

# 基于无模型无迹粒子滤波的编队卫星相对运动估计

魏喜庆, 宋申民, 张保群

(哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:** 由于地球引力和大气阻力等因素造成的模型不确定性,使常规滤波方法用于卫星编队飞行相对运动估计时精度不高。为克服这种影响,提出了一种融合高斯过程回归(Gaussian process regression, GPR)的无模型无迹粒子滤波(model-free unscented particle filter, MF-UPF)方法。对近圆轨道的双星编队问题,新方法通过高斯过程回归对已有的量测数据学习建立相对运动模型,有效地避免了模型不确定性造成的滤波性能下降。仿真对比验证了无模型无迹粒子滤波在编队飞行相对运动估计中的优越性。

**关键词:** 近圆轨道; 编队飞行; 建模不确定; 粒子滤波; 高斯过程回归

中图分类号: V 448.2

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1001-506X.2012.06.24

## Estimation of formation spacecraft relative motion based on model-free unscented particle filter

WEI Xi-qing, SONG Shen-min, ZHANG Bao-qun

(Center of Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** Normal filter algorithms cannot achieve high precision due to the modeling uncertainty caused by the earth gravity and atmospherical drag. A model-free unscented particle filter (MF-UPF) combined with Gaussian process regression is presented to overcome modelling uncertainty. Gaussian process is used to establish a relative motion model of formation flying satellites in near-circular orbits using training data, which efficiently avoids degradation of filtering performance. Simulations and comparisons validate the superiority of MF-UPF for the relative motion estimation of formation flying.

**Keywords:** near-circular orbit; formation flying; modeling uncertainty; particle filter (PF); Gaussian process regression (GPR)

## 0 引言

由于小卫星编队飞行可以突破传统大卫星的尺寸限制,替代甚至扩展单颗大卫星的功能,卫星编队越来越受到重视。相对导航是编队飞行的关键技术之一,可利用星载导航装置实时估计卫星间相对位置和相对速度<sup>[1]</sup>。编队卫星队形机动、重构和保持任务对相对导航精度提出了较高要求<sup>[2]</sup>。

然而,考虑地球引力摄动、大气阻力摄动和光压摄动等影响,卫星之间的相对运动建模形式过于复杂,不利于实际应用<sup>[3]</sup>。对近圆轨道的相对运动估计问题,往往采用 C-W 方程并将各种摄动归结为高斯白噪声<sup>[4]</sup>。但是,摄动对长期在轨工作的编队卫星影响更为明显,白噪声的假设过于简单,并不能完全描述实际情况,因此采用这种简化的运动

方程会损失部分滤波精度。

粒子滤波(particle filter, PF)是一种序贯蒙特卡罗方法,由于不存在对非线性函数的近似和噪声概率密度的高斯假设,在处理非线性、非高斯系统的滤波问题方面有着独特的优势<sup>[5]</sup>。粒子滤波已经在卫星姿态和轨道确定等领域得到了广泛应用<sup>[6-7]</sup>。但是,同卡尔曼滤波和无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)等贝叶斯估计方法具有相同的弱点,都要求系统的模型准确已知,否则精度得不到保证。

高斯过程早期用于预测,近年来被引入到机器学习的回归问题中,并成功地应用在对状态预测模型的学习上<sup>[8-9]</sup>。由于高斯过程回归具有预测模型的不确定性的特性,与粒子滤波结合可以很好地解决模型不确定性的滤波问题。本文提出了融合高斯过程的无模型无迹粒子滤波算

收稿日期:2011-09-05; 修回日期:2012-02-06。

基金项目:国家高技术研究发展计划(863计划)(2010AA7045003)资助课题

作者简介:魏喜庆(1982-),男,博士研究生,主要研究方向为非线性滤波、视觉导航和编队飞行。E-mail:weixiqing@gmail.com

法并用于卫星相对运动估计问题上。用高斯过程对卫星相对运动模型进行学习,动态地获得系统状态模型及其噪声的统计特性,可以克服各种摄动造成模型不准确导致的滤波精度下降问题。

