化率的估计值 $\dot{\hat{x}}^*$ 可采用 3 层神经网络 $\hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1 (\hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1)$ 实现, 即

$$\dot{\hat{x}}^* = \hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1 (\hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1) \quad (7)$$

式中, $\hat{\mathbf{W}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{V}}_1$ 为理想权重矩阵 \mathbf{W}_1^* 和 \mathbf{V}_1^* 的估计值。

根据式(7)可知, 为了获得极值变化率的估计值 $\dot{\hat{x}}^*$, 神经网络 $\hat{\mathbf{W}}_1^T \mathbf{S}_1 (\hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1)$ 的输入向量 \mathbf{X}_1 应包含极值搜索控制的搜索变量 θ 。当前, 基于正弦激励函数的极值搜索控制方法、滑模极值搜索控制方法以及退火递归神经网络极值搜索控制方法是极值搜索控制中的 3 种主要方法。如果应用基于正弦激励函数的极值搜索控制方法^[12] 或者滑模极值搜索控制方法^[1], 那么搜索误差为 $e_\theta = \theta - \theta^*$, 其中 θ^* 为搜索变量 θ 所对应的极值; 如果应用退火递归神经网络极值搜索控制方法^[13-14], 那么搜索误差为 $e_\sigma = \sigma - \sigma^*$, 其中 $\sigma = [v^T, \omega^T]^T$, σ^* 为退火递归神经网络极值搜索控制方法中搜索向量 σ 所对应的极值。分别讨论在这 3 种极值搜索控制方法中搜索误差 e_θ 的动态方程。

(1) 在文献[12]的极值搜索控制方法中, 搜索变量 θ 的动态方程如下:

$$\dot{\theta} = \Lambda \theta + \kappa \quad (8)$$

其中

$$\Lambda = -h; \kappa = -k \sin(\omega t - \phi) y + a \omega \cos(\omega t) + a h \sin(\omega t)$$

考虑到搜索变量 θ 的极值 θ^* ，则搜索误差 e_θ 的动态方程为

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \Lambda(\theta - \theta^*) + \kappa - \kappa^* = \Lambda e_\theta + \Delta\kappa \quad (9)$$

式中， $\Delta\kappa = \kappa - \kappa^*$ 。

(2) 在文献[1]的极值搜索控制方法中，搜索变量 θ 的动态方程如下：

$$\dot{\theta} = \kappa_1 \quad (10)$$

式中， $\kappa_1 = -\frac{k}{\tau_\theta}y + \frac{k}{\tau_\theta}g_\theta(t)$ 。

考虑到搜索变量 θ 的极值 θ^* ，则搜索误差 e_θ 的动态方程为

$$\dot{e}_\theta = \dot{\theta} - \dot{\theta}^* = \kappa_1 - \kappa_1^* = \Delta\kappa_1 \quad (11)$$

(3) 在文献[13-14]的极值搜索控制方法中，搜索向量 σ 的动态方程如下：

$$\dot{\sigma} = \Lambda_2 \sigma + \kappa_2 \quad (12)$$

式中

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} -\mu(\mathbf{c}\mathbf{c}^T + \mathbf{M}^T \Gamma^T \mathbf{I}\mathbf{M}) & \mu\mathbf{c}\mathbf{b}^T \\ \mu\mathbf{b}\mathbf{c}^T & -\mu(\mathbf{b}\mathbf{b}^T + \Gamma^T \mathbf{I}\mathbf{M}\mathbf{M}^T) \end{bmatrix}$$

$$\kappa_2 = \begin{bmatrix} \mu\mathbf{M}^T \Gamma^T \mathbf{I}\mathbf{b} \\ \mu\mathbf{I}^T \mathbf{I}\mathbf{M}\mathbf{c} \end{bmatrix}$$

考虑到搜索向量 σ 的极值 σ^* ，则搜索误差 e_σ 的动态方程为

$$\dot{e}_\sigma = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^* = \Lambda_2 e_\sigma + \Delta\kappa_2 \quad (13)$$

式中， $\Delta\Lambda_2 = \Lambda_2 - \Lambda_2^*$ ， $\Delta\kappa_2 = \Delta\Lambda_2 \sigma^* + \kappa_2 - \kappa_2^*$ 。

通过对比式(9)、式(11)和式(13)可知，上述 3 种极值搜索控制方法的搜索误差 e_θ 的动态方程可以统一表示为

$$\dot{e}_\theta = \Lambda e_\theta + \Delta\kappa \quad (14)$$

4 控制系统的稳定性分析

针对仿射型多变量极值搜索系统式(1)，当采用控制律 u 如式(5)时，分析此控制系统的稳定性。选取 Lyapunov 函数 L 如下：

$$L = \frac{1}{2}e_x^T e_x + \frac{1}{2}e_\theta^T e_\theta + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{2}\bar{\rho}^2 + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_1\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_1\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_2\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_2\} \quad (15)$$

式中， $e_x = x - x^*$ 为系统状态变量 x 的极值跟踪误差； $\bar{\rho} = \hat{\rho} - \rho^*$ 为参数估计误差，其中 $\bar{\rho}$ 的调节律见式(35)； $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \hat{\mathbf{W}}_1 - \mathbf{W}_1^*$ 和 $\tilde{\mathbf{V}}_1 = \hat{\mathbf{V}}_1 - \mathbf{V}_1^*$ 为神经网络的权重估计误差，且设计参数 $\Gamma_{W_1} = \Gamma_{W_1}^T > 0$ ， $\Gamma_{V_1} = \Gamma_{V_1}^T > 0$ ； $\text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_2\}$ 和 $\text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_2\}$ 的设计主要是考虑到神经网络 $\mathbf{W}_2^* \mathbf{S}_2(\mathbf{V}_2^{*T} \mathbf{X}_2)$ 、 $\hat{\mathbf{W}}_2^T \mathbf{S}_2(\hat{\mathbf{V}}_2^T \mathbf{X}_2)$ 的动态过程，其中神经网络 $\mathbf{W}_2^* \mathbf{S}_2(\mathbf{V}_2^{*T} \mathbf{X}_2)$ 的定义见式(24)，神经网络 $\hat{\mathbf{W}}_2^T \mathbf{S}_2(\hat{\mathbf{V}}_2^T \mathbf{X}_2)$ 的定义见式(25)， \mathbf{W}_2^* 和 \mathbf{V}_2^* 为理想的

