

基于 Monte Carlo 方法的 PERT 网络关键路线和最关键活动分析

王卓甫, 丁继勇, 刘媛, 刘迅

(河海大学工程管理研究所, 江苏南京 210098)

摘要: 在定义计划评审技术(program evaluation and review technique, PERT)网络局部关键活动、关键活动、关键路线和活动关键度的基础上,提出了关键活动、关键路线的分析方法;根据活动不确定性对项目计划工期影响的大小,即活动敏感性指标的大小,确定活动在项目进度控制中的重要程度;在定义活动相对敏感性、活动敏感性的基础上,利用全概率公式,得到活动敏感性指标计算公式,进而提出了最关键活动分析方法。算例表明,利用本研究提出的方法可便捷地找出 PERT 网络的关键路线和最关键活动。

关键词: 计划评审技术; 关键路线; 关键活动; 活动敏感性; 蒙特卡罗方法

中图分类号: C 935; TL 372+.3

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2012.08.21

Analysis of critical path and most critical activity in PERT networks based on Monte Carlo method

WANG Zhuo-fu, DING Ji-yong, LIU Yuan, LIU Xun

(Institute of Engineering Management, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: On the basis of defining local critical activity, critical activity, critical path and activity criticality of the program evaluation and review technique (PERT) networks, the analysis methods of critical path and critical activity are put forward. According to the extent of influence on the planned project duration caused by the activity uncertainty, namely, the activity sensitivity index, the importance of each activity in project control is analyzed. After defining the activity relative sensitivity and activity sensitivity, by using the total probability theorem, the calculation formula of activity sensitivity index is created to further put forward the analysis method of the most critical activity. Example analysis shows that the critical path and the most critical activity in PERT networks can be easily identified with the proposed methods.

Keywords: program evaluation and review technique (PERT); critical path; critical activity; activity sensitivity; Monte Carlo (MC) method

0 引言

项目活动逻辑关系和持续时间均确定的进度网络计划一般称为肯定型网络计划或关键路径法(critical path method, CPM),其较为简单,相关研究也较为成熟,但以 CPM 网络作为项目的进度分析工具与实际并不十分相符,主要问题是一些项目活动的持续时间存在一定的不确定性。Malcolm 提出的计划评审技术(program evaluation and review technique, PERT),其假定项目各活动逻辑关系确定,而完成活动的持续时间具有不确定性,用其作为项目的

进度分析工具较为适当,因而受到项目管理者 and 学者们的重视,并将活动逻辑关系确定、持续时间不确定的进度网络简称为 PERT 网络。

经典 PERT 网络分析方法的假设条件极为苛刻,并用活动的期望持续时间和方差来估计 PERT 网络活动的时间参数,用期望关键路线的期望值和方差来分析项目完工的可能性(概率)。很多项目难以满足这些假设条件,因而难以应用该方法作进度分析。经典 PERT 网络分析方法的这一缺陷已被项目管理者 and 学者们所认识。文献[1]提出了用蒙特卡罗(Monte Carlo, MC)方法分析 PERT 网络;文献

收稿日期:2011-09-18; 修回日期:2012-05-21。

基金项目:江苏省重点学科资助项目(工程管理与项目管理);江苏省重点学科暨国家重点学科培育建设点建设项目(技术经济及管理)资助课题

作者简介:王卓甫(1957-),男,教授,博士,博士研究生导师,主要研究方向为项目管理、风险管理。E-mail:zfwang@hhu.edu.cn

[2]定义了 PERT 网络关键路线指数和活动关键指数/度的概念,但没有提出相应的分析计算方法;文献[3]则在 Martin 研究成果的基础上,基于 MC 方法,给出了 PERT 网络关键路线指数和关键活动指数计算程序。进入新世纪后,相关研究,特别是 PERT 网络活动的敏感性分析日益受到重视;文献[4-7]分别从不同视角研究了 PERT 网络的敏感性问题;文献[8]研究了 PERT 网络中非关键活动的敏感性问题,但对位于关键路线上的最关键活动缺乏研究,而事实上,PERT 网络关键路线上关键活动的关键度是不一样的;文献[9]仅在 CPM 网络平台上研究了活动持续时间变化时,其对项目计划工期影响的敏感性,对 PERT 网络平台上的相应问题则没有涉及。

