

基于二阶循环统计量的 BPSK 参数估计

于宁宇^{1,2}, 马红光¹, 石荣², 石磊³

(1. 第二炮兵工程学院 101 教研室, 陕西 西安 710025;

2. 中国电子科技集团公司信息综合控制国家重点实验室, 四川 成都 610036;

3. 中国人民解放军 96656 部队, 北京 100028)

摘要: 针对复值二进制相移键控(binary phase shift keying, BPSK)信号, 推导了其无共轭项和带共轭项的二阶循环累积量表达式, 分别研究了时延对其循环频率特性的影响, 得出了独立的载频和码片时宽估计算法, 即可以利用无共轭项二阶循环累积量时延零切片估计载频, 可以利用带共轭项二阶循环累积量时延非零切片估计码片时宽, 并推导了最优时延的选取, 进而提出了一种更优良的码片时宽估计算法。仿真实验表明, 提出的载频估计算法与循环谱算法比较, 虽有 2 dB 的损耗, 但是计算复杂度减小; 码片时宽估计算法性能比利用循环谱的估计算法提高 5 dB 以上。

关键词: 信号处理; 循环平稳; 检验统计量; 二进制相移键控; 参数估计

中图分类号: TN 911.7

文献标志码: A

DOI: 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.09.37

Parameter estimation of BPSK via second-order cyclic statistics

YU Ning-yu^{1,2}, MA Hong-guang¹, SHI Rong², SHI Lei³

(1. 101 Section, The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China;

2. National Information Control Laboratory, China Electronics Technology Group Corporation, Chengdu 610036, China;

3. Unit 96656 of the PLA, Beijing 100028, China)

Abstract: The expressions of non-conjugated and conjugated second-order cyclic cumulants are deduced based on complex-valued binary phase shift keying (BPSK) signals. The influence of different time-delays on the characteristics of cyclic frequency is studied, and the independent algorithms are proposed to estimate carrier frequency and chip width. In other words, carrier frequency can be estimated based on non-conjugated second-order cyclic cumulants with a time-delay to be zero; while chip width can be estimated based on conjugated second-order cyclic cumulants with a time-delay to be nonzero. To improve the performance, the optimum time-delay is deduced, and then a much better chip width estimation algorithm is proposed. Simulations verify that though the performance of the proposed carrier-frequency algorithm has 2 dB loss, computational complexity is much simpler than the cyclic-spectrum algorithm, and the performance of the proposed chip width algorithm has a more than 5 dB increase compared with the cyclic-spectrum algorithm.

Keywords: signal processing; cyclostationarity; test statistics; binary phase shift keying (BPSK); parameter estimation

0 引言

扩频通信具有功率谱密度低、抗干扰性强、保密性好和频带宽等优点, 在军事和民事上得到广泛的应用, 但是这些特点却给非协作条件下信号处理带来了困难。二进制相移键控(binary phase shift keying, BPSK)信号作为扩频通信中最为常用的数字信号形式, 具有典型的循环平稳特

性^[1-3]。文献[4]提出了利用循环谱包络进行 BPSK 信号的载频和码片时宽的估计方法, 利用循环谱 $f=0$ 截面包络的最大值进行载频估计, 进而搜索其两边次大值和 $f=\hat{f}_c$ 截面包络中靠近“0”的最大值进行码片时宽估计, 但是码片时宽估计受载频估计精度以及基底噪声的影响; 文献[5-6]将上述方法扩展到多进制相移键控(multiple phase shift keying, MPSK)信号中, 提出了利用循环谱 $\alpha=0$ 截面进行

收稿日期: 2010-09-07; 修回日期: 2011-04-25。

基金项目: 国防重点实验室基金(9140C1004040901)资助课题

作者简介: 于宁宇(1983-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为电子侦察、非平稳信号处理技术。E-mail: yuningyu1983@sohu.com