权重矩阵， $\hat{\mathbf{W}}_2$ 和 $\hat{\mathbf{V}}_2$ 为理想权重矩阵 \mathbf{W}_2^* 和 \mathbf{V}_2^* 的估计值， $\tilde{\mathbf{W}}_2 = \hat{\mathbf{W}}_2 - \mathbf{W}_2^*$ 和 $\tilde{\mathbf{V}}_2 = \hat{\mathbf{V}}_2 - \mathbf{V}_2^*$ 为神经网络的权重估计误差， $\Gamma_{W_2} = \Gamma_{W_2}^T > 0$ ， $\Gamma_{V_2} = \Gamma_{V_2}^T > 0$ 为设计参数。

将 Lyapunov 函数 L 对时间 t 求导，可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & e_x^T \dot{e}_x + e_\theta^T \dot{e}_\theta + \boldsymbol{\varphi}^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \bar{\rho} \dot{\bar{\rho}} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_1\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_2\} \end{aligned} \quad (16)$$

将 $\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{x}^*$ 和式(14)代入式(16)，可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & e_x^T (\dot{x} - \dot{x}^*) + e_\theta^T (\Lambda e_\theta + \Delta\kappa) + \boldsymbol{\varphi}^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \bar{\rho} \dot{\bar{\rho}} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_1\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_2\} \end{aligned} \quad (17)$$

将式(1)和式(5)代入式(17)，可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & e_x^T [-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\eta} + \mathbf{Q}\hat{\rho}\beta + (\dot{x}^* - \dot{x}^*) + \Delta_1] - \\ & e_\theta^T \Lambda_m e_\theta + e_\theta^T (\Lambda + \Lambda_m) e_\theta + e_\theta^T \Delta\kappa + \boldsymbol{\varphi}^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \\ & \bar{\rho} \dot{\bar{\rho}} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_1\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_2\} \end{aligned} \quad (18)$$

式中， Λ_m 为对称正定矩阵，即其所有特征值都具有正实部。

将式(3)、式(6)和式(7)代入式(18)，并考虑到引理 1，可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -e_x^T \mathbf{P} e_x + e_x^T \mathbf{P} (\dot{x}^* - \dot{x}^*) + e_x^T \boldsymbol{\eta} + e_x^T \mathbf{Q}\hat{\rho}\beta + \\ & e_x^T \tilde{\mathbf{W}}_1^T (\hat{\mathbf{S}}_1 - \hat{\mathbf{S}}_1' \hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1) + e_x^T \hat{\mathbf{W}}_1' \hat{\mathbf{S}}_1' (\hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1) + \\ & e_x^T \mathbf{d}_{n1} - e_x^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 + e_x^T \Lambda_1 - e_\theta^T \Lambda_m e_\theta + \\ & e_\theta^T (\Lambda + \Lambda_m) e_\theta + e_\theta^T \Delta\kappa + \boldsymbol{\varphi}^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \bar{\rho} \dot{\bar{\rho}} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_1\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_1^T \Gamma_{V_1}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_1\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_2\} \end{aligned} \quad (19)$$

式中， $\mathbf{P} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K}$ 。

设计权重矩阵 $\hat{\mathbf{W}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{V}}_1$ 的自适应调节律为

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}}_1 = \Gamma_{W_1} [(\hat{\mathbf{S}}_1 - \hat{\mathbf{S}}_1' \hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1)(\dot{x}^* - \dot{x})^T - \sigma_{w_1} \hat{\mathbf{W}}_1] \quad (20)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{V}}}_1 = \Gamma_{V_1} [\mathbf{X}_1 (\hat{\mathbf{S}}_1' \hat{\mathbf{W}}_1' (\dot{x}^* - \dot{x}))^T - \sigma_{v_1} \hat{\mathbf{V}}_1] \quad (21)$$

式中， $\sigma_{w_1} > 0$ ， $\sigma_{v_1} > 0$ 为设计参数。

将式(4)、式(20)和式(21)代入式(19)，可得

$$\begin{aligned} \dot{L} = & -e_x^T \mathbf{P} e_x - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\varphi} + e_x^T \mathbf{P} (\dot{x}^* - \dot{x}^*) + \\ & e_x^T \boldsymbol{\eta} + e_x^T \mathbf{Q}\hat{\rho}\beta + e_x^T \tilde{\mathbf{W}}_1^T (\hat{\mathbf{S}}_1 - \hat{\mathbf{S}}_1' \hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1) + \\ & e_x^T \hat{\mathbf{W}}_1' \hat{\mathbf{S}}_1' (\hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1) + e_x^T \mathbf{d}_{n1} - e_x^T \boldsymbol{\varepsilon}_1 + e_x^T \Lambda_1 - \\ & e_\theta^T \Lambda_m e_\theta + e_\theta^T (\Lambda + \Lambda_m) e_\theta + e_\theta^T \Delta\kappa + \bar{\rho} \dot{\bar{\rho}} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_1^T [(\hat{\mathbf{S}}_1 - \hat{\mathbf{S}}_1' \hat{\mathbf{V}}_1^T \mathbf{X}_1)(\dot{x}^* - \dot{x})^T - \sigma_{w_1} \hat{\mathbf{W}}_1]\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_1^T [\mathbf{X}_1 (\hat{\mathbf{S}}_1' \hat{\mathbf{W}}_1' (\dot{x}^* - \dot{x}))^T - \sigma_{v_1} \hat{\mathbf{V}}_1]\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}_2^T \Gamma_{W_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}_2\} + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}_2^T \Gamma_{V_2}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}_2\} \end{aligned} \quad (22)$$

