

基于约束规划的小天体接近段鲁棒制导控制方法

高艾¹, 崔平远^{1,2}, 崔祐涛¹

(1. 哈尔滨工业大学深空探测基础研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001;
2. 飞行器动力学与控制教育部重点实验室, 北京 100081)

摘要:以小天体接近段任务为背景,提出了一种基于约束规划的鲁棒制导控制方法。该方法将目标天体引力模型引入轨迹规划过程中,并将具有控制约束与轨迹状态约束的非线性动力学路径规划问题转化为以优化燃耗为性能指标的二阶圆锥规划(second-order cone program, SOCP)问题;同时考虑目标天体引力模型与外界干扰等不确定因素对轨迹跟踪的影响,基于模型不确定界设计鲁棒反馈控制律。数学仿真证明,在相同条件下,基于凸规划的制导控制性能无论在制导控制偏差或是状态与控制约束满足方面均优于传统多项式拟合制导控制算法。

关键词: 小天体接近; 制导与控制; 约束规划; 二阶圆锥规划; 鲁棒反馈控制

中图分类号: V 448. 233

文献标志码: A

DOI: 10. 3969/j. issn. 1001-506X. 2012. 05. 24

Robust guidance and control algorithms for small-body proximity operations based on constrained programming

GAO Ai¹, CUI Ping-yuan^{1,2}, CUI Hu-tao¹

(1. Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
2. Key Laboratory of Dynamics and Control of Flight Vehicles, Ministry of Education, Beijing 100081, China)

Abstract: The robust guidance and control algorithms based on constrained programming for enabling spacecraft proximity operations about small-bodies are developed. Incorporating the gravity models of the target bodies, in addition to enabling the satisfaction of state and control constraints, allows the problem to be cast as a second-order cone program (SOCP). Considering the influence of uncertainties from gravity model and disturbance on tracking the guidance trajectory, the design of the feedback policy is conducted based on bounding arguments on the model uncertainty. The results from mathematical simulation show that the guidance and control algorithms based on the convex program provide a clear benefit over classical polynomial fit guidance methods in reducing guidance and control deviation and satisfying state and control constraints.

Keywords: small-body proximity operation; guidance and control; constrained programming; second-order cone program; robust feedback control

0 引言

在对小天体的接近过程中,由于引力、几何地形及其相关因素不确定性的存在,探测器制导控制算法需要对未知因素具有一定的处理能力。通常对于行星和月球的探测任务,由于对目标天体的长时间观测,事先获得了较为完备的天体特性信息,因此基于地面站的制导控制策略已成为对其进行接近操作过程中的常规模式。而对于小天体探测任务,目前并不具备对其进行长期观测的条件,这就需要探测器自身具备对未知情况进行快速处理的能力,加之较长通

信延迟的存在,使利用基于地面站模式的制导控制方案的可能性大大降低。自主制导控制算法有利于妥善解决这一问题,且目前的星载计算能力和可用的演算技术使这一方法成为可能。

传统的轨迹规划方法是利用多项式对探测器当前状态与期望状态进行拟合从而形成跟踪路径点,以其作为逼近系统最优解的解析形式^[1-2]。由于这种方法简便易行且运算量低,因此成为以往探测器接近任务段制导控制策略的选择。然而,非线性的探测器动力学系统的解很难用简单的多项式形式代替,由传统轨迹规划方法所形成的路径点

并不是系统的最优解。同时,随着探测任务的复杂化与探测要求的不断提高,传统轨迹规划方法无法满足任务过程中严格的状态约束与控制约束,因此寻找优化的轨迹制导控制方法成为近年来国内外学者关注的问题^[3-5]。

针对上述问题,本文将目标天体引力模型引入轨迹规划过程中,同时加入接近过程中对状态与控制约束,将具有控制约束与轨迹状态约束的非线性动力学路径规划问题转化为以优化燃耗为性能指标的二阶圆锥规划(second-order cone program, SOCP)问题。进而,这一凸规划问题可通过内点法对其进行高效求解^[6-9]。由此规划产生的路径点不仅是传统意义上的目标跟踪状态,而且该状态是在考虑目标天体引力场影响情况下满足具有状态与控制约束动力学系统的可行解。此外,所得前馈控制输入满足星上设备和滤波估计所需的推力器关闭时间要求。与此同时,考虑目标天体引力模型与外界干扰等不确定因素对轨迹跟踪的影响,基于模型不确定界离线设计鲁棒反馈控制律,用于确保实际状态轨迹与前馈设计轨迹的偏离量不超过期望的界。由此产生的轨迹制导与控制方法不仅优化了传统的多项式拟合轨迹规划方法,而且对设计水平范围内的模型不确定性具有一定的反馈鲁棒特性。