载频估计,利用 $f = \hat{f}_c$ 截面进行码片时宽估计的方法,但是该方法实际上是用功率谱估计载频,因此精度不高,同时码片时宽估计更易受载频估计精度和基底噪声影响;文献[7]对文献[4]进行了改进,得到了较为稳健的码片时宽估计算法,但是本质上没有摆脱码片时宽估计受载频估计精度的影响;文献[8]将其引入到多径直扩信号中;文献[9-10]提出了利用循环自相关进行 BPSK 信号的盲检测和参数盲估计,并推导了不同时延对循环自相关的影响,但是仅仅针对实信号和一个信噪比水平下的参数估计;文献[11]针对不同成形脉冲的基带信号,提出了利用加权循环自相关进行码片时宽估计,消除了成形脉冲的影响,但是没有考虑中频信号。

本文基于中频复 BPSK 信号,推导了不同定义的二阶循环累积量在不同时延切片下的数学表达式,提出了独立的载频和码片时宽估计算法,改进了以往算法中载频估计计算量大、码片时宽估计在低信噪比下估计精度不高等不足。

1 信号模型

假设截获接收机截获到的信号为 BPSK 信号和加性高斯白噪声,则信号模型为

$$y(t) = s(t) + n(t) = A_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} [q(t - nT_c - t_0) e^{j(2\pi f_c t + \theta_n + \phi_0)}] + n(t) \quad (1)$$

式中, A_s 为信号幅度; $q(\cdot)$ 为矩形成型脉冲; T_c 为码片时宽; f_c 为载频; t_0 为初始时间; ϕ_0 为初相; θ_n 为扩频码序列; $n(t)$ 为功率为 σ^2 的复高斯白噪声。方程(1)可以写成另外的形式,为

$$y(t) = A_s a(t) e^{j(2\pi f_c t + \phi_0)} + n(t) \quad (2)$$

式中, $a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q(t - nT_c - t_0)$, $a_n = e^{j\theta_n}$ 。

对于 BPSK 信号而言, θ_n 为等概率选取的 $\{0, \pi\}$, 即 a_n 为等概率选取的 $\{+1, -1\}$ 。

2 算法原理及实现

2.1 $C_{20}^*(\tau)$ 和 $C_{21}^*(\tau)$ 的特性分析

假设有限长的接收数据为 $\{x(t)\}_{t=0}^{T-1}$, 且 $E\{x(t)\} = 0$, 其二阶循环累积量 $\hat{C}_{20}^*(\tau)$ 和 $\hat{C}_{21}^*(\tau)$ 的表达式分别为

$$\hat{C}_{20}^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t)x(t-\tau)e^{-j2\pi\tau t} \quad (3)$$

$$\hat{C}_{21}^*(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t)x^*(t-\tau)e^{-j2\pi\tau t} \quad (4)$$

文献[12]已经证明,该估计为无偏和渐近一致的。下面分别讨论不同时延下的循环频率特性。将式(2)代入式(3)并取幅值得

$$|\hat{C}_{20}^*(\tau)| = |\langle y(t)y(t-\tau)e^{-j2\pi\tau t} \rangle_t| = |A_s^2 \cdot e^{j(2\phi_0 - 2f_c\tau)}| \cdot |\langle a(t)a(t-\tau)e^{-j2\pi(\alpha - 2f_c)\tau t} \rangle_t| =$$

$$A_s^2 |R_a^{\alpha - 2f_c}(\tau)| \quad (5)$$

由文献[9-10]可知

$$R_a^\beta(\tau) = \frac{\sin(\pi\beta(T_c - |\tau|))}{\pi\beta T_c} e^{-j2\pi\beta\tau} \delta\left(\beta - \frac{k}{T_c}\right) \quad (6)$$

式中, $k \in \mathbf{Z}$; $\delta(\cdot)$ 为克拉克函数。联立式(5)和式(6)可得

$$|\hat{C}_{20}^*(\tau)| = A_s^2 \left| \frac{\sin(\pi(\alpha - 2f_c)(T_c - |\tau|))}{\pi(\alpha - 2f_c)T_c} \right| \cdot \delta\left((\alpha - 2f_c) - \frac{k}{T_c}\right), k \in \mathbf{Z} \quad (7)$$