上述研究成果对促进 PERT 网络技术的发展起到了积极的作用,但在实际项目应用中人们更希望通过对 PERT 网络关键路线、关键活动对计划/规定工期的敏感性等的分析,能找出对项目计划工期影响最大的关键活动,并根据各项活动对项目计划工期的影响程度,对活动作出排序,以便项目管理人员能抓住重点对项目进度进行控制。目前,在项目管理领域,MC 方法的应用正逐渐得到普及。该方法借助计算机的高速运转能力实现了简单、快速两大优点,且其收敛速度不受问题维数或复杂性增加的影响,因而具有很强的适应性,在处理大型复杂问题时具有较大优势。随着计算机技术的发展,计算速度不断提升,用 MC 方法分析复杂的 PERT 网络同样显示出较强的生命力。鉴于此,本文拟在现有研究成果的基础上,利用 MC 方法在完善 PERT 网络关键路线分析方法和最关键活动分析方法等方面作一探讨。

1 关键活动、关键路线和活动关键度分析

Soroush 于 1994 年首次提出了最关键路线(most critical path, MCP)的概念,其将 MCP 定义为:在 PERT 网络的所有路线中,某一条路线持续时间长于其他路线持续时间的概率,大于其他路线持续时间长于该路线持续时间的概率,则该条路线称为最关键路线^[10]。MCP 反映了 PERT 网络的随机和概率特性。本文借用这一概念,定义 PERT 网络局部关键活动,并用 Martin 提出的活动关键度的概念,进而定义 PERT 网络关键路线。

1.1 关键活动、关键路线和活动关键度的定义

方便起见,首先界定 PERT 网络的相关概念。在具有 n 个节点的 PERT 网络中(双代号网络),节点 1 称为起始节点,节点 n 称为终点节点,其余节点均为中间节点。对网络中某活动 $i-j$, i 为开始节点, j 为完成节点。从起始节点 1 到中间节点 $j(1 < j < n)$ 之间的各项活动和各条路线形成一个子网络,称为以节点 j 为终点节点的子网络。

定义 1 局部关键活动、关键活动和关键路线

对具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络,在以节点 $j(1 < j < n)$ 为终点节点的子网络中,存在 k 项($k \geq 2$)活动汇入节点 j (以节点 j 为完成节点),它们形成一个活动集合 $\{i-j\}$,此集合中的活动 $i-j(i < j)$ 所在路线 $r_j^b(b=1,2,\dots,k)$ 的持续时间记为 T_j^b ,节点 j 的计划完成时间记为 T_j ,若在该子网络的各项路线中,存在路线 r_j^c 的持

续时间 T_j^c 满足式(1)条件,则称路线 r_j^c 为该子网络的主导路线,其在集合 $\{i-j\}$ 中对应的活动称为节点 j 的局部关键活动。

$$P(T_j \leq T_{j^b}) < P(\max \{T_j^b\} \leq T_{j^b}) \\ b = 2, 3, \dots, k; b \neq c \quad (1)$$

局部关键活动是相对于整个 PERT 网络而言的。显然,对某子网络中的局部关键活动,其相对于该子网络本身而言就是关键活动。考虑 $j=n$ 的特殊情况,此时对应的子网络就是整个 PERT 网络本身,因此节点 n 的局部关键活动就是整个 PERT 网络的关键活动,简称关键活动。不难发现,节点 n 的局部关键活动依次向前连接的各节点的局部关键活动均为关键活动。从起始节点 1 到终点节点 n 依次连接各关键活动的路线称为 PERT 网络的关键路线。此外,当 $k=1$,即仅有 1 项活动汇入节点 j 时,此项活动自然就是该节点的局部关键活动。

由定义 1 可知,各中间节点均可能存在两项或两项以上的局部关键活动。同样,PERT 网络也可能存在多条关键路线。对某节点或整个网络,在该节点或整个网络的计划工期确定的条件下,局部关键活动依次所连路线或关键活动依次所连路线的完工概率分别小于其他路线的完工概率。