1 凸规划制导算法

1.1 标称系统动力学模型建立

在小天体质心固连坐标系下建立探测器接近小天体动力学模型,可由如下方程表示

$$\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{u} + \mathbf{d} + \mathbf{g}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

式中, $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$ 为探测器在小天体质心固连坐标系下的矢径; $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^3$ 为天体自旋角速率; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ 为作用的控制加速度; \mathbf{d} 为干扰加速度(主要由外界引力干扰、太阳光压、彗星尘埃弹射产生); \mathbf{g} 为引力加速度。

假设小天体自旋角速率稳定且为一常值(即 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$), 则式(1)中的动力学模型可有如下状态空间描述形式

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{r} \quad \dot{\mathbf{r}}]^T \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{g}(\mathbf{C}\mathbf{x}) \quad (3)$$

式中, $\mathbf{A} = [[\mathbf{0} \quad \boldsymbol{\omega}^2]^T \quad [\mathbf{I} \quad -2\dot{\boldsymbol{\omega}}]^T]$; $\mathbf{B} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]^T$; $\mathbf{C}_r = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]$ 且 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为向量叉乘 $\boldsymbol{\omega} \times (\cdot)$ 的矩阵表示。值得注意的是,这里并未对 $\mathbf{g}(\mathbf{C}\mathbf{x})$ 进行线性化处理,在后续设计中将利用数值引力梯度代替;而干扰加速度 \mathbf{d} 将被作为名义系统动力学模型(3)的不确定性因素通过反馈控制进行处理。

考虑推力器有限开启时间 δ_f 以及关闭时间 δ_s 的要求,将系统(3)进行离散化,所得模型将被用于凸规划制导算法的设计。在固定时间间隔 $\Delta t (\Delta t \geq \delta_f + \delta_s)$ 内,控制加速度输入 $\mathbf{u}(t)$ 可描述为

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_k, & t \in [t_k, t_k + \delta_f] \\ \mathbf{0}, & t \in (t_k + \delta_f, t_{k+1}) \end{cases} \quad (4)$$

式中, $t_{k+1} - t_k = \Delta t$ 且 \mathbf{u}_k 为有限控制输入。在推力器开启过程中,式(3)所描述系统的解在 $t = t_k + \delta_f$ 时刻可近似为

$$\mathbf{x}(t_k + \delta_f) = e^{\mathbf{A}\delta_f} \mathbf{x}(t_k) + \int_0^{\delta_f} e^{\mathbf{A}(\delta_f - \tau)} \mathbf{B} d\tau \cdot \mathbf{u}_k + \int_0^{\delta_f} e^{\mathbf{A}(\delta_f - \tau)} \mathbf{B} d\tau \cdot \mathbf{g}_k \quad (5)$$

式中, \mathbf{g}_k 为天体引力势函数在状态 \mathbf{x}_k 上的梯度(即以数值引力梯度作为离散模型中引力加速度输入项)。在随后的推力器关闭过程中,式(3)所描述系统的解在 $t = t_{k+1}$ 时刻可近似为

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{\mathbf{A}(\Delta t - \delta_f)} \mathbf{x}(t_k + \delta_f) + \int_{\delta_f}^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{B} d\tau \cdot \mathbf{g}_k \quad (6)$$

将式(5)代入式(6),可得

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{x}(t_k) + e^{\mathbf{A}(\Delta t - \delta_f)} \int_0^{\delta_f} e^{\mathbf{A}(\delta_f - \tau)} \mathbf{B} d\tau \cdot \mathbf{u}_k + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{B} d\tau \cdot \mathbf{g}_k \quad (7)$$

将 $\mathbf{x}(t_k)$ 简记为 \mathbf{x}_k , 在每个时间间隔 Δt 上有如下离散方程形式

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{E}_k \mathbf{g}_k \quad (8)$$

式中, $\mathbf{A}_k = e^{\mathbf{A}\Delta t}$; $\mathbf{B}_k = e^{\mathbf{A}(\Delta t - \delta_f)} \int_0^{\delta_f} e^{\mathbf{A}(\delta_f - \tau)} \mathbf{B} d\tau$; $\mathbf{E}_k = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t - \tau)} \mathbf{B} d\tau$ 。

1.2 开环制导问题的求解

在式(8)描述的离散系统模型中,由于 \mathbf{g}_k 依赖于制导路径 \mathbf{x}_k , 因此可先通过线性或多项式拟合得到一条初始参考轨迹 $\{\mathbf{x}_0^0, \dots, \mathbf{x}_N^0\}$ 以确定 $\mathbf{g}_k^0 (k=0, \dots, N-1)$ 。该拟合轨迹在初始时刻 $t=0 (k=0)$ 满足 $\mathbf{x}_0^0 = \mathbf{x}_S$ (\mathbf{x}_S 为当前状态), 末端时刻 $t=T (k=N)$ 满足 $\mathbf{x}_N^0 = \mathbf{x}_F$ (\mathbf{x}_F 为末端期望状态), 再由这一初始猜测开始, 引入状态约束与控制约束, 通过反复迭代求解具有控制约束与轨迹状态约束的动力学路径规划问题, 以寻找接近目标天体过程中可行的制导路径 $\{\mathbf{u}_k\}, \{\mathbf{x}_k\}$ 。可将这一求解过程描述为如下迭代求解凸规划问题的过程。