当 $\tau=0$ 时,式(7)可以改写为

$$|\hat{C}_{20}^*(0)| = A_s^2 \left| \frac{\sin(\pi(\alpha - 2f_c)T_c)}{\pi(\alpha - 2f_c)T_c} \right| \cdot \delta\left((\alpha - 2f_c) - \frac{k}{T_c}\right), k \in \mathbf{Z} \quad (8)$$

由式(8)可知, $|\hat{C}_{20}^*(0)|$ 具有 1 个峰值,即 $\alpha = 2f_c$, 故只需在其循环频率轴进行谱峰搜索,即可实现载频的估计。

当 $\tau \neq 0$ 时,式(7)在 $\alpha = 2f_c + k/T_c$ ($k \in \mathbf{Z}$) 处有峰值,可以利用其次大峰位置估计码片时宽^[4-9],但是次大峰位置易受载频估计误差和基底噪声的影响,故考虑共轭二阶循环累积量 $|\hat{C}_{21}^*(\tau)|$,可以消除载频估计误差的影响,将式(2)代入式(4)可得

$$|\hat{C}_{21}^*(\tau)| = |\langle y(t)y^*(t-\tau)e^{-j2\pi\tau t} \rangle_t| = A_s^2 |\langle a(t)a^*(t-\tau)e^{-j2\pi\tau t} \rangle_t| + \sigma^2 \delta(\tau) \delta(\alpha) \quad (9)$$

由于 $a(t) = a^*(t)$, 联立式(6)和式(9)可得

$$|\hat{C}_{21}^*(\tau)| = A_s^2 \left| \frac{\sin(\pi\alpha(T_c - |\tau|))}{\pi\alpha T_c} \right| \delta\left(\alpha - \frac{k}{T_c}\right) + \sigma^2 \delta(\tau) \delta(\alpha), k \in \mathbf{Z} \quad (10)$$

当 $\tau=0$ 时,当且仅当 $\alpha=0$, $|\hat{C}_{21}^*(\tau)|$ 有峰值,此时无法得到码片时宽的估计值。

当 $\tau \neq 0$ 时,此时 $\alpha = k/T_c$ ($k \in \mathbf{Z}$), 将 α 代入式(10), 可得

$$|\hat{C}_{21}^*(\tau)| = A_s^2 \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{T_c} (T_c - |\tau|)\right)}{\pi \frac{k}{T_c} T_c} \right| = A_s^2 \left| \frac{\sin\left(k\pi\left(1 - \frac{|\tau|}{T_c}\right)\right)}{k\pi} \right| \quad (11)$$

由式(11)可知,为了得到更为优良的码片时宽估计算法,需要最优的选取 $|\tau|$, 使得 $|\hat{C}_{21}^*(\tau)|$ 在特定的循环频率 $\pm 1/T_c$ 处最大,此时可以得到码片时宽的估计^[13](令此时的时延为最优时延 τ_{fix}), 此时有

$$\hat{T}_c = 1 / \underset{\alpha \neq 0}{\text{argmax}} |\hat{C}_{21}^*(\tau_{\text{fix}})| \quad (12)$$

故当 $k = \pm 1$, 即 $\alpha = \pm 1/T_c$ 时,式(11)的最大值出现在 $|\tau| = T_c(2m+1)/2$ ($m \in \mathbf{Z}$) 处。对于 BPSK 信号而言, $B = 2/T_c$, B 为信号带宽,可以粗估得到 \hat{B} , 故最优时延 $|\tau_{\text{fix}}|$ 选取为

$$|\tau_{\text{fix}}| = \frac{2m+1}{B}, m \in \mathbf{Z} \quad (13)$$

此时,在 $\alpha = \pm 2/T_c$ 处, $|\hat{C}_{21}(\tau_{\text{fix}})| = 0$ 。

2.2 码片时宽检验量的构建

理论上,循环累积量的循环频率为 $C_{21}(\tau) \neq 0$ 的所有 α 值。但是在有限数据长度下,利用式(4)得到的估计值和理论值之间存在误差, $\hat{C}_{21}(\tau_{\text{fix}}) = C_{21}(\tau) + \epsilon_{21}^e(\tau)$,即使 α 不是循环频率,其仍然不为理论上的“0”值,因此选择一个合适的门限成为循环频率判决的关键。因此,考虑 Danda-wate 提出的渐近最优 χ^2 检验,只需要给出恒虚警概率,就可以根据中心 χ^2 分布得到循环频率判决门限,故构建检验量^[14]为