## 1 基于交会雷达的卫星相对运动模型

### 1.1 相对轨道运动方程

假设主星运动在近圆轨道上,将其近似为沿圆轨道运动。围绕主星编队飞行的其他卫星称为从星,主星与从星在轨道上的相对位置如图 1 所示。

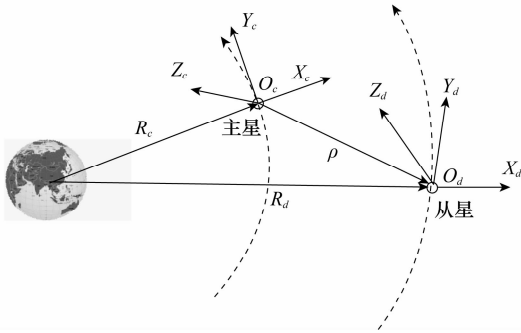


图 1 主星与从星的相对位置

图 1 中,  $O_c X_c Y_c Z_c$  表示主星的轨道坐标系,  $O_d X_d Y_d Z_d$  表示从星的本体坐标系,  $R_c$  和  $R_d$  分别为主星和从星到地心距离。从星相对于主星的位置矢量  $\rho$  在主星轨道系下的分量为  $\rho = [x, y, z]^T$ 。当相对距离远小于主星的轨道半径时,将地球引力差一次近似,可以得到经典的 C-W 方程<sup>[10]</sup>:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = f_x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = f_y \\ \ddot{z} + n^2z = f_z \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $n$  为主星轨道角速度;  $f_x, f_y$  和  $f_z$  为主星和从星的推力和摄动力引起的加速度矢量之差在轨道系下的 3 个分量。将式(1)写成状态方程形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 3n^2x + 2n\dot{y} \\ -2n\dot{x} \\ -n^2z \end{bmatrix} + \mathbf{a} + \mathbf{w} \quad (2)$$

并对加速度矢量进行分解,其中  $\mathbf{a} = [0 \ 0 \ 0 \ a_x \ a_y \ a_z]^T$  为推力加速度,噪声  $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z \ w_{dx} \ w_{dy} \ w_{dz}]^T$  表示看作的系统噪声的扰动引起的加速度。

### 1.2 雷达测量模型

主星的位置是通过从星的机载雷达测量,两个飞行器均被看成质点,相对姿态不予考虑。令从星的雷达测量坐标系

与从星本体坐标系重合,这时雷达的测量输出为  $R$  (主星与从星的相对距离),  $\alpha$  (主星在从星雷达测量坐标系中的俯仰角),  $\beta$  (主星在从星雷达测量坐标系中的方位角)。令主星在从星本体坐标系中的相对位置坐标为  $\rho_c = [x_c, y_c, z_c]^T$ , 量测输出为

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)^{1/2} \\ \arctan x_c / y_c \\ \arctan [z_c / (x_c^2 + y_c^2)^{-1/2}] \end{bmatrix} + \mathbf{V} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{Z} = [R, \alpha, \beta]^T$  为雷达量测值;  $\mathbf{V} = [v_R, v_\alpha, v_\beta]^T$  为雷达量测噪声。利用主从星之间的几何关系,并假设已知雷达在从星体系的安装位置和从星相对于其轨道坐标系姿态,则测量值可以写为关于状态变量  $\rho$  的表达式<sup>[4]</sup>:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ \arctan [-R_d (R_d^2 - xR_c - R_c^2) / yR_d R_d] \\ \arctan \{ [- (R_c + x) z R_c / R_d R_d^2] [(yR_c)^2 / R_d^2 + (R_d R_c + xR_c - R_d^2 / R_d^2)^2]^{1/2} \} \end{bmatrix} + \mathbf{V} \quad (4)$$

式中,  $R_d = [x^2 + (R_c + y)^2 + z^2]^{1/2}$ ,  $R_d' = [x^2 + (R_c + y)^2]^{1/2}$ 。量测方程(4)具有非线性和时变特性,采用扩展卡尔曼滤波 (extended Kalman filter, EKF) 时求取雅克比矩阵需要较大计算量,实际工程中往往采用卫星轨道面共面的假设<sup>[11]</sup>。由于本文采用改进的粒子滤波,因此不受量测方程形式过于复杂的影响。