给定当前状态 \mathbf{x}_S (测量值或估计值), 期望终端状态 \mathbf{x}_F 以及初始参考轨迹 $\{\mathbf{x}_0^0, \dots, \mathbf{x}_N^0\}$, 执行 $j=0, \dots, M-1$ 步迭代:

(1) 利用第 j 次迭代产生的制导路径 $\{\mathbf{x}_0^j, \dots, \mathbf{x}_{N-1}^j\}$ 计算更新离散时变模型参数 $\mathbf{g}_k^j (k=0, \dots, N-1)$;

(2) 求解如下 SOCP 问题以产生制导路径 $\{\mathbf{x}_0^{j+1}, \dots, \mathbf{x}_N^{j+1}\}$ 与相应控制序列 $\{\mathbf{u}_0^{j+1}, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^{j+1}\}$

$$\begin{cases} \min \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha \|\mathbf{u}_k^{j+1}\| + \beta \|\mathbf{u}_k^{j+1}\|^2) + \epsilon \|\mathbf{E}_v(\mathbf{x}_N^{j+1} - \mathbf{x}_F)\| \\ \text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^{j+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k^{j+1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k^{j+1} + \mathbf{E}_k \mathbf{g}_k^j \\ \mathbf{x}_0^{j+1} = \mathbf{x}_S \\ \mathbf{E}_v(\mathbf{x}_N^{j+1} - \mathbf{x}_F) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_k^{j+1} \in \mathbf{X} \\ \mathbf{u}_k^{j+1} \in \mathbf{U} \\ \|\mathbf{x}_k^{j+1} - \mathbf{x}_k^j\| \leq \kappa \|\mathbf{x}_k^j - \mathbf{x}_k^{j-1}\| \\ j = 1, \dots, M-1 \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

式中, 代价函数中 α, β 分别为燃耗和能耗的权重, 且 $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ 用于优化燃耗, $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ 用于优化能耗; 为了便于处理计算, 放宽末端约束, 将末端速度约束加入代价函数, 取 $\epsilon > 0, \mathbf{E}_v = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}], \mathbf{E}_v = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]$; 状态约束域 \mathbf{X} 和控制量约束域 \mathbf{U} 均为利用二阶圆锥约束描述的凸集; 为保证凸规划制导算法产生轨迹的收敛性, 取约束参数 $0 < \kappa < 1$, 以确保在每一时刻的状态序列均为柯西序列。至此所得到的凸规划问题可利用内点法进行高效求解。

2 轨迹跟踪鲁棒反馈控制算法

由于真实系统存在一定的不确定性, 反馈的施加是为

了确保真实系统具有跟踪标称制导轨迹的能力,即保证真实轨迹与标称轨迹的偏差不超过规定的界。

2.1 跟踪误差动力学模型建立

假设真实系统动力学可描述如下:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\chi} + \mathbf{B}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) + \mathbf{B}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{C}_r\boldsymbol{\chi}) + \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (10)$$

式中, $\boldsymbol{\chi}$ 为真实的探测器状态; $\boldsymbol{\phi}$ 为真实的引力加速度; $\delta\mathbf{u}$ 为反馈控制加速度。值得注意的是, 式(3)为用于制导设计的动力学标称模型, 其中 \mathbf{g} 为真实引力加速度 $\boldsymbol{\phi}$ 的建模。定义状态误差 $\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi} - \mathbf{x}$, 则误差动力学模型为

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\mathbf{u} + \mathbf{B}[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{C}_r\boldsymbol{\chi}) - \mathbf{g}(\mathbf{C}_r\mathbf{x})] + \mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\mathbf{u} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (11)$$

式中, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{C}_r\boldsymbol{\chi}) - \boldsymbol{\phi}(\mathbf{C}_r\mathbf{x})$; $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{C}_r\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{C}_r\mathbf{x})$ 。

考虑所需的推力器关闭时间, 反馈策略的设计基于跟踪误差的离散动力学模型, 设定反馈控制输入在给定时间间隔内与前馈控制同时作用。对系统(11)离散化, 可得

$$\delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\delta\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\delta\mathbf{u}_k + \mathbf{E}_k(\boldsymbol{\psi}_k + \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{d}_k) \quad (12)$$