定义 2 活动关键度

对具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络,用 MC 方法模拟 N 次,若活动 $(i-j)$ 落在关键路线上的次数为 M_{ij} ,则定义 $\frac{M_{ij}}{N}$ 为活动 $(i-j)$ 的关键度,记为 ACI_{ij} ,可表达为

$$A = \frac{M_{ij}}{N} \quad (2)$$

对定义 2,当模拟次数 N 足够大时, $\frac{M_{ij}}{N}$ 近似为活动 $(i-j)$ 落在关键路线上的概率。

1.2 PERT 网络关键路线分析

定理 1 关键路线识别定理

对具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络,在所有汇入终点节点 n 的活动中,关键度最大的活动为关键活动,即以节点 n 为完成节点的活动集合 $\{j-n\}$ 中,关键活动的关键度指标 ACI_{jn} 满足: $ACI_{jn} = \max \{ACI_{jn}\}$;逆箭头方向沿该关键活动找到上一节点 $j(j < n)$,则在所有汇入节点 j 的活动中,关键度最大的活动为关键活动,即以节点 j 为完成节点的活动集合 $\{i-j\}$ 中,关键活动的关键度指标 ACI_{ij} 满足: $ACI_{ij} = \max \{ACI_{ij}\}$;逆箭头方向沿关键活动 $i-j$ 找到上一节点 i 。用同样方法,根据 $\max \{ACI_{hi}\}$ ($h < i$) 逆箭头方向依次确定节点 i 前的各项关键活动,一直找到起始节点 1;然后沿箭头方向顺序连接节点 1, \dots , i , j , n ,即为 PERT 网络的关键路线。

当汇入某节点存在两项或两项以上活动的 ACI 相同,且大于其他活动的 ACI 时,则存在两项或两项以上关键活动。

证明 对整个 PERT 网络,其关键路线最终必定到达终点节点 n ,因此,以终点节点 n 为完成节点的活动集合

$\{j-n\}$ 中,必定有一项活动是关键活动。根据定义 2,当利用 MC 方法对 PERT 网络模拟 N 次且 N 足够大时,活动关键度 ACI 近似为活动落在关键路线上的概率。因此,根据定义 1 和定义 2,满足 $ACI_{j_n}^c = \max \{ACI_{j_n}\}$ 的活动 $(j-n)$ 为关键活动。

同理,根据定义 1 和定义 2,可知:满足 $ACI_{ij} = \max \{ACI_{ij}\}$ 的活动为节点 j 的局部关键活动,而又因为节点 j 在关键路线上,因此,在以节点 j 为完成节点的活动集合 $\{i-j\}$ 中,满足 $ACI_{ij}^c = \max \{ACI_{ij}\}$ 的活动 $(i-j)$ 为关键活动。

依此类推,可证明定理 1 的其他部分。 证毕

事实上,随着计算机技术的快速发展,计算速度飞速提升,30 年前 MC 方法应用受到限制的局面正不断得到改善。利用 MC 方法,可以很方便地分析出 PERT 网络各活动的关键度 ACI_{ij} 。得到各活动的 ACI_{ij} 后,根据定理 1 便可方便地找出 PERT 网络的关键路线。

2 活动敏感性与最关键活动分析

在肯定型网络中,关键路线上的所有活动均称为关键活动,它们是项目进度控制的重点对象。但对 PERT 网络,关键路线上的诸活动,其关键度不同,各活动的不确定程度也存在差异,显然对项目计划工期的影响程度不尽相同。因此,有必要根据各活动对 PERT 网络计划工期 T_p 的敏感性,找出对计划工期 T_p 敏感性最大的活动,即最关键活动,作为项目实施中首先要控制的对象。