## 2 无迹粒子滤波和无模型无迹粒子滤波

### 2.1 无迹粒子滤波

考虑一般的非线性系统离散模型为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{x}_k$  表示系统状态;  $\mathbf{y}_k$  表示量测值;  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  分别是过程噪声和量测噪声。粒子滤波从状态空间采样大量粒子  $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$  来逼近后验概率密度,从而避免了求积分运算<sup>[12]</sup>。后验概率密度可表示为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(i)}) \quad (6)$$

式中,  $\delta(\cdot)$  表示狄拉克函数。由于真实的后验概率得不到,通常采用一个易求的建议分布  $q(\cdot)$  来代替,因此  $\mathbf{x}_k^{(i)} \sim q(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k})$ , 对应每个粒子的权值:

$$\omega_k^{(i)} = \omega_k^{(i-1)} \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}) p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_k^{(i-1)})}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_k^{(i-1)}, \mathbf{y}_{0:k})} \quad (7)$$

标准粒子滤波经常将易于实现的状态转移先验概率密度作为建议分布函数,即

$$q(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_k^{(i-1)}, \mathbf{y}_{0:k}) = p(\mathbf{x}_k^{(i)} | \mathbf{x}_k^{(i-1)}) \quad (8)$$

将式(8)代入到式(7)中,重要性权值可简化为

$$\omega_k^{(i)} = \omega_k^{(i-1)} p(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\chi}_k^{(i)}) \quad (9)$$

从而后验概率密度近似为

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) = \sum_{i=1}^m \omega_k^{(i)} \boldsymbol{\chi}_k^{(i)} \quad (10)$$

但是,这种方法丢失了  $k$  时刻的量测值,严重依赖于系统状态模型。无迹粒子滤波算法利用 UKF 产生的高斯分布生成建议分布,充分利用了量测值,因此具有更高的精度<sup>[13-14]</sup>。

### 2.2 无模型无迹粒子滤波

本文提出一种高斯回归与无迹粒子滤波结合的新方法。新算法利用高斯回归模型替代系统状态方程,不需要精确已知系统模型,因此称之为无模型无迹粒子滤波(model-free unscented particle filter, MF-UPF)算法。

高斯过程的本质是一个具有概率意义的核学习机,通过训练数据集可对输入数据的预测输出做出概率解释并对模型预测输出的不确定性进行评价。与人工神经网络和支撑向量机相比高斯过程更易于实现,其参数可以在计算中用自适应方法得到。

高斯过程由均值和方差函数描述。假设包含  $S$  对输入输出数据训练集  $\mathbf{D} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \dots, (\mathbf{x}_S, \mathbf{y}_S)\}$ , 其噪声的函数形式为

$$\mathbf{y}_i = f(\mathbf{x}_i) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{x}_i$  是  $n$  维输入向量;  $\mathbf{y}_i$  是一维输出(此处以一维为例,多维情况可类似扩展);  $\boldsymbol{\varepsilon}$  是服从  $N(0, \boldsymbol{\sigma}_n^2)$  的高斯噪声项。

设在给定训练集  $\mathbf{D} = \langle \mathbf{X}, \mathbf{y} \rangle$  和测试集  $\mathbf{X}_*$  的情况下,相应的输出为  $\mathbf{f}_*$ , 则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}_* \end{bmatrix} \sim \left[ 0, \begin{bmatrix} K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \boldsymbol{\sigma}_n^2 \mathbf{I} & K(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) \\ K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}) & K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}_*) \end{bmatrix} \right] \quad (12)$$

从而由条件概率公式推导得到相应的预测输出值的期望和方差:

$$GP_{\mu}(\mathbf{X}_*, \mathbf{D}) = K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}) [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \boldsymbol{\sigma}_n^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{y} \quad (13)$$

$$GP_{\Sigma}(\mathbf{X}_*, \mathbf{D}) = K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}_*) -$$

$$K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}) [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \boldsymbol{\sigma}_n^2 \mathbf{I}]^{-1} K(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) \quad (14)$$