$$r_{21} = TC_{21} \sum^{-1} C_{21}^H \quad (14)$$

式中, T 为数据长度;“-1”代表着广义逆;“H”代表转置。

$$C_{21} = [\text{Re} \{ \hat{C}_{21}(\tau) \}, \text{Im} \{ \hat{C}_{21}(\tau) \}] \quad (15)$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ \frac{Q+Q^*}{2} \right\} & \text{Im} \left\{ \frac{Q-Q^*}{2} \right\} \\ \text{Im} \left\{ \frac{Q+Q^*}{2} \right\} & \text{Re} \left\{ \frac{Q^*-Q}{2} \right\} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$Q = \frac{1}{TL} \sum_{s=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} \left[W(s) F_{T,\tau_m} \left(\alpha - \frac{s}{T} \cdot f_s \right) F_{T,\tau_m} \left(\alpha + \frac{s}{T} \cdot f_s \right) \right] \quad (17)$$

$$Q^* = \frac{1}{TL} \sum_{s=-(L-1)/2}^{(L-1)/2} \left[W(s) F_{T,\tau_m}^* \left(\alpha + \frac{s}{T} \cdot f_s \right) F_{T,\tau_m} \left(\alpha + \frac{s}{T} \cdot f_s \right) \right] \quad (18)$$

$$F_{T,\tau}(f) = \sum_{t=0}^{T-1} x(t) x^*(t-\tau) e^{-j2\pi ft} \quad (19)$$

式(17)~式(19)对文献[14]中的公式进行了改进,将圆周频率扩展到普通的频率。由文献[14]可知, r_{21} 服从 $\chi^2(2)$ 分布。 $W(s)$ 为长度为 L 的谱窗函数, f_s 为采样频率。

2.3 算法的步骤

算法 1 载频估计算法的步骤

步骤 1 粗估接收信号的载频 \hat{f}_0 和带宽 \hat{B} , 确定循环频率搜索范围为

$$2\hat{f}_0 - 0.5(1+\epsilon)\hat{B} \leq \alpha \leq 2\hat{f}_0 + 0.5(1+\epsilon)\hat{B}, \epsilon > 0$$

步骤 2 根据式(3)计算 $\hat{C}_{21}(\tau)$, 且 $\tau=0$;

步骤 3 得到载频估计为

$$\hat{f}_c = 0.5 \operatorname{argmax}_{\alpha} (|\hat{C}_{20}(\tau)|)$$

算法 2 码片时宽估计算法的步骤

步骤 1 粗估接收信号的带宽 \hat{B} , 确定循环频率搜索范围为

$$-0.5(1+\epsilon)\hat{B} \leq \alpha \leq 0.5(1+\epsilon)\hat{B}, \epsilon > 0$$

并根据式(13)得到最优时延 $|\tau_{\text{fix}}|$;

步骤 2 根据式(4)和式(15)计算 C_{21} ;

步骤 3 根据式(16)~式(19)计算 $\hat{\Sigma}$ 和其广义逆 $\hat{\Sigma}^{-1}$;

步骤 4 根据式(14)计算检验量 r_{21} ;

步骤 5 确定虚警概率, 根据自由度为 2 的中心 χ^2 分布检验得到检测门限 Γ_{21} ;

步骤 6 靠近零循环频率的第一个大于检测门限 Γ_{21} 的循环频率, 即为码速率估计, 因此码片时宽估计为

$$\hat{T}_c = 1 / \operatorname{argmax}_{|\alpha|>0} |r_{21}^a(\tau_{\text{fix}})|$$