应用矩阵性质 $\text{tr}\{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma}^T\} = \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\alpha}$ ，可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{P})e_x^T e_x - \lambda_{\min}(\mathbf{T}^{-1})\boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} - \lambda_{\min}(\Lambda_m)e_\theta^T e_\theta + \\ & \|e_x\| \|\dot{x}^* - \dot{x}^*\| \|\mathbf{P}\|_F + \|e_x - \mathbf{Q}\| \|\boldsymbol{\eta}\| + \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\eta} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (e_x^T Q + 1)\hat{\rho}\beta + \|\hat{x}^* - x^*\| \|\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1)\| - \\ & \hat{\rho}\beta + \|\hat{x}^* - x^*\| \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1(\tilde{V}_1^T X_1)\| + \|x - x^*\| \|d_{u1}\| + \\ & \|x - x^*\| \|\varepsilon_1\| + \|x - x^*\| \delta_\Delta + e_\theta^T(\Lambda + \Lambda_m)e_\theta + \\ & e_\theta^T \Delta \kappa + \hat{\rho}\hat{\rho} - \sigma_{w_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \hat{W}_1\} - \sigma_{v_1} \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \hat{V}_1\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \Gamma_{w_2}^T \hat{W}_2\} + \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \Gamma_{v_2}^T \hat{V}_2\} \end{aligned} \quad (23)$$

式中, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵“ \cdot ”的最小特征值。

由于 e_θ, Λ 和 $\Delta \kappa$ 具有未知性, 因此采用理想的 3 层神经网络 $W_2^*{}^T S_2(V_2^*{}^T X_2)$ 对如下多项式进行近似:

$$\begin{aligned} & e_\theta^T(\Lambda + \Lambda_m)e_\theta + e_\theta^T \Delta \kappa + (e_x^T Q + 1)\hat{\rho}\beta = \\ & W_2^*{}^T S_2(V_2^*{}^T X_2) + \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (24)$$

式中, $X_2 = [x^T, y, \theta^T, \zeta^T, \hat{\rho}, \beta]^T$ 为此 3 层神经网络的输入向量; ε_2 为神经网络的逼近误差, 且 $|\varepsilon_2| \leq \varepsilon_{u2}$, 其中 ε_{u2} 为逼近误差 ε_2 的上界值。

设计参数 η 的形式如下:

$$\eta = -\frac{Q}{\|Q\|} [\hat{W}_2^T S_2(\hat{V}_2^T X_2)] \quad (25)$$

将式(24)和式(25)代入式(23), 并根据引理 1, 可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\lambda_{\min}(P)e_x^T e_x - \lambda_{\min}(T^{-1})\phi^T \phi - \lambda_{\min}(\Lambda_m)e_\theta^T e_\theta + \\ & \|x - x^*\| \|\hat{x}^* - x^*\| \|P\|_F + \|x - x^* - Q\| \|\eta\| - \\ & \hat{\rho}\beta + \|\hat{x}^* - x^*\| \|\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1)\| + \\ & \|\hat{x}^* - x^*\| \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1(\tilde{V}_1^T X_1)\| + \|x - x^*\| \|d_{u1}\| + \\ & \|x - x^*\| \|\varepsilon_1\| + \|x - x^*\| \delta_\Delta - \\ & \tilde{W}_2^T(\hat{S}_2 - \hat{S}'_2 \hat{V}_2^T X_2) - \hat{W}_2^T \hat{S}'_2(\tilde{V}_2^T X_2) - d_{u2} + \\ & \varepsilon_2 + \hat{\rho}\hat{\rho} - \sigma_{w_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \hat{W}_1\} - \sigma_{v_1} \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \hat{V}_1\} + \\ & \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \Gamma_{w_2}^T \hat{W}_2\} + \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \Gamma_{v_2}^T \hat{V}_2\} \end{aligned} \quad (26)$$

设计权重矩阵 \hat{W}_2 和 \hat{V}_2 的自适应调节律为

$$\dot{\hat{W}}_2 = \Gamma_{w_2} [(\hat{S}_2 - \hat{S}'_2 \hat{V}_2^T X_2) - \sigma_{w_2} \hat{W}_2] \quad (27)$$

$$\dot{\hat{V}}_2 = \Gamma_{v_2} [X_2(\hat{S}'_2 \hat{W}_2)^T - \sigma_{v_2} \hat{V}_2] \quad (28)$$

式中, $\sigma_{w_2} > 0, \sigma_{v_2} > 0$ 为设计参数。

将式(27)和式(28)代入式(26), 并考虑到 $\text{tr}\{\alpha\gamma^T\} = \gamma^T \alpha$ 和引理 1, 可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\lambda_{\min}(P)e_x^T e_x - \lambda_{\min}(T^{-1})\phi^T \phi - \lambda_{\min}(\Lambda_m)e_\theta^T e_\theta + \\ & \|x - x^*\| \|\hat{x}^* - x^*\| \|P\|_F + \|x - x^* - Q\| \|\eta\| - \\ & \hat{\rho}\beta + \|\hat{x}^* - x^*\| \|\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1)\| + \\ & \|\hat{x}^* - x^*\| \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1(\tilde{V}_1^T X_1)\| + \|x - x^*\| \|d_{u1}\| + \\ & \|x - x^*\| \|\varepsilon_1\| + \|x - x^*\| \delta_\Delta + \\ & \|V_2^*\|_F \|\hat{W}_2^T \hat{S}'_2\|_F \|X_2\| + \|W_2^*\|_F \|\hat{S}'_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F + \\ & \|W_2^*\|_F \sqrt{l} + \varepsilon_{u2} + \hat{\rho}\hat{\rho} - \sigma_{w_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \hat{W}_1\} - \\ & \sigma_{v_1} \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \hat{V}_1\} - \sigma_{w_2} \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \hat{W}_2\} - \sigma_{v_2} \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \hat{V}_2\} \end{aligned} \quad (29)$$