2.2 反馈控制律设计

若允许的最大跟踪误差为 $\delta\mathbf{x}_{\max}$, 则将误差约束集设定为多胞体

$$\mathbf{P} = \{ \delta\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_p^T \delta\mathbf{x} \leq 1, p = 1, \dots, q \} \quad (13)$$

满足 $\max \{ \mathbf{a}_p^T \delta\mathbf{x} \} = \{ \delta\mathbf{x}_{\max}^T \delta\mathbf{x} \}$ 。

此时, 可通过如下反馈设计保证真实轨迹在标称轨迹周围的不变椭圆 $\epsilon_p = \{ \delta\mathbf{x} \mid \delta\mathbf{x}^T \mathbf{P} \delta\mathbf{x} \leq 1, \mathbf{P} > \mathbf{0} \}$ 内, 且 $\epsilon_p \subseteq \mathbf{P}$ 。

若已知模型误差满足式(14), 则在反馈控制律 $\delta\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\delta\mathbf{x}_k$ (其中 \mathbf{K} 为状态反馈控制增益矩阵) 的作用下误差状态可达域如式(15)所示。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\psi}_k = \frac{\partial\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{C}_r\delta\mathbf{x}_k \\ \frac{\partial\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} \in \Omega = \{ \boldsymbol{\Theta} \mid \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} \leq \gamma^2 \mathbf{I}, \gamma > 0 \} \\ \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k \leq \sigma^2 \\ \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \leq \delta^2 \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = \{ \delta\mathbf{x}_k \mid \delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\delta\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\delta\mathbf{u}_k + \mathbf{E}_k(\boldsymbol{\psi}_k + \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{d}_k), \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k \leq \gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k \leq \sigma^2, \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \leq \delta^2 \} \quad (15)$$

假设存在 Lyapunov 函数 $V_k = \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \delta\mathbf{x}_k (\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0})$ 满足

$$\begin{cases} \delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\delta\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\delta\mathbf{u}_k + \mathbf{E}_k(\boldsymbol{\psi}_k + \boldsymbol{\omega}_k + \mathbf{d}_k) \\ V_{k+1} \leq 1, V_k \leq 1 \\ \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k \leq \gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k \leq \sigma^2, \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \leq \delta^2 \end{cases} \quad (16)$$

则椭圆 $\epsilon_p = \{ \delta\mathbf{x} \mid \delta\mathbf{x}^T \mathbf{P} \delta\mathbf{x} \leq 1, \mathbf{P} > \mathbf{0} \} \subset \mathbf{H}$ 。

由式(16)所示有如下不等式:

$$\begin{cases} 1 - V_{k+1} \geq 0 \\ 1 - V_k \geq 0 \\ \gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k \geq 0 \\ \sigma^2 - \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k \geq 0 \\ \delta^2 - \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \geq 0 \end{cases}$$

应用 S 方法^[10] 对上式进行处理, 则存在 $\tau_i \geq 0 (i=1, \dots, 4)$ 使

$$(1 - V_{k+1}) - \tau_1(1 - V_k) - \tau_2(\gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k) - \tau_3(\sigma^2 - \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k) - \tau_4(\delta^2 - \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k) \geq 0$$

对上式左右两边同时取负, 则有

$$(V_{k+1} - 1) + \tau_1(1 - V_k) + \tau_2(\gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k) +$$

$$\tau_3(\sigma^2 - \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k) + \tau_4(\delta^2 - \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k) \leq 0 \quad (17)$$

令 $\tau_1 = 1 - \alpha, \tau_2 = \beta, \tau_3 = \frac{\alpha}{2\sigma^2}, \tau_4 = \frac{\alpha}{2\delta^2}$, 将式(17)展开为

$$(V_{k+1} - 1) + (1 - \alpha)(1 - V_k) + \beta(\gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k) + \frac{\alpha}{2\sigma^2}(\sigma^2 - \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k) + \frac{\alpha}{2\delta^2}(\delta^2 - \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k) = V_{k+1} - 1 + 1 - \alpha + (\alpha - 1)V_k + \beta(\gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k) + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\sigma^2} \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2\delta^2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k = V_{k+1} + (\alpha - 1)V_k + \beta(\gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k) - \frac{\alpha}{2\sigma^2} \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k - \frac{\alpha}{2\delta^2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \leq 0$$

即可得式(18)如下:

$$V_{k+1} + (\alpha - 1)V_k + \beta(\gamma^2 \delta\mathbf{x}_k^T \mathbf{C}_r^T \mathbf{C}_r \delta\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\psi}_k) - \frac{\alpha}{2\sigma^2} \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{\omega}_k - \frac{\alpha}{2\delta^2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{d}_k \leq 0 \quad (18)$$