式中, ϵ 越大, 搜索范围越大, 计算量越大; 本文中假设 $\epsilon=1.5$ 。

3 仿真实验

在以下仿真实验中, 参数设置如下: 采样频率归一化为 1, 载频归一化为 0.2, 码元宽度为 50, 矩形成型脉冲, 采样点数为 2 000, 即 40 个码元, 仿真实验 1 和仿真实验 2 中, 信噪比为 0。

3.1 仿真实验 1

考察循环谱 $f=0$ 截面和无共轭二阶循环累积量 $|C_{20}(\tau=0)|$ 的特性, 如图 1 所示。其中, 图 1(a) 为循环谱 $f=0$ 截面的归一化幅值, 图 1(b) 为本文中采用的 $|C_{20}(\tau=0)|$ 切片归一化幅值。

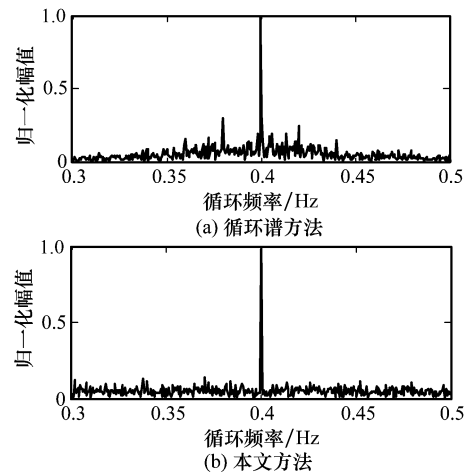


图 1 两种载频估计方法比较

由图 1 可知, 本文的载频估计方法中, 只有一个峰值, 即 $\alpha = 2f_c$, 由此可以得出载频的估计。虽然利用循环谱 $f=0$ 截面得到的图 1(a) 中, $\alpha = 2f_c$ 处的值要远远大于 $\alpha = 2f_c + k/T_c$ ($k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$), 利用其进行载频估计同样可以得到理想的效果, 但是循环谱计算运算量大, 而本文基于循环累积量, 可以采用快速傅里叶变换实现。本文仿真中, 循环谱算法采用性能最好的 SSCA 算法^[15], 而计算 $|C_{20}(\tau=0)|$ 时本文仅仅采用最为一般的相关运算, 一次运行的时间分别为 0.513 360 s 和 0.378 872 s。

3.2 仿真实验 2

首先考察最优时延和非最优时延下检验量 \mathcal{T}_{21} 及判决门限比较图,如图 2 所示。

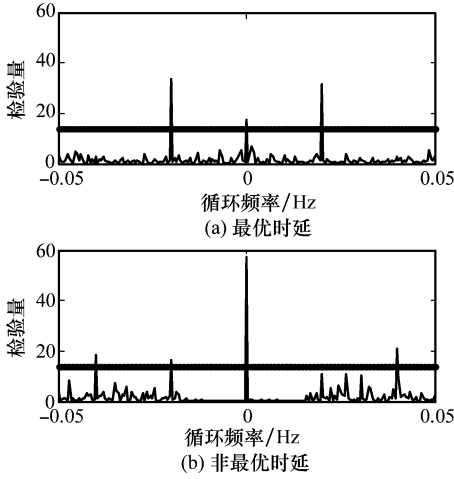


图 2 最优和非最优时延下检验量及门限

窗函数选用长度为 63 的 Kaiser 窗, $\tau_{\text{fix}}=25$, 非最优时延 $\tau=5$, 恒虚警概率设为 0.001, 信噪比为 0。由图 2 可以看出, 最优时延下在 $\alpha=\pm 1/T_c$ 处信号能量得到增强, 在 $\alpha=\pm 2/T_c$ 处没有峰值; 而非最优时延虽然在 $\alpha=\pm k/T_c$ ($k \in \mathbb{Z}$) 处都有峰值, 但是却没有使得某一处峰值得到增强, 故参数估计效果不理想。