式中, l 为矩阵 \hat{V}_2 的行数。

由于存在如下不等式条件:

$$-\sigma_{w_1} \text{tr}\{\tilde{W}_1^T \hat{W}_1\} \leq \frac{\sigma_{w_1} \|W_1^*\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{w_1} \|\tilde{W}_1\|_F^2}{2}$$

$$\begin{aligned} -\sigma_{v_1} \text{tr}\{\tilde{V}_1^T \hat{V}_1\} & \leq \frac{\sigma_{v_1} \|V_1^*\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_1} \|\tilde{V}_1\|_F^2}{2} \\ -\sigma_{w_2} \text{tr}\{\tilde{W}_2^T \hat{W}_2\} & \leq \frac{\sigma_{w_2} \|W_2^*\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{w_2} \|\tilde{W}_2\|_F^2}{2} \\ -\sigma_{v_2} \text{tr}\{\tilde{V}_2^T \hat{V}_2\} & \leq \frac{\sigma_{v_2} \|V_2^*\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_2} \|\tilde{V}_2\|_F^2}{2} \end{aligned}$$

$$\|V_2^*\|_F \|\hat{W}_2^T \hat{S}'_2\|_F \|X_2\| \leq \frac{\|\hat{W}_2^T \hat{S}'_2\|_F^2 \|X_2\|^2}{\mu_1} + \frac{\mu_1 \|V_2^*\|_F^2}{4}$$

$$\|W_2^*\|_F \|\hat{S}'_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F \leq \frac{\|\hat{S}'_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F^2}{\mu_1} + \frac{\mu_1 \|W_2^*\|_F^2}{4}$$

$$\|W_2^*\|_F \sqrt{l} + \varepsilon_{u2} \leq \frac{2}{\mu_1} + \frac{l\mu_1 \|W_2^*\|_F^2}{4} + \frac{\mu_1 \varepsilon_{u2}^2}{4}$$

$$\|x - x^* - Q\| \|\eta\| \leq \frac{\mu_1 \|\hat{W}_2^T\|_F^2}{4 \|Q\|} +$$

$$\frac{(\|x - Q\| + X_u)^2 \|S_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F^2}{\mu_1 \|Q\|}$$

式中, $\mu_1 > 0$ 为取值较小的设计参数。

利用上述不等式关系, 此 Lyapunov 函数的微分值 \dot{L} 为

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\lambda_{\min}(P)e_x^T e_x - \lambda_{\min}(T^{-1})\phi^T \phi - \lambda_{\min}(\Lambda_m)e_\theta^T e_\theta + \\ & \|x - x^*\| \|\hat{x}^* - x^*\| \|P\|_F - \hat{\rho}\beta + \hat{\rho}\hat{\rho} + \\ & \|\hat{x}^* - x^*\| \|\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1)\| + \|x - x^*\| \|d_{u1}\| + \\ & \|\hat{x}^* - x^*\| \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1(\tilde{V}_1^T X_1)\| + \|x - x^*\| \|\varepsilon_1\| + \\ & \|x - x^*\| \delta_\Delta + \frac{\|\hat{W}_2^T \hat{S}'_2\|_F^2 \|X_2\|^2}{\mu_1} + \frac{\mu_1 \|V_2^*\|_F^2}{4} + \\ & \frac{\|\hat{S}'_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F^2}{\mu_1} + \frac{\mu_1 \|W_2^*\|_F^2}{4} + \frac{2}{\mu_1} + \\ & \frac{l\mu_1 \|W_2^*\|_F^2}{4} + \frac{\mu_1 \varepsilon_{u2}^2}{4} + \frac{\mu_1 \|\hat{W}_2^T\|_F^2}{4 \|Q\|} + \\ & \frac{(\|x - Q\| + X_u)^2 \|S_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F^2}{\mu_1 \|Q\|} + \frac{\sigma_{w_1} \|W_1^*\|_F^2}{2} - \\ & \frac{\sigma_{w_1} \|\tilde{W}_1\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_1} \|V_1^*\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_1} \|\tilde{V}_1\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{w_2} \|W_2^*\|_F^2}{2} - \\ & \frac{\sigma_{w_2} \|\tilde{W}_2\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_2} \|V_2^*\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_2} \|\tilde{V}_2\|_F^2}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

定义参数 ρ^* 和 β 为

$$\begin{aligned} \rho^* = & \max\{\|\hat{x}^* - x^*\| \|\tilde{W}_1^T(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{V}_1^T X_1)\|, \\ & \|x - x^*\| \|\hat{x}^* - x^*\|, \|\hat{x}^* - x^*\| \|\hat{W}_1^T \hat{S}'_1(\tilde{V}_1^T X_1)\|, \\ & \|x - x^*\| \|d_{u1}\|, \|x - x^*\| \|\varepsilon_1\|, \|x - x^*\| \delta_\Delta, \\ & \|\hat{W}_2^T \hat{S}'_2\|_F^2 \|X_2\|^2, \|V_2^*\|_F^2, \|\hat{S}'_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F^2, \\ & \|W_2^*\|_F^2, l \|W_2^*\|_F^2, \varepsilon_{u2}^2, \|\hat{W}_2^T\|_F^2, \\ & (\|x - Q\| + X_u)^2 \|S_2(\hat{V}_2^T X_2)\|_F^2\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\psi = \max\left\{\|P\|_F, 1, \frac{1}{\mu_1}, \frac{\mu_1}{4}, \frac{\mu_1}{4 \|Q\|}, \frac{1}{\mu_1 \|Q\|}\right\} \quad (32)$$

$$\beta = 14 \psi \quad (33)$$

将式(31)和式(33)代入式(30), 可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\lambda_{\min}(P)e_x^T e_x - \lambda_{\min}(T^{-1})\phi^T \phi - \lambda_{\min}(\Lambda_m)e_\theta^T e_\theta - \\ & \hat{\rho}\beta + \hat{\rho}\hat{\rho} + \rho^* \beta - \frac{\sigma_{w_1} \|\tilde{W}_1\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_1} \|\tilde{V}_1\|_F^2}{2} - \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{w_2} \|\tilde{W}_2\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_2} \|\tilde{V}_2\|_F^2}{2} + \frac{2}{\mu_1} + \frac{\sigma_{w_1} \|\mathbf{W}_1^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_1} \|\mathbf{V}_1^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{w_2} \|\mathbf{W}_2^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_2} \|\mathbf{V}_2^*\|_F^2}{2} \quad (34)$$