又由 Schur 补引理^[10], 可将式(18)等价表示为线性矩阵不等式形式, 则有。

$$\begin{bmatrix} (\alpha-1)\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^T + \mathbf{K}^T \mathbf{B}_k^T & \mathbf{C}_r^T \\ \mathbf{0} & -\beta\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\alpha}{2\sigma^2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\alpha}{2\delta^2}\mathbf{I} & \mathbf{E}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{K} & \mathbf{E}_k & \mathbf{E}_k & \mathbf{E}_k & -\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\beta\gamma^2}\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha-1)\mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}\mathbf{A}_k^T + \mathbf{L}^T \mathbf{B}_k^T & \mathbf{Q}\mathbf{C}_r^T \\ \mathbf{0} & -\zeta\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \zeta\mathbf{E}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\alpha}{2\sigma^2}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{\alpha}{2\delta^2}\mathbf{I} & \mathbf{E}_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k\mathbf{Q} + \mathbf{B}_k\mathbf{L} & \mathbf{E}_k & \mathbf{E}_k & \mathbf{E}_k & -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_r\mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\gamma^2}\chi\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (20)$$

令 $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{P}, \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}, \zeta = 1/\beta$, 并用矩阵 $\text{diag}([\mathbf{Q} \quad \zeta\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{I}])$ 分别左右乘式(19), 有式(20)。

考虑状态约束 $\epsilon_p \subseteq \mathbf{P}$ 与控制约束 $\|\delta\mathbf{u}_k\| \leq \delta U_{\max}$ (δU_{\max} 为反馈控制输入的约束界), 将二者分别描述为如式(21)和式(22)所示的线性不等式约束。

$$\mathbf{a}_p^T \mathbf{Q} \mathbf{a}_p \leq 1 \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \delta U_{\max}^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (22)$$

综上所述, 若系统模型误差满足条件(14), 可给出如下定理。

定理 1 若存在矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}, \mathbf{L}$ 和标量 $1 > \alpha > 0, \zeta > 0$, 使由式(20)~式(22)构成的线性矩阵不等式组成立, 则有控制律 $\delta\mathbf{u}_k = \mathbf{L}\mathbf{Q}^{-1}\delta\mathbf{x}_k$ 使 $\delta\mathbf{x}_k \in \epsilon_p \subseteq \mathbf{P}$ 且满足 $\|\delta\mathbf{u}_k\| \leq \delta U_{\max}$ 。

3 仿真结果与分析

联合式(9)所得凸规划前馈控制与式(20)~式(22)所得鲁棒反馈控制,并将其应用于小行星 Eros 接近段任务制导与控制系统进行验证。

3.1 仿真模型参数

探测器模型参数如表 1 所示。

表 1 探测器仿真模型参数

| 模型参数 | 参数值 |
|------------|-----|
| 探测器质量/kg | 400 |
| 期望机动时间/s | 300 |
| 最大前馈控制推力/N | 125 |
| 最大反馈控制推力/N | 20 |
| 推力器关闭时间/s | 20 |
| 推力器开启时间/s | 10 |

目标天体四阶引力势函数模型如式(23)所示。其中, $\mu_A = GM$ 为万有引力常数和小天体质量的乘积; a 为小天体的名义半径; r, θ, φ 分别为小天体质心固连系坐标系下探测器径向距离、赤经和赤纬; C_m 为球谐项系数(具体模型参数可参考文献[11-12])。

$$V(r, \theta, \varphi) =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mu_A}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\frac{1}{2} C_{20} (3 \sin^2 \varphi - 1) + 3 C_{22} \cos^2 \varphi \cos 2\theta \right] + \right. \\ & \left. \left(\frac{a}{r} \right)^4 \left[\frac{1}{8} C_{40} (35 \sin^4 \varphi - 30 \sin^2 \varphi + 3) + \frac{15}{2} C_{42} \cos^2 \varphi \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. (7 \sin^2 \varphi - 1) \cos 2\theta + 105 C_{44} \cos^2 \varphi \cos 4\theta \right] + O(r^{-5}) \right\} \quad (23) \end{aligned} \right.$$

3.2 制导与控制需求描述

目标天体接近操作制导与控制目标是在期望机动时间 $T=300$ s 内,使探测器在控制策略 $u + \delta u$ 作用下由当前状态 $x_s = [8\ 950\ 20\ -50\ 1.5\ 2\ 0]^T$ 沿规划路径运动到期望末端状态 $x_f = [8\ 450\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$,且在此过程中满足如下状态约束与控制约束:

(1) 假设接近位置附近的天体表面距天体质心约 8 445 m,为避免探测器与天体相撞,设定标称状态约束集 $X = \{x | c^T x \geq 1, c = [1/8\ 445\ \mathbf{0}_{1 \times 5}]^T\}$;

