中国科学院研究生院
2007年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（甲）

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、填空题(本题满分30分，每个空格6分。请将你的答案标清题号写在考场发的答题纸上，直接填在试题空格内无效。)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}=$（　　　　　　）。

2. 设函数 $f(x,y)$ 可微， $f(0,0)=0,\ \ f'_x(0,0)=m$， $f'_y(0,0)=n$， $\varphi(t)=f(t,f(t,t))$，则 $\varphi'(0)=$（　　　　　　）。

3. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}=$（　　　　　　）。

4. 微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 的满足 $y(1)=2$ 的解为（　　　　　　）。

5. 设 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦，则 $\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS=$(　　　　　　　　)。

二、选择题 (本题满分30分，每小题6分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{e^{x-1}-a}(\dfrac{1}{x}-b), & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$。若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则______________。

A．$a=0,b=1$；　B. $a=1,b=-1$；　C. $a=-1,b=1$；　D. $a=1,b=0$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 处二阶可导，且 $f(x_0)=g(x_0)=0,\ f'(x_0)\cdot g'(x_0)>0$，则 ______________。

A. x_0 不是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点

B. x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点，但不是 $f(x)\cdot g(x)$ 的极值点

C. x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点，且是它的极小值点

D. x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点，且是它的极大值点

3. 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2a-x)(a\neq 0)$，c 为任意常数，则 $\int_{-c}^{c} f(a-x)dx=$______________。

A. $2\int_0^c f(2a-x)dx$　　B. $2\int_{-c}^c f(2a-x)dx$

C. 0　　D. $2\int_0^c f(a-x)dx$

4. 点 $P_1(-2,3,1)$ 关于直线 L：$x=y=z$ 的对称点 P_2 的坐标是__________。

A. $(-\frac{2}{3},1,\frac{1}{3})$　　B. $(\frac{2}{3},-1,-\frac{1}{3})$

C. $(-\frac{10}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3})$　　D. $(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2n}=$______________，$(n=1,2,\cdots)$。

A．0　　B. π　　C. $\frac{1}{\pi}$　　D. $\frac{4}{\pi}$

三、**(**本题满分 10 分) 已知 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，又

$$\varphi(x)=\begin{cases} f'(0), & x=0 \\ \dfrac{e^x}{x} f(x), & x\neq 0 \end{cases},$$

求 $\varphi'(x)$。

四、(本题满分 10 分) 求满足 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$ 的可微函数 $f(x)$。

五、**(**本题满分 10 分) 若 $u=f(xyz),\ f(0)=0,\ f'(1)=1$，且 $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2 f'''(xyz)$，求函数 u。

六、**(**本题满分 10 分) 设 L 是分段光滑的简单闭曲线，且点 $(2,0),\ (-2,0)$ 均在闭曲线 L 所围区域的内部，计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]dy,$$

其中 L 取正向。

七、(本题满分 10 分) 求方程 $4x^4y'''-4x^3y''+4x^2y'=1$ 的形如 $y=ax^{-1}$ 的特解，进而求该方程的通解。

八、(本题满分 10 分) 在曲线 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上找一个位于第一象限的点，使得该曲线在该点处的切线与该曲线、以及 x 轴和 y 轴所围成的图形面积最小，并求此最小面积。

九、(本题满分 10 分) 证明：$\frac{\pi(R^2-r^2)}{R+K}\le\iint\limits_D\frac{d\sigma}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\le\frac{\pi(R^2-r^2)}{r-K}$，其中 $0<K=\sqrt{a^2+b^2}<r<R$，$D:r^2\le x^2+y^2\le R^2$。

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明在区间 $[0,1]$ 上存在两点 x_1,x_2，使 $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$。

十一、(本题满分 10 分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项 $u_n>0, n=1,2,\cdots$，$\{v_n\}$ 为一正实数数列，记 $a_n=\frac{u_nv_n}{u_{n+1}}-v_{n+1}$，证明：如果 $\lim_{x\to\infty}a_n=a$，且 a 为有限正数或正无穷，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。