由于 $\tilde{\rho} = \hat{\rho} - \rho^*$, 设计参数 $\tilde{\rho}$ 的调节律为

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\mu_2 \tilde{\rho} + \beta \quad (35)$$

式中, $\mu_2 > 0$ 为设计参数。

将式(35)代入式(34), 可得

$$\begin{aligned} \dot{L} \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{P})\mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_x - \lambda_{\min}(\mathbf{T}^{-1})\boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} - \lambda_{\min}(\mathbf{A}_m)\mathbf{e}_\theta^T \mathbf{e}_\theta - \\ & \mu_2 \tilde{\rho}^2 - \frac{\sigma_{w_1} \|\tilde{W}_1\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{v_1} \|\tilde{V}_1\|_F^2}{2} - \frac{\sigma_{w_2} \|\tilde{W}_2\|_F^2}{2} - \\ & \frac{\sigma_{v_2} \|\tilde{V}_2\|_F^2}{2} + \frac{2}{\mu_1} + \frac{\sigma_{w_1} \|\mathbf{W}_1^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_1} \|\mathbf{V}_1^*\|_F^2}{2} + \\ & \frac{\sigma_{w_2} \|\mathbf{W}_2^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_2} \|\mathbf{V}_2^*\|_F^2}{2} \leq -k_\Sigma L + b_\Sigma \quad (36) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} k_\Sigma = & \min\{2\lambda_{\min}(\mathbf{P}), 2\lambda_{\min}(\mathbf{T}^{-1}), 2\lambda_{\min}(\mathbf{A}_m), \\ & 2\mu_2 \cdot \frac{\sigma_{w_1}}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_{W_1}^{-1})} \cdot \frac{\sigma_{v_1}}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_{V_1}^{-1})} \cdot \frac{\sigma_{w_2}}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_{W_2}^{-1})} \cdot \frac{\sigma_{v_2}}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_{V_2}^{-1})}\} \\ b_\Sigma = & \frac{2}{\mu_1} + \frac{\sigma_{w_1} \|\mathbf{W}_1^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_1} \|\mathbf{V}_1^*\|_F^2}{2} + \\ & \frac{\sigma_{w_2} \|\mathbf{W}_2^*\|_F^2}{2} + \frac{\sigma_{v_2} \|\mathbf{V}_2^*\|_F^2}{2} \end{aligned}$$

为有界常数。

根据式(36), 可得

$$L(t) \leq L(0)e^{-k_\Sigma t} + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma} \leq L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}, \forall t \geq 0 \quad (37)$$

定义

$$\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_W^{-1}) = \min\{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_{W_1}^{-1}), \lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_{W_2}^{-1})\} \quad (38)$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_V^{-1}) = \min\{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_{V_1}^{-1}), \lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_{V_2}^{-1})\} \quad (39)$$

考虑式(15), 可得

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 = \|\mathbf{e}_x\|^2 \leq 2\left(L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}\right) \quad (40)$$

$$\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*\|^2 = \|\mathbf{e}_\theta\|^2 \leq 2\left(L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}\right) \quad (41)$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|^2 \leq 2\left(L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}\right) \quad (42)$$

$$\tilde{\rho}^2 \leq 2\left(L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}\right) \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^2 \|\tilde{W}_i\|_F^2 \leq \frac{2\left(L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}\right)}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_W^{-1})} \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^2 \|\tilde{V}_i\|_F^2 \leq \frac{2\left(L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}\right)}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_V^{-1})} \quad (45)$$

由式(37)、式(40)~式(45)可知此闭环系统的所有误差信号均有界。采用此基于神经网络的自适应协同控制方

法构成的闭环系统结构图, 如图 2 所示。

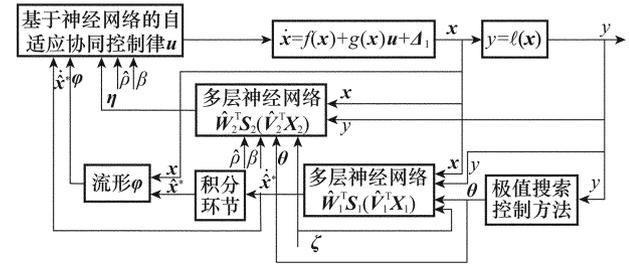


图 2 基于神经网络的自适应协同控制方法构成的闭环系统结构图
基于上述推导, 可得如下结论:

定理 1 针对仿射型多变量极值搜索系统模型(1), 在满足假设 1~2 的前提下, 设计基于神经网络的自适应协同控制律 \mathbf{u} 如式(5)所示, 则闭环极值搜索系统的状态跟踪误差 \mathbf{e}_x 、搜索误差 \mathbf{e}_θ 、流形 $\boldsymbol{\varphi}$ 、参数估计误差 $\tilde{\rho}$ 以及权重估计误差 \tilde{W}_1 、 \tilde{V}_1 、 \tilde{W}_2 和 \tilde{V}_2 均有界, 且指数收敛至原点的有界可邻域 Ω 内, 其中 Ω 为

$$\begin{aligned} \Omega = & \left\{ \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_\theta, \boldsymbol{\varphi}, \tilde{\rho}, \tilde{W}_1, \tilde{V}_1, \tilde{W}_2, \tilde{V}_2 \mid \|\mathbf{e}_x\|^2 \leq 2\bar{L}, \right. \\ & \left. \|\mathbf{e}_\theta\|^2 \leq 2\bar{L}, \|\boldsymbol{\varphi}\|^2 \leq 2\bar{L}, \tilde{\rho}^2 \leq 2\bar{L}, \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^2 \|\tilde{W}_i\|_F^2 \leq \frac{2\bar{L}}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_W^{-1})}, \sum_{i=1}^2 \|\tilde{V}_i\|_F^2 \leq \frac{2\bar{L}}{\lambda_{\min}(\mathbf{\Gamma}_V^{-1})} \right\} \quad (46) \end{aligned}$$