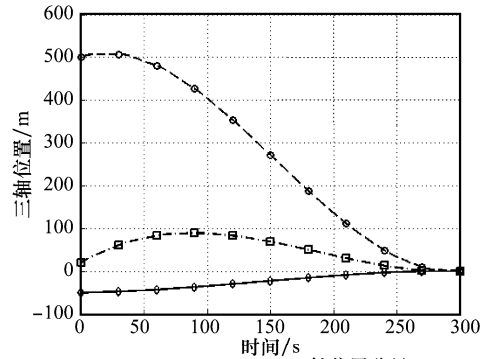
(2) 当标称系统模型与真实系统存在 1%~5% 的不确定性时,确保探测器真实轨迹与标称轨迹的各轴位置偏差不得超过 3 m,各轴速度偏差不得超过 0.2 m/s,设定反馈控制误差状态约束集为 $\delta X = \{\delta x | a^T \delta x \leq 1, a = [3 \cdot \mathbf{I}_{1 \times 3}\ 0.2 \cdot \mathbf{I}_{1 \times 3}]^T\}$;

(3) 前馈控制输入幅值上限为 $U_{\max} = \frac{125}{m}$ m/s²,反馈控制输入幅值上限为 $\delta U_{\max} = \frac{20}{m}$ m/s²;

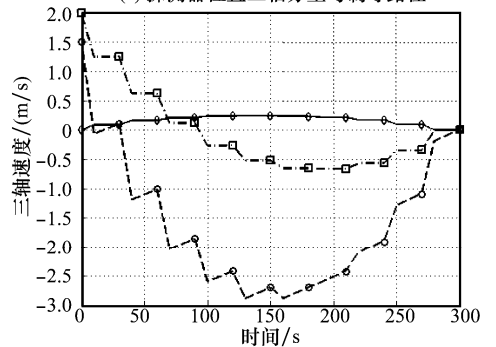
(4) 推力器开启时间为 $\delta_f = 10$ s,推力器关闭时间为 $\delta_c = 20$ s,由于制导控制时间间隔 $\Delta t \geq \delta_f + \delta_c$,因此取 $\Delta t = 30$ s。

3.3 仿真结果分析

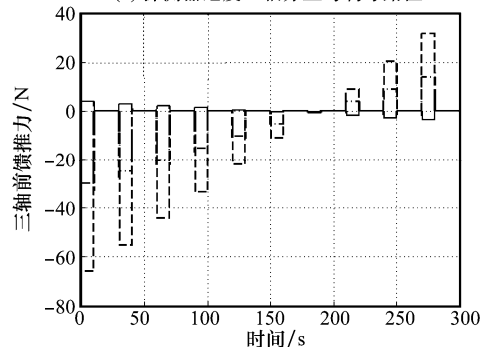
在不考虑不确定性因素的条件,由图 1 所示,利用凸规划制导算法所得前馈控制量可将探测器送达期望接近位置点的 2 m 范围内,最终速度可控制在 0.02 m/s 左右,且制导算法给出的控制力满足推力器在有限开启时间内的推力幅值上限约束。



(a) 探测器位置三轴分量与制导路径



(b) 探测器速度三轴分量与制导路径



(c) 前馈控制推力

图 1 标称系统模型开环制导控制路径

当系统模型存在 5% 不确定性时, 此时若仅利用开环制导控制, 则探测器的接近能力将大幅度降低。由图 2 所示, 探测器偏离期望接近位置近 200 m, 接近速度高达 1.5 m/s。

考虑模型不确定性的存在, 在接近过程中加入反馈控制, 由图 3 可见, 探测器真实状态与凸规划制导所产生的路径点基本相符, 其位置偏差在 3 m 范围内, 末速度偏差在 0.05 m/s 左右, 且反馈控制输入满足推力器在有限开启时间内的推力幅值上限约束, 满足整体设计要求。

考虑模型不确定性的存在, 在接近过程中加入反馈控

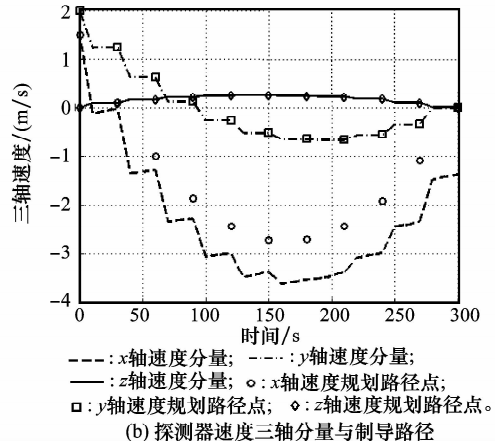
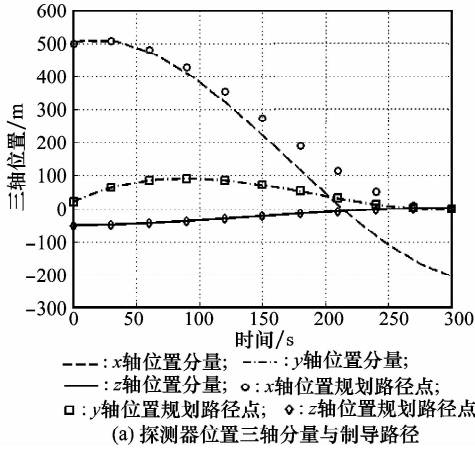