2.1 PERT 网络关键活动的相对敏感性分析

定义 3 活动相对敏感性

对具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络,假设在其关键路线上的各项活动中,除活动 $(i-j)$ 外,其他活动的持续时间都是确定的,并分别为它们持续时间的期望值,则将活动 $(i-j)$ 对项目计划工期 T_p 影响的大小称为活动 $(i-j)$ 相对于关键路线的敏感性,并用相对敏感性指标 \bar{S}_{ij} 来描述,其表达式为

$$\bar{S}_{ij} = 1 - \int_{-\infty}^{T_p} f_c(t) dt \tag{3}$$

式中, $f_c(t)$ 为 PERT 网络关键路线持续时间的概率密度函数。

定理 2 相对敏感性计算定理

在具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络的关键路线上,除活动 $(i-j)$ 外,其他活动持续时间是确定的,并分别为各活动持续时间的期望值,则活动 $(i-j)$ 对项目计划工期 T_p 的相对敏感性就是活动 $(i-j)$ 对 $(T_p - T_c + \bar{t}_{ij})$ 相对敏感性,即有

$$\bar{S}_{ij} = 1 - \int_{-\infty}^{T_p - T_c + \bar{t}_{ij}} f_{ij}(t) dt \tag{4}$$

式中, T_c 为 PERT 网络关键路线持续时间的期望值; \bar{t}_{ij} 为活动 $(i-j)$ 持续时间的期望值; $f_{ij}(t)$ 为活动 $(i-j)$ 持续时间的密度函数。

证明 设关键路线及其活动持续时间均服从正态分布,密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < t < \infty$$

由式(3)得

$$\bar{S}_{ij} = 1 - \int_{-\infty}^{T_p} f_c(t) dt = 1 - \int_{-\infty}^{T_p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

式中, $T_c = \mu$ 。 又令

$$t = x + T_c - \bar{t}_{ij}, \text{ 则有}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= 1 - \int_{-\infty}^{T_p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_{ij}^2}} dt = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{T_p - T_c + \bar{t}_{ij}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} e^{-\frac{(x+T_c-\bar{t}_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_{ij}^2}} d(x + T_c - \bar{t}_{ij}) = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{T_p - T_c + \bar{t}_{ij}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} e^{-\frac{(x-\bar{t}_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}} d(x) = 1 - \int_{-\infty}^{T_p - T_c + \bar{t}_{ij}} f_{ij}(t) d(t) \end{aligned}$$

证毕

事实上,即使关键路线及其活动持续时间不服从正态分布,上述结论也是正确的。因为定义 3 约定关键路线上仅有活动 $(i-j)$ 是不确定的,而其他活动是确定的。因此,关键路线、活动 $(i-j)$ 对计划工期 T_p 的影响,即不能按 T_p 及时完工的概率是一样的。

2.2 PERT 网络中的活动敏感性与最关键活动

相对敏感性仅描述了关键路线确定的条件下,其上某活动持续时间不确定对项目计划工期 T_p 影响的大小。但应注意到,就整个 PERT 网络而言,对关键路线上的关键活动,它们的关键度是不一样的,即若采用 MC 方法分析,当模拟次数足够大时,关键路线上各活动成为关键活动的概率是不同的。一般而言,相对敏感性相同的条件下,活动落在关键线上的概率较大者,即关键度较大的活动,对项目计划工期 T_p 的影响较大。因此,在研究相对敏感性的基础上,有必要进一步研究 PERT 网络中活动的敏感性问题的。

定义 4 活动敏感性和最关键活动

对具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络,将活动 $(i-j)$ 对项目计划工期 T_p 影响的大小称为活动 $(i-j)$ 的敏感性,并用敏感性指标 S_{ij} 来描述,记为

$$S_{ij} = 1 - \int_{-\infty}^{T_p} f_{ij}(t) dt \tag{5}$$

并称敏感性最大的活动为最关键活动,其敏感性指标 S^* 满足

$$S^* = \max \{S_{ij}\} \tag{6}$$

事实上,由定义 4 不仅可依据 S_{ij} 找出最关键活动,还可依据 S_{ij} 大小对活动进行排序,以帮助项目进度管理人员明确对各活动进度控制的次序。

定理 3 活动敏感性计算定理

对具有 n 个节点且活动持续时间相互独立的 PERT 网络,活动 $(i-j)$ 的敏感性指标为其成为关键活动的关键度 $\frac{M_{ij}}{N}$ 与活动 $(i-j)$ 相对敏感性指标的乘积,即