式中, $\bar{L} = L(0) + \frac{b_\Sigma}{k_\Sigma}$ 。

注 1 由式(36)可知, 通过设计参数 \mathbf{P} 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{A}_m 、 μ_2 、 $\mathbf{\Gamma}_{W_1}$ 、 $\mathbf{\Gamma}_{V_1}$ 、 $\mathbf{\Gamma}_{W_2}$ 、 $\mathbf{\Gamma}_{V_2}$ 等, 可以改变参数 k_Σ 的大小, 从而调节有界收敛邻域 Ω 的范围。

根据定理 1, 由系统状态轨迹向流形 $\boldsymbol{\varphi}$ 的动态演变规律式(4)可知, 无论仿射型多变量极值搜索系统模型(1)的初始状态如何, 流形 $\boldsymbol{\varphi}$ 都会从初始状态趋近超曲面 $\boldsymbol{\varphi} = 0$, 其中趋近速度由矩阵 \mathbf{T} 决定, 若 \mathbf{T} 越小则状态变量到达流形 $\boldsymbol{\varphi}$ 的时间越短, 动态性能越好。

当状态变量趋向于超曲面 $\boldsymbol{\varphi} = 0$ 时, 任何的系统内部参数扰动和外界干扰都不会影响状态变量 \mathbf{x} 的运动, 它们始终会沿着超曲面 $\boldsymbol{\varphi}$ 收敛于状态变量极值的估计值 $\hat{\mathbf{x}}^*$ 。由于仿射型多变量极值搜索系统模型(1)存在未知的输出函数 $\ell(\mathbf{x})$, 导致无法直接获取状态变量的极值 \mathbf{x}^* 。然而, 根据定理 1 可知, 估计值 $\hat{\mathbf{x}}^*$ 将指数收敛于极值 \mathbf{x}^* 的有界邻域 Ω 内, 因此系统状态变量 \mathbf{x} 也会沿着超曲面 $\boldsymbol{\varphi} = 0$ 指数收敛于极值 \mathbf{x}^* 的有界邻域 Ω 内。此外, 根据系统输出函数 $y = \ell(\mathbf{x})$ 可知, 状态变量的极值 \mathbf{x}^* 对应于输出量的极值 y^* , 当状态变量 \mathbf{x} 收敛于极值 \mathbf{x}^* 的有界邻域 Ω 内, 输出量 y 也将收敛于极值 y^* 的有界邻域内。

因此, 应用本文提出的基于神经网络的自适应协同控制方法可使仿射型多变量极值搜索系统的状态变量 \mathbf{x} 按照既定的协同收敛条件(如超曲面 $\boldsymbol{\varphi} = 0$)收敛于其极值 \mathbf{x}^* 的有界邻域内, 且输出量 y 也将收敛于其极值 y^* 的有界邻域内。

5 仿真分析

针对如下仿射型多变量极值搜索系统：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2\sin(0.5t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + 0.1x_3 \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.3 \\ 0.2\sin(0.1t) \end{bmatrix} \\ y = -10(x_1 - 2)^2 - 5(x_2 + 8)^2 + 20 \end{cases} \quad (47)$$

式中, $\mathbf{x}=[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 为系统状态变量; y 为系统输出量; $\mathbf{u}=[u_1, u_2]^T$ 为系统输入量; 外界干扰 $\mathbf{\Delta}_1=[0, 0, 0, 0.3, 0.2\sin(0.1t)]^T$ 。显然, 当状态变量 $x_1^*=2, x_2^*=-8, x_3^*=0$ 和 $x_4^*=0$ 时, 输出量具有最大值 $y^*=20$ 。控制目标是要求状态变量 $\mathbf{x}=[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 分别沿着轨迹 $3(x_1 - x_1^*) - (x_2 - x_2^*)=0$ 和 $2(x_3 - x_3^*) - (x_4 - x_4^*)=0$ 收敛至各自的极值点, 并且输出量 y 收敛于它的极值点 y^* 。

分别采用本文提出的基于神经网络的自适应协同控制方法和文献[14]中的退火递归神经网络极值搜索控制方法, 对研究对象(47)进行仿真对比。当采用本文提出的控制方法时, 设计参数分别选取为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{\Gamma}_{w_1} = \text{diag}\{2, 0\}_{7 \times 7}, \mathbf{\Gamma}_{v_1} = \text{diag}\{0.5\}_{7 \times 7}, \mathbf{\Gamma}_{w_2} = \text{diag}\{1, 5\}_{9 \times 9}, \mathbf{\Gamma}_{v_2} = \text{diag}\{1, 0\}_{9 \times 9}, \sigma_{w_1} = 0.1, \sigma_{v_1} = 0.05, \sigma_{w_2} = 0.1, \sigma_{v_2} = 0.02, \hat{\rho} = 5, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.1$ 。同时, 对退火递归神经网络极值搜索控制方法也选取合适的调节参数。当研究对象(47)的初始条件为 $\mathbf{x}=[-2, -4, 0, 0]^T$ 时, 分别应用此两种方法得到的结果如图 3~图 11 所示。