图 2 不确定性系统模型开环制导控制路径

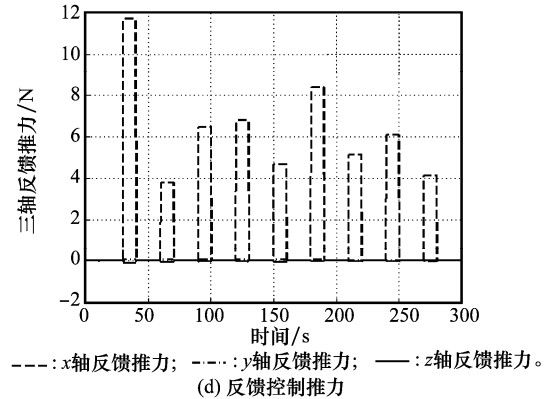
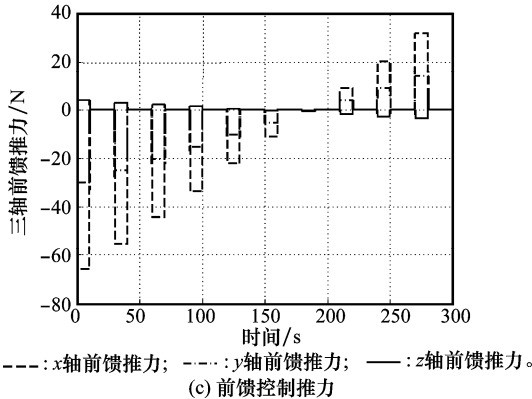
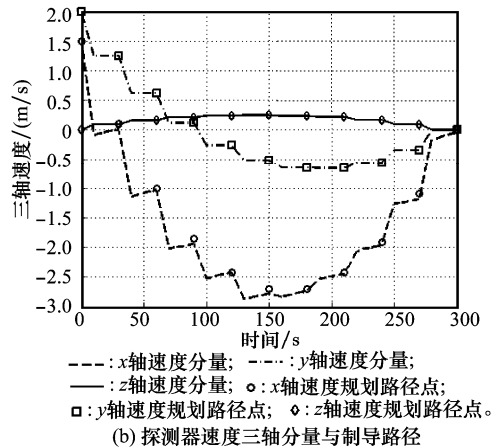
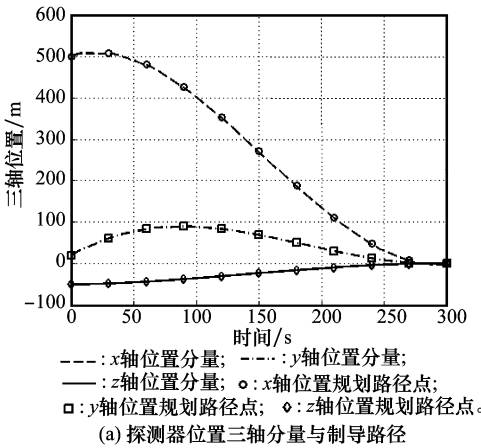