图 3 给出了几种码片时宽估计方法的比较, 其中图 3(a) 为利用循环谱 $f=0$ 截面估计码片时宽; 图 3(b) 为 $f=f_c$ 截面估计码片时宽; 图 3(c) 为利用 $|\hat{C}_{21}(\tau_{\text{fix}})|$ 估计码片时宽; 图 3(d) 为利用 \mathcal{T}_{21} 和检测门限估计码片时宽。由图 3 可以看出, 本文中的码片时宽估计算法, 相当于对 $|\hat{C}_{21}(\tau_{\text{fix}})|$ 进行了加权, 不仅使谱峰在 $\pm 1/T_c$ 处得到了增强, 而且可以得到恒虚警概率下的循环频率判决门限, 故能够在更低的信噪比水平下实现码片时宽的有效估计。

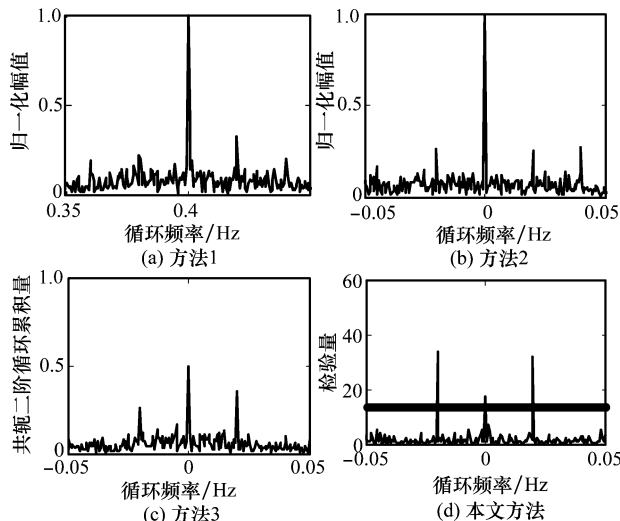


图 3 码片时宽估计的几种方法比较

3.3 仿真实验 3

本实验考察不同信噪比水平下参数估计的正确率, 由于算法是在循环频率轴上进行搜索得到, 故其分辨率为循环频率分辨率 f_s/N , 因此如果 $\text{abs}(\hat{\theta}-\theta) \leq f_s/N$, 则认为是一次正确的估计。仿真中, 独立实验次数为 200 次, 实验结果如图 4 所示。其中图 4(a) 为载频估计正确率, 图 4(b) 为码片时宽估计正确率。文献[4]中的载频估计算法性能最优, 故选用其作为比较; 文献[7]中的码片时宽估计是基于循环谱截面的算法中最优的, 故选用其进行比较。可以看出, 本文提出的载频估计算法性能和利用循环谱 $f=0$ 截面得到的载频估计性能有 2 dB 的损耗, 但是运算复杂度降低很多, 并且可以使用快速算法; 本文的码率估计在恒虚警概率为 0.001 时, 参数估计的正确率随信噪比的增加而增加, 当信噪比为 -3 dB 时, 码片时宽估计正确率可以达到 90% 以上; 比文献[7]达到同样的性能时的信噪比降低了 5 dB 左右, 并且随着信号长度的增加, 可以得到更为优良的效果。

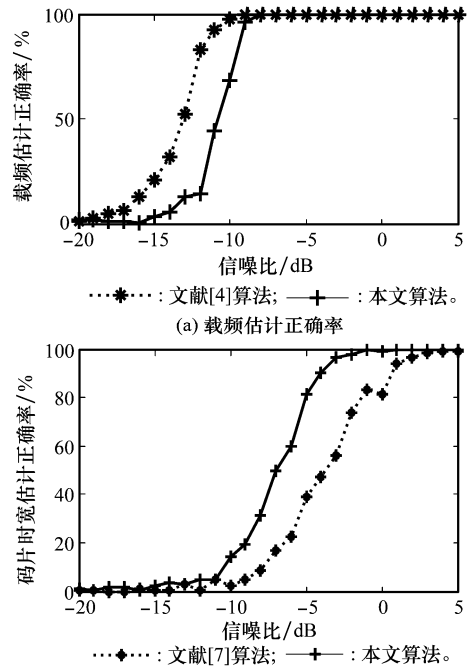


图 4 不同信噪比下参数估计的正确率

4 结论

针对中频复 BPSK 信号, 推导了无共轭项和带共轭项的二阶循环累积量表达式, 提出了利用不同的时延切片独立地进行载频和码片时宽的估计算法; 并推导了码片时宽估计算法的最优时延选取, 构建了更为有效的检验统计量, 使得谱峰在 $\pm 1/T_c$ 得到增强, 同时得到恒虚警概率下的检测门限, 使得算法在更低的信噪比水平下仍能得到可靠的估计。仿真实验表明, 本文提出的载频估计算法和循环谱