式中,核函数  $K(\mathbf{C}, \mathbf{D})$  中  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  分别代表  $\mathbf{X}$  或  $\mathbf{X}_*$ , 对应元素  $k(\mathbf{C}_i, \mathbf{D}_j)$  选择常用的高斯函数<sup>[15]</sup>

$$k(\mathbf{C}_i, \mathbf{D}_j) = \sigma_f^2 e^{-\frac{1}{2l}(\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_j)^T (\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_j)} \quad (15)$$

式中,  $\sigma_f^2$  是信号方差;  $l$  是尺度因子,用  $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_f, \sigma_n, l]^T$  表示高斯过程的超参数,描述了式(15)的核函数和式(11)中的噪声。

高斯过程回归学习代替系统状态方程,即状态转移方程以及相关的噪声协方差阵。采用的方法是每一维输出用一个高斯过程回归(Gaussian process regression, GPR)来学习,训练数据即为相应的输入输出对。状态模型反映系统输入量  $\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k \rangle$  和状态  $\mathbf{x}_{k+1}$  之间的映射。GPR 相应的

状态方程的训练数据集分别为

$$D_f = \langle (\mathbf{X}, \mathbf{U}), \mathbf{X}' \rangle \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{X}'$  是状态  $\mathbf{X}$  和输入  $\mathbf{U}$  对应的输出集合。

用  $GP^f$  表示 GPR 得到的状态方程模型如下:

$$\mathbf{x}_k = GP^f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}, D_f) \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(0, GP_{\Sigma}^f((\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}), D_f))$ 。

### 3 无模型无迹粒子滤波编队卫星相对运动估计

针对各种摄动造成的卫星相对运动方程不确定的情况,采用 MF-UPF 既保持了 UPF 的精度,同时又增加了其在模型不确定情况下的鲁棒性。

MF-UPF 算法与普通粒子滤波算法的不同之处在于将系统的状态模型替换为 GPR 模型。将卫星相对运动模型用  $GP([\boldsymbol{\chi}_k^{(i)x}, \mathbf{u}_{k-1}], D_f)$  代替,式(7)的权值更新中用到的模型同样要替换为 GPR 模型。

无模型无迹粒子滤波编队卫星相对运动估计算法流程如下:

**步骤 1** 初始化:  $k=0$

$i=1, \dots, N$ , 从先验分布  $p(\mathbf{x}_0)$  产生样本  $\boldsymbol{\chi}_0^{(i)}$ ,  $\omega_0^{(i)} = 1/N$ 。

**步骤 2** 对于时刻  $k=1, 2, \dots$

(1) 生成样本  $\boldsymbol{\chi}_k^{(i)} \sim GP([\boldsymbol{\chi}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{k-1}], D_f)$ ;

(2) 利用式(7)进行粒子权值更新(系统状态方程采用式(17)得到的模型),并归一化处理;

(3) 重采样:按照重要性权值的大小,分别增加或减少相应粒子个数得到  $N$  个新粒子  $\boldsymbol{\chi}_k^{(i)}$ ;

(4) 马尔可夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo, MCMC)改进策略:采用 MCMC 方法,使粒子移动到不同的地方避免贫化现象;

(5) 输出:输出粒子集的最优最小均方误差(minimum mean square error, MMSE)输出结果为

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k^*) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\chi}_k^{(i)} \quad (18)$$

式(15)中超参数的确定是通过将对数似然函数作为代价函数优化求取,即

$$\boldsymbol{\theta}_{\max} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \{\ln(p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}))\} \quad (19)$$

式中,对数似然函数形式为

$$\begin{aligned} \ln p(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\theta}) = & -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T [K + \boldsymbol{\sigma}_n^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{y} - \\ & \frac{1}{2} \ln |K + \boldsymbol{\sigma}_n^2 \mathbf{I}| - \frac{n}{2} \ln 2\pi \end{aligned} \quad (20)$$

利用 MF-UPF 估计卫星相对运动,对每一个采样粒子都用式(17)进行相应的高斯回归,因此计算得到新的粒子

及其权值是不同的。由于高斯回归的模型的训练集是确定的,所以很多计算量可以离线运算,剩余的在线计算量在可以接受的范围内。

### 4 仿真

为了验证 MF-UPF 与采用 C-W 方程作为状态方程的标准粒子滤波对于卫星相对运动状态估计的精度,下面考虑 2 颗卫星编队飞行的情况,进行相应的仿真验证。参数如表 1 所示。