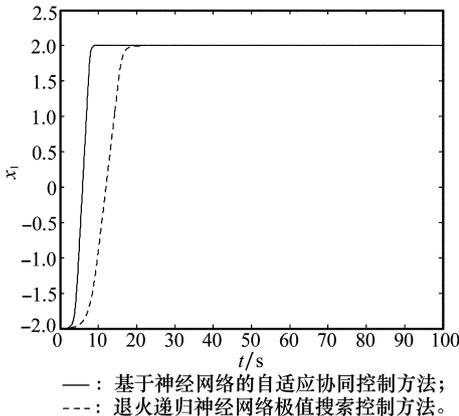


图 3 状态变量 x_1 的仿真结果

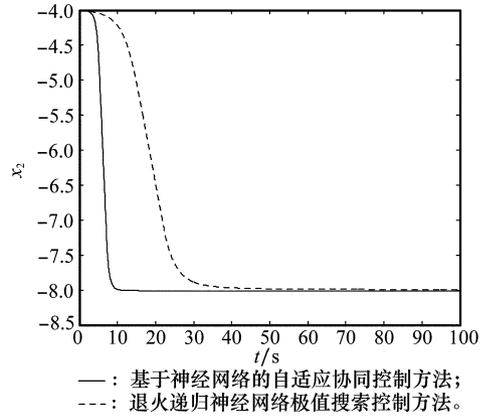


图 4 状态变量 x_2 的仿真结果

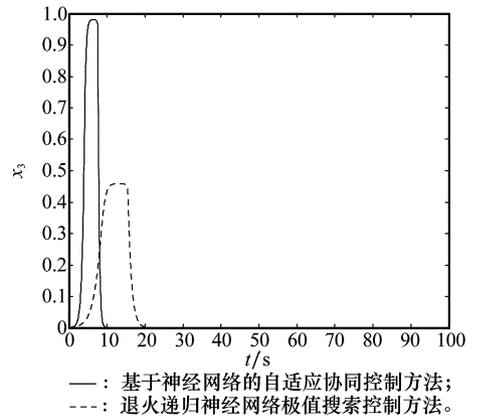


图 5 状态变量 x_3 的仿真结果

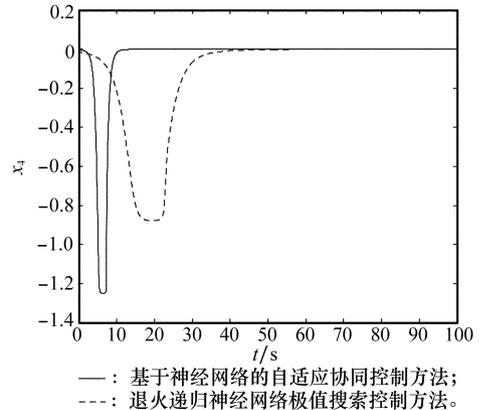


图 6 状态变量 x_4 的仿真结果

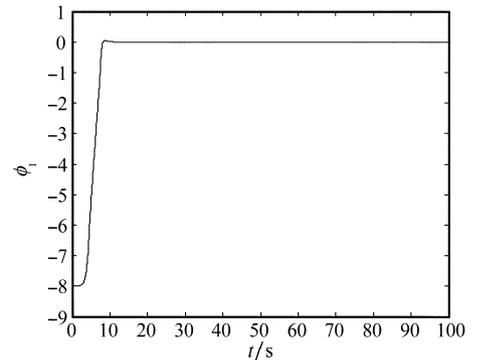
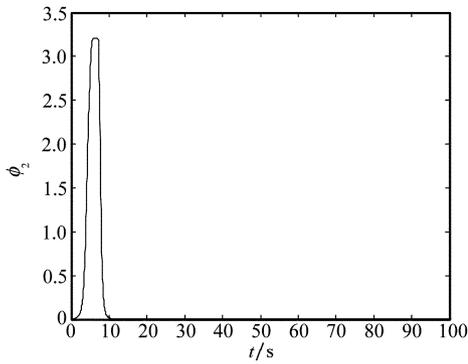
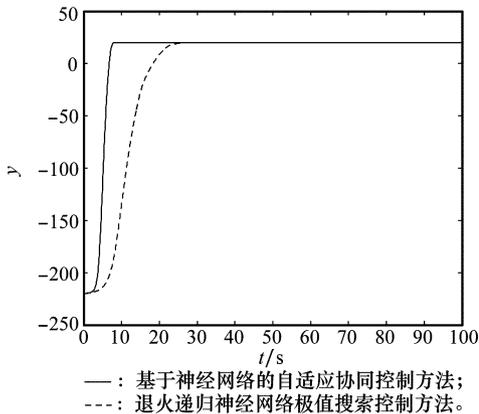
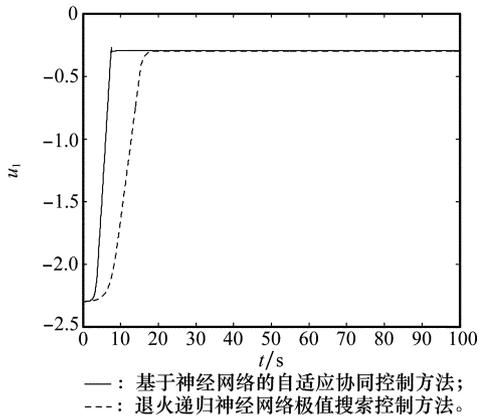
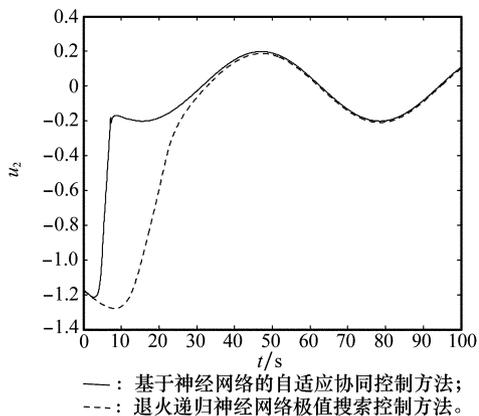