$$S_{ij} = \frac{M_{ij}}{N} \cdot \bar{S}_{ij} \tag{7}$$

证明 用 MC 方法分析 PERT 网络时,当仿真次数 N 充分大时,活动 $(i-j)$ 成为关键线路上的活动,即关键活动

的概率近似为 $\frac{M_{ij}}{N}$ ，其中， M_{ij} 为 N 次仿真中活动 $(i-j)$ 落在关键线路上的次数。而落在关键线路上的活动 $(i-j)$ 不能按计划工期 T_p 及时完工的概率，即相对敏感性指标为 $\overline{S_{ij}}$ 。

因此，根据全概率公式，可得敏感性指标 $S_{ij} = \frac{M_{ij}}{N} \overline{S_{ij}}$ 。

可以看出，活动关键度是最关键活动分析过程中的核心参数，而由上文可知，其可通过 MC 方法模拟而得。因

此，简单、快速的 MC 方法使得在 PERT 网络中便捷地找出最关键活动成为可能。

3 算 例

某项目进度网络计划如图 1 所示。图中各活动持续时间(单位:天)估计值如表 1 所示，计划工期 140 天。分析其关键路线，找出最关键活动。

表 1 某项目进度网络计划各活动持续时间估计值和 $\overline{t_{ij}}$ 、 σ_{ij}

活动 $(i-j)$	紧前活动	最乐观估计时间 (a)	最可能估计时间 (m)	最悲观估计时间 (b)	$\overline{t_{ij}}$	σ_{ij}
1-2	—	8	10	12	10	0.666 6
1-3	—	4	5	6	5	0.333 3
1-4	—	4	7	10	7	1.000 0
1-5	—	4	5	6	5	0.333 3
2-3	1-2	3.5	5	6.5	5	0.500 0
2-6	1-2	6	8	10	8	0.666 6
3-4	1-3;2-3	2	4	6	4	0.666 6
3-7	1-3;2-3	3	6	9	6	1.000 0
4-7	1-4;3-4	10	13	16	13	1.000 0
5-7	1-5	7	8	9	8	0.333 3
5-8	1-5	8	9	10	9	0.333 3
6-7	2-6	9	12	15	12	1.000 0
6-8	2-6	2	3	4	3	0.333 3
6-9	2-6	3	4	5	4	0.333 3
7-8	3-7;4-7;5-7;6-7	6	9	12	9	1.000 0
8-9	5-8;6-8;7-8	9	11	13	11	0.666 6
8-10	5-8;6-8;7-8	2	5	8	5	1.000 0
8-11	5-8;6-8;7-8	2	7	12	7	1.666 6
8-12	5-8;6-8;7-8	3	5	7	5	0.666 6
9-10	6-9;8-9	3	5	7	5	0.666 6
9-13	6-9;8-9	17	19	21	19	0.666 6
10-11	8-10;9-10	2	4	6	4	0.666 6
10-14	8-10;9-10	2	4	6	4	0.666 6
11-14	8-11;10-11	13	17	21	17	1.333 3
12-14	8-12	7	9	11	9	0.666 6
12-15	8-12	8	9	10	9	0.333 3
13-14	9-13	13	15	17	15	0.666 6
13-15	9-13	2	3	4	3	0.333 3
13-16	9-13	2	4	6	4	0.666 6
14-15	10-14;11-14;12-14;13-14	7	9	11	9	0.666 6
15-16	12-15;13-15;14-15	8	10	12	10	0.666 6
15-17	12-15;13-15;14-15	2	5	8	5	1.000 0
15-18	12-15;13-15;14-15	3	7	11	7	1.333 3
15-19	12-15;13-15;14-15	4	5	6	5	0.333 3
16-17	13-16;15-16	3	5	7	5	0.666 6
16-20	13-16;15-16	6	8	10	8	0.666 6
17-18	15-17;16-17	2	4	6	4	0.666 6
17-21	15-17;16-17	12	16	20	16	1.333 3
18-21	15-18;17-18	2	3	4	3	0.333 3
19-21	15-19	7	8	9	8	0.333 3
19-22	15-19	7	9	11	9	0.666 6
20-21	16-20	14	16	18	16	0.666 6
20-22	16-20	2	3	4	3	0.333 3
21-22	17-21;18-21;19-21;20-21	8	10	12	10	0.333 3