表 1 编队卫星参数

项目名称	参数值
主星轨道要素	$a=7\ 000\text{ km}, e=0, \Omega=\pi/4,$ $i=\pi/6, \omega=\pi/6, \theta(0)=0$
主从星质量/kg	$m_c=200, m_d=100$

假定两颗卫星满足伴飞条件,相对运动形成一个中心为主星质心的椭圆。取地球引力常数  $\mu=398\ 600.4 \times 10^8\text{ m}^3/\text{s}^2$ , 从而主星的轨道角速度  $n=\sqrt{\mu/a^3}=0.001\ 1\text{ rad/s}, x_0=300\text{ m}, z_0=-400\text{ m}, \dot{x}_0=-0.2\text{ m/s}, \dot{z}_0=0.1\text{ m/s}$ 。根据伴飞条件需满足  $y_0=2\dot{x}_0/n, \dot{y}_0=-2n x_0$ 。仿真时为了接近真实情况,主星和从星分别进行轨道运动,同时考虑由于地球 J2~J4 项摄动和大气阻力引起的摄动加速度。

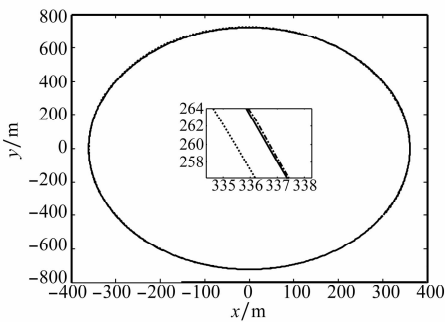
从星雷达选取文献[10]给出的技术指标,如表 2 所示。

表 2 某交会雷达主要技术指标

测量值	测量范围	测量误差(3σ)
$\rho/\text{m}$	$10^2 \sim 10^4$	0.1
$\alpha/(\text{°})$	$\pm 30$	0.05
$\beta/(\text{°})$	$\pm 30$	0.05

使用普通 PF 和 MF-UPF 两种方法,分别对编队卫星进行相对运动估计。其中普通 PF 的状态模型采用式(2)描述的 C-W 方程,假设其过程噪声为高斯白噪声  $w \sim N(0, R^w)$ ,由于摄动对加速度影响在  $10^{-6}\text{ m/s}^2$  量级,仿真取  $R^w = \text{diag}(10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-9}, 10^{-6}, 10^{-6}, 10^{-6})$ 。MF-UPF 的仿真,首先利用 500 组准确量测数据作为训练数据,采用 GPR 学习系统的状态模型和过程噪声协方差阵,进行粒子滤波的状态更新。

MF-UPF 和普通 PF 仿真结果如图 2~图 4 所示。



—: 真实轨迹; ----: MF-UPF估计; .....: PF估计。

图 2 编队卫星轨道面相对位置

在图 2 中的卫星相对位置放大图可以看出, MF-UPF 估计结果接近于真实的相对运动轨迹,而 PF 的位置估计误差则接近于 1 m。

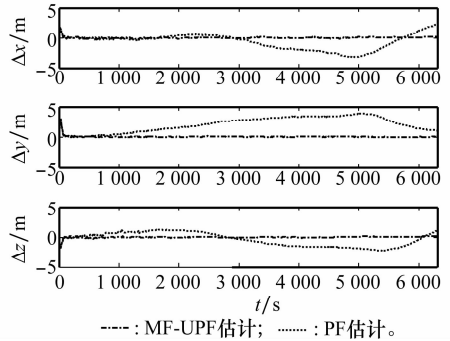


图 3 相对位置误差

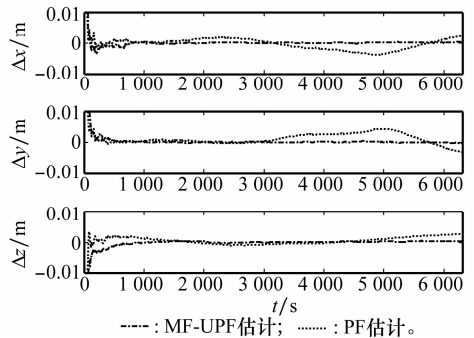


图 4 相对速度误差

由图 3 可以看出, MF-UPF 的相对位置估计精度小于 0.5 m,而 PF 的估计误差在运行周期大于 1 000 s 以后开始表现为幅值 5 m 左右的周期震荡。图 4 中, MF-UPF 对相对速度的估计精度小于 0.001 m/s,而 PF 则在 0.01 m/s 附近震荡。