图 7 波形 ϕ_1 的仿真结果

图8 流形 φ_2 的仿真结果图9 输出量 y 的仿真结果图10 控制量 u_1 的仿真结果图11 控制量 u_2 的仿真结果

根据仿真结果图3~图11可知,在基于神经网络的自适应协同控制方法的系统中状态变量都能较快地收敛至各自的极值点,且输出量也能趋向它的极值点。外界干扰 Δ_1 并没有影响系统的动态性能和稳定性,说明本文提出的控制方法具有较好的鲁棒性。此外,如图7和图8所示,按照研究对象(47)的设计要求制定的流形 φ_1 和 φ_2 都能够以规定的速率收敛至零点。然而,在文献[14]的控制方法中不能进行流形 φ_1 和 φ_2 的设计,因此就不存在流形 φ_1 和 φ_2 的仿真对比结果。虽然,应用文献[14]的控制方法也能使系统在受到外界干扰的条件下处于稳定,但是比较而言,当采用本文提出的控制方法时,系统具有更快的收敛速率,其主要原因在于:系统状态变量能够按照指定的流形 φ_1 和 φ_2 趋于极值点,状态变量的收敛速率具有协同不变性,且不会受到外界的任何影响。因此,这也说明协同控制可使系统具有更快的收敛速率和更强的鲁棒性。

6 结论

针对一类仿射型多变量极值搜索系统的协同控制问题,提出了基于神经网络的自适应协同控制方法。该方法将状态变量之间的协同收敛关系转化为系统的流形设计,且通过设计3层神经网络来逼近状态变量的极值变化率和未知的变量与函数,使得极值搜索系统在不需要已知期望跟踪轨迹的情况下,系统输出量收敛于其极值的有界邻域内,且所得闭环系统的所有误差信号均指数收敛至原点的一个有界邻域,同时该方法对于系统内部参数扰动和外界干扰都具有很好的鲁棒性。

参考文献:

- [1] Fu L N, Özgüner Ü. Extremum-seeking control in constrained source tracing with nonholonomic vehicles[J]. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 2009, 56(9): 3602-3608.
- [2] Antonello R, Oboe R, Prandi L, et al. Automatic mode matching in MEMS vibrating gyroscopes using extremum-seeking control[J]. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 2009, 56(10): 3880-3891.
- [3] Ariyur K B. Multiparameter extremum seeking and applications to propulsion and aerodynamics problems [D]. San Diego: University of California, 2002.
- [4] Chen B, Liu X P, Liu K F, et al. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear strict-feedback systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(6): 1530-1535.
- [5] Liu Y J, Wang W, Tong S C, et al. Robust adaptive tracking control for nonlinear systems based on bounds of fuzzy approximation parameters[J]. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, 2010, 40(1): 170-184.
- [6] Hu J B, Xin H L. The gain-scheduled variable-structure tracking control of nonlinear systems with dead-zones and norm-bounded uncertainties [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(6): 708-714. (胡剑波, 辛海良. 含有不灵敏区非线性系统的增益调度自适应变结构控制[J]. 控制理论与应用,

- 2010, 27(6): 708–714.)
- [7] Hung Y C, Liao T L, Yan J J. Adaptive variable structure control for chaos suppression of unified chaotic systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 209(2): 391–398.
- [8] Chen W S, Jiao L C. Adaptive tracking for periodically time-varying and nonlinearly parameterized systems using multilayer neural networks[J]. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 2010, 21(2): 345–351.
- [9] Dalamagkidis K, Valavanis K P, Piegel L A. Nonlinear model predictive control with neural network optimization for autonomous autorotation of small unmanned helicopters[J]. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2011, 19(4): 818–831.
- [10] Jiang Z H. Design of a nonlinear power system stabilizer using synergetic control theory[J]. *Electric Power Systems Research*, 2009, 79(6): 855–862.
- [11] Kondratiev I, Santi E, Dougal R, et al. Robust nonlinear synergetic control for m-parallel-connected DC-DC boost converters [C] // *Proc. of the Power Electronics Specialists Conference*, 2008: 2222–2228.
- [12] Bizon N. On tracking robustness in adaptive extremum seeking control of the fuel cell power plants[J]. *Applied Energy*, 2010, 87(10): 3115–3130.
- [13] Hu Y A, Zuo B, Li J. Applying an improved extremum seeking algorithm based on ARNN to calculating the equilibrium states of a class of saucer-like air vehicles[J]. *Acta Armamentarii*, 2008, 29(3): 341–347. (胡云安, 左斌, 李静. 基于退火递归神经网络的极值搜索优化算法求解一类碟式飞行器平衡状态[J]. *兵工学报*, 2008, 29(3): 341–347.)
- [14] Hu Y A, Zuo B, Li J. A novel chaotic annealing recurrent neural network for multi-parameters extremum seeking algorithm [C] // *Proc. of the 13th International Conference on Neural Information Processing*, 2006: 1022–1031.
- [15] Cochran J, Siranosian A, Ghods N, et al. 3D source seeking for underactuated vehicles without position measurement[J]. *IEEE Trans. on Robotics*, 2009, 25(1): 117–129.
- [16] Cochran J, Krstic M. Nonholonomic source seeking with tuning of angular velocity[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2009, 54(4): 717–731.
- [17] Liu S J, Krstic M. Stochastic averaging in continuous time and its applications to extremum seeking[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2235–2250.
- [18] Liu S J, Krstic M. Stochastic source seeking for nonholonomic unicycle[J]. *Automatica*, 2010, 46(9): 1443–1453.
- [19] Liu S J, Krstic M. Stochastic nash equilibrium seeking for games with general nonlinear payoffs[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2011, 49(4): 1659–1679.
- [20] Zhang T, Ge S S, Hang C C. Design and performance analysis of a direct adaptive controller for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(11): 1809–1817.

作者简介:

左 斌(1979–),男,讲师,博士,主要研究方向为自适应控制、非线性控制。

E-mail: zuobin97117@163.com

李 静(1977–),通信作者,女,讲师,博士,主要研究方向为飞行器建模与控制、非线性控制、图像识别。

E-mail: lijing19772006@yahoo.com.cn

黄宏林(1968–),男,副教授,主要研究方向为系统建模与仿真。

E-mail: hh_l_sacc@163.com