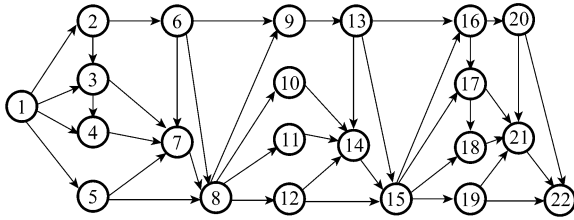


图 1 某工程施工进度网络计划图

3.1 关键路线分析

根据经典 PERT 的“三时”估算法,计算各活动持续时间的期望值 \bar{t}_{ij} 和标准差 σ_{ij} ,结果如表 1。用 MC 方法,模拟 10 000 次,得各活动的关键度,并可确定各节点局部关键活动,如表 2 中加“*”者,其中,节点前仅有一项活动时,其自然就是局部关键活动,节点前所有活动关键度为 0 时,表明它们不存在成为关键活动的可能。根据定理 1,确定最后

一个节点前的关键活动是 21-22,沿该活动逆箭线方向,找到指向节点 21 的关键活动为 20-21;依次类推,得到该网络的其余关键活动,如表 2 中加“**”者。最后将各关键活动依次相连,即得关键路线:22-21-20-16-15-14-13-9-8-7-4-3-2-1。

3.2 最关键活动分析

(1) 根据式(4),计算各活动对项目计划工期 T_p 的相对敏感性指标 \bar{S}_{ij} ,结果如表 2。

(2) 根据式(7),计算各活动的敏感性指标 S_{ij} ,结果如表 2。

(3) 根据式(6),比较表 2 中 S_{ij} ,活动 7-8 的 $S_{78} = 0.1587$,其为最大。因此,活动 7-8 为最关键活动。

(4) 依据 S_{ij} 大小,对活动进行排序,结果如表 3,排得越前的活动越是管理的重点。项目进度管理人员可根据该排序,明确进度管理的重点对象,以实现项目进度的有效管理。

表 2 各活动的 $\frac{M_{ij}}{N}$ 、 \bar{S}_{ij} 和 S_{ij}

活动(i-j)	$\frac{M_{ij}}{N}$	\bar{S}_{ij}	S_{ij}	活动(i-j)	$\frac{M_{ij}}{N}$	\bar{S}_{ij}	S_{ij}
1-2**	1	0.066 8	0.066 8	10-14	0	0.066 8	0
1-3	0	0.001 3	0	11-14	0	0.250 0	0
1-4	0	0.158 7	0	12-14	0	0.066 8	0
1-5	0	0.001 3	0	12-15	0	0.001 3	0
2-3**	0.844 1	0.022 8	0.019 2	13-14**	1	0.066 8	0.066 8
2-6*	0.155 9	0.066 8	0.010 4	13-15	0	0.001 3	0
3-4**	0.844 1	0.066 8	0.056 4	13-16	0	0.066 8	0
3-7	0	0.158 7	0	14-15**	1	0.066 8	0.066 8
4-7**	0.844 1	0.158 7	0.134 0	15-16**	1	0.066 8	0.066 8
5-7	0	0.001 3	0	15-17	0	0.158 7	0
5-8	0	0.001 3	0	15-18	0	0.250 0	0
6-7	0.155 9	0.158 7	0.024 7	15-19	0	0.001 3	0
6-8	0	0.001 3	0	16-17*	0.199 6	0.066 8	0.013 3
6-9	0	0.001 3	0	16-20**	0.800 4	0.066 8	0.053 5
7-8**	1	0.158 7	0.158 7	17-18*	0.199 6	0.066 8	0.013 3
8-9**	1	0.066 8	0.066 8	17-21	0	0.250 0	0
8-10	0	0.158 7	0	18-21	0.199 6	0.001 3	0
8-11	0	0.274 3	0	19-21	0	0.001 3	0
8-12	0	0.066 8	0	19-22	0	0.066 8	0
9-10	0	0.066 8	0	20-21**	0.800 4	0.066 8	0.053 5
9-13**	1	0.066 8	0.066 8	20-22	0	0.001 3	0
10-11	0	0.066 8	0	21-22**	1	0.001 3	0.001 3