从仿真结果来看, MF-UPF 估计精度明显优于 PF。这主要是由于其利用已有的数据离线学习系统模型,因此其滤波精度不受系统建模不准确的影响。

### 5 结论

针对卫星编队由于地球引力变化和大气阻力造成的模型不确定,一般的滤波方法采用简化 C-W 方程,把扰动看作高斯白噪声,但是这种方法牺牲了估计精度。本文提出了一种 MF-UPF,并将其应用在编队卫星相对运动估计上。新方法利用观测的卫星相对运动信息作为训练数据,经过高斯回归学习得到卫星相对运动学方程,替代 C-W 方程模型。新算法克服了传统的 PF 对模型准确已知的要求,估计精度有较大提高。

但是,高斯过程回归与粒子滤波结合还有一些问题需要解决,如协方差函数形式的选取、随粒子个数增加造成的计算量增加等。另外,由于高斯过程回归只能对一维输出的系统进行学习,当输出多维时需要建立多个高斯过程回归模型,因此模型为多维输出时较为复杂。

## 参考文献:

- [1] Alfriend K T, Gurfil P, Vadali S R. *Spacecraft formation flying: dynamics, control, and navigation* [M]. Kidlington: Butterworth-Heinemann, 2009:83 - 122.
- [2] McLoughlin T H, Campbell M. Distributed estimate fusion filter for large spacecraft formations[C]// *Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2008.
- [3] Yamada K, Shima T, Yoshikawa S. Effect of J2 perturbations on relative spacecraft position in near-circular orbits[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(2):584 - 590.
- [4] 陈根社, 文传源, 陈新海. 航天器相对运动估计的一种并行推广卡尔曼滤波方法[J]. *航空学报*, 1996, 17(1): 43 - 51. (Chen G S, Wen C Y, Chen X H. A parallel extended Kalman filter for spacecraft relative motion estimation[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1996, 17(1):43 - 51.)
- [5] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. *IEE Proceedings, Part F: Radar and Signal Processing*, 1993, 140(2):107 - 113.
- [6] Gustafsson F. Particle filter theory and practice with positioning applications[J]. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 2010, 25(7):53 - 81.
- [7] Cheng Y, Crassidis J L. Particle filtering for attitude estimation using a minimal local-error representation[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(4):1305 - 1310.
- [8] Hartikainen J, Sarkka S. Kalman filtering and smoothing solutions to temporal Gaussian process regression models[C]// *Proc. of the IEEE 20th International Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, 2010:379 - 384.
- [9] Rasmussen C E, Williams C K I. *Gaussian processes for machine learning* [M]. Cambridge: The Massachusetts Institute of Technology Press, 2005:7 - 32.
- [10] Sidi M J. *Spacecraft dynamics and control: a practical engineering approach* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [11] Chen T, Xu S. Double line-of-sight measuring relative navigation for spacecraft autonomous rendezvous[J]. *Acta Astronautica*, 2010, 67(1/2):122 - 134.
- [12] Chen T, Schon T B, Ohlsson H, et al. Decentralized particle filter with arbitrary state decomposition[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2011, 59(2):465 - 478.
- [13] van der Merwe R, Doucet A, de Freitas N, et al. The unscented particle filter[R]. Cambridge: Cambridge University Engineering Department, 2000.
- [14] Straka O, Dunik J, Imandl M. Truncated unscented particle filter[C]// *Proc. of the American Control Conference*, 2011: 1825 - 1830.
- [15] Schneider M, Ertel W. Robot learning by demonstration with local gaussian process regression[C]// *Proc. of the International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010:255 - 260.