方法比较,在性能损失 2 dB 的情况下,减少了运算复杂度;而码片时宽估计算法性能比利用循环谱的估计算法提高 5 dB 以上。

参考文献:

- [1] Gardner W A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series[J]. *Signal Processing*, 1986, 11(1): 13 - 36.
- [2] Gardner W A, Napolitano A, Paura L. Cyclostationarity: half a century of research[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(4): 639 - 697.
- [3] Cui T, Tang J, Gao F F, et al. Moment-based parameter estimation and blind spectrum sensing for quadrature amplitude modulation[J]. *IEEE Trans. on Communications*, 2011, 59(2): 613 - 623.
- [4] 黄春琳,柳征,姜文利,等. 基于循环谱包络的扩谱直序信号的码片时宽、载频、幅度估计[J]. 电子学报, 2002, 30(9): 1353 - 1356. (Huang C L, Liu Z, Jiang W L, et al. Chip-width, carrier frequency and amplitude estimation of DS signal based on cyclic spectrum amplitude[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(9): 1353 - 1356.)
- [5] 张仔兵,李立萍,肖先赐. MPSK 信号的循环谱检测及码速率估计[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(5): 803 - 806. (Zhang Z B, Li L P, Xiao X C. Detection and chip rate estimation of MPSK signals based on cyclic spectral density[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2005, 27(5): 803 - 806.)
- [6] Zhang Z B, Li L P, Xiao X C. Carrier frequency and chip rate estimation based on cyclic spectral density of MPSK signals[C]//*Proc. of the International Conference on Communications, Circuits and Systems*, 2004: 859 - 862.
- [7] 史建锋,朱良学,冯辉. 基于循环谱包络的 BPSK 码元速率估计算法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(2): 186 - 196. (Shi J F, Zhu L X, Feng H. Research on chip-rate estimation for BPSK based on cyclic spectrum amplitude[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2007, 29(2): 186 - 196.)
- [8] 史剑锋,王可人. 基于循环谱包络的多径直扩信号参数估计[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(8): 1427 - 1430. (Shi J F, Wang K R. Parameters estimation of multipath direct-spread signal based on cyclic spectrum amplitude[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(8): 1427 - 1430.)
- [9] 金艳,姬红兵,罗军辉. 一种基于循环统计量的直扩信号检测与参数估计方法[J]. 电子学报, 2006, 34(4): 634 - 637. (Jin Y, Ji H B, Luo J H. A cyclic-cumulant based method for DSSS signal detection and parameter estimation[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(4): 634 - 637.)
- [10] 金艳,姬红兵. 基于循环自相关的 PSK 信号码速率估计的噪声影响分析[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(25): 505 - 508. (Jin Y, Ji H B. Influence of stationary noise on cyclic-autocorrelation based PSK symbol rate estimation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(25): 505 - 508.)
- [11] Mazet L, Loubaton P. Cyclic correlation based symbol rate estimation[C]//*Proc. of the Thirty-Third Asilomar Conference on Signal, Systems and Computer*, 1999: 1008 - 1012.
- [12] Dandawate A V, Giannakis G B. Asymptotic theory of mixed time averages and K th-order cyclic-moment and cumulant statistics[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1995, 41(1): 216 - 232.
- [13] Gardner W A, Spooner C M. The cumulant theory of cyclostationary time-series—Part 1: foundation[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(12): 3387 - 3408.
- [14] Dandawate A V, Giannakis G B. Statistical tests for presence of cyclostationarity[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(9): 2355 - 2369.
- [15] Brown W A, Loomis H H. Digital implementations of spectral correlation analyzers[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(2): 703 - 720.