表 3 按 S_{ij} 大小对项目活动的排序

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
活动(i-j)	7-8	4-7	1-2	8-9	9-13	13-14	14-15	15-16	3-4	16-20	20-21
S_{ij}	0.158 7	0.134 0	0.066 8	0.066 8	0.066 8	0.066 8	0.066 8	0.066 8	0.056 4	0.053 5	0.053 5

4 结 论

用 PERT 网络可较完善地描述活动持续时间具有不确定的项目的进度,目前相关研究已较为丰富。但现有的研

究成果还不足以满足项目进度控制的需要,例如,如何确定关键路线,如何确定关键路线上关键活动中的最关键活动,即对项目计划工期影响最大的活动,这些问题在项目进度控制中十分重要,但目前缺乏深入研究。

本文所提出的确定关键路线的方法是:从 PERT 网络终点节点开始,依据由 MC 方法模拟所得活动关键度的大小,确定以终点节点为完成节点的关键活动;然后沿该关键活动逆箭线方向,确定以其开始节点为完成节点的关键活动;类似地,逆箭线方向依次分析到 PERT 网络的起始节点,即可确定 PERT 网络的关键路线。本文所提出的确定最关键活动的方法是:在分析计算活动关键度和相对敏感性指标的基础上,将各项活动关键度和相对敏感性指标相乘,所得乘积为活动敏感性,其值最大的活动即为最关键活动。事实上,还可根据活动敏感性指标的大小,分析各活动对项目计划工期影响的大小,以帮助项目进度管理人员明确进度控制的重点。随着计算技术的发展,PERT 网络活动的关键度等的分析计算日益快捷,这为本研究成果的应用提供了条件。

参考文献:

- [1] Van Slyke R M. Monte Carlo methods and the PERT problem[J]. *Operation Research*, 1963, 11(5): 839 - 860.
- [2] Martin J J. Distribution of the time through a directed, acyclic network[J]. *Operations Research*, 1965, 13(1): 46 - 66.
- [3] Sigal C E, Pritsker A B, Solberg J J. The use of cutsets in Monte Carlo analysis of stochastic networks[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1979, 21(4): 376 - 384.
- [4] Elmaghraby S E. On criticality and sensitivity inactivity networks[J]. *European Journal of Operation Research*, 2000, 127(2): 220 - 238.
- [5] Fatemi G S M T, Teimouri E. Path critical index and activity critical index in PERT networks[J]. *European Journal of Operational Research*, 2002, 141(2): 147 - 152.
- [6] Cho J G, Yum B J. Functional estimation of activity criticality indices and sensitivity analysis of expected project completion time[J]. *Journal of Operational Research Society*, 2004, 55(8): 850 - 859.
- [7] Bowman R A. Efficient sensitivity analysis of PERT network performance measures to significant changes in activity time parameters[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2007, 58(10): 1354 - 1360.
- [8] 张薇, 乞建勋. PERT 网络中非关键工序的敏感性分析[J]. 技术经济, 2009, 28(12): 114 - 118. (Zhang W, Qi J X. Sensitivity analysis on noncritical process in PERT network[J]. *Technology Economics*, 2009, 28(12): 114 - 118.)
- [9] 张立辉, 乞建勋, 仲刚. CPM 网络工序工期变化对总工期影响的敏感性分析[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(2): 356 - 360. (Zhong L H, Qi J X, Zhong G. Sensitivity analysis for activity changes to project duration in CPM network[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2010, 30(2): 356 - 360.)
- [10] Soroush H M. The most critical path in a PERT network: a heuristic approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 1994, 78(1): 93 - 105.