图 3 不确定性系统模型闭环制导控制路径

在相同仿真条件下, 利用 3 次拟合制导算法进行轨迹规划。在其设计过程中未对探测器状态及控制输入进行约束, 图 4 给出了相应的仿真结果, 其位置偏差范

围在 30 m 左右, 末速度偏差为 0.6 m/s 左右, 反馈控制力幅值在 150 N 上下, 远远超出了可提供反馈推力输入上限。

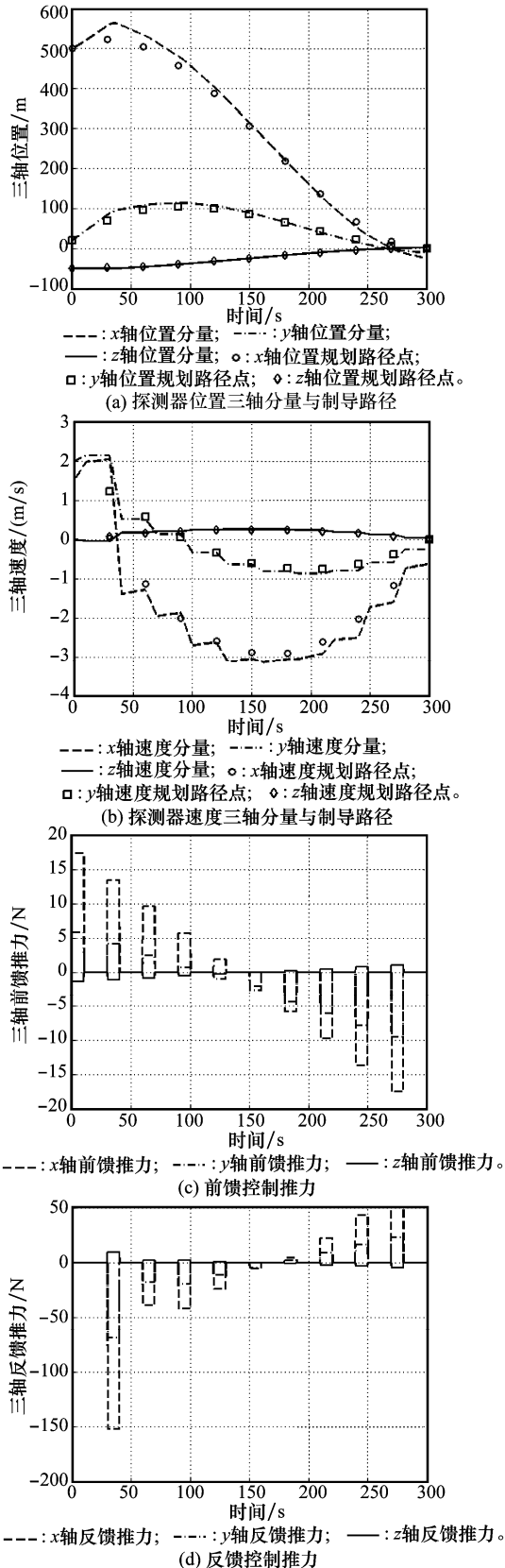


图 4 相同条件下 3 次多项式拟合制导控制路径

为更直观地对两种制导算法的性能进行对比,将探测器的轨迹路径绘制到三维坐标系内,同时观察其在水平面内与高度轴上投影状态的约束满足情况,如图 5 和图 6 所示。可见,在反馈控制的作用下,探测器真实轨迹能够保持在以凸规划制导算法所得标称轨迹点为中心 3 m 偏差为半径形成的状态椭球约束域内,且探测器始终保持在天体表面约束之上;相比之下,对于传统多项式拟合制导所得的标称轨迹,采用相同的反馈控制律不足以对其进行跟踪,探测器状态超出了规定的误差椭球约束域,且无法避免与目标天体发生碰撞的可能。

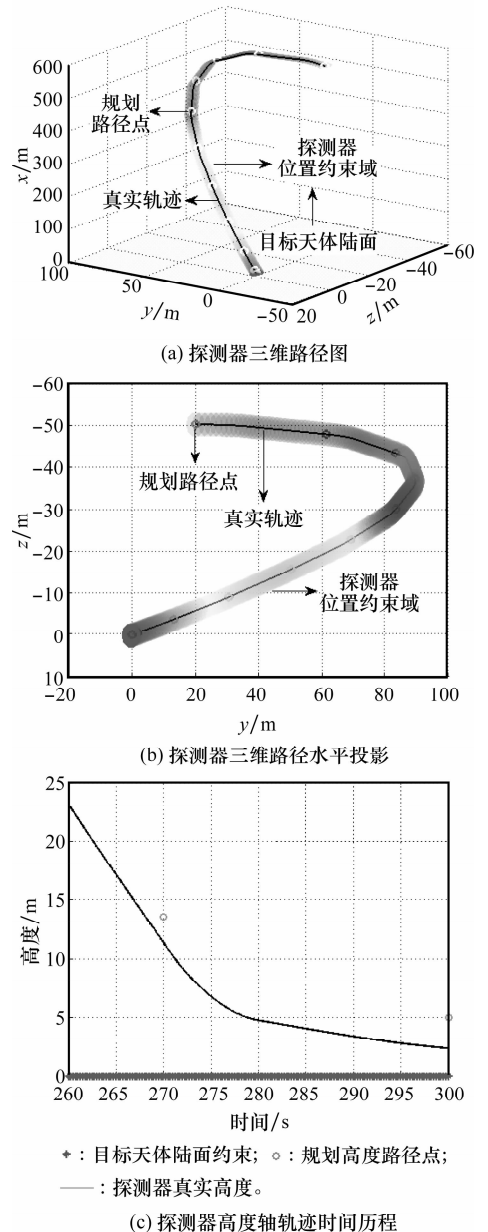


图 5 三维位置空间内凸规划制导控制路径约束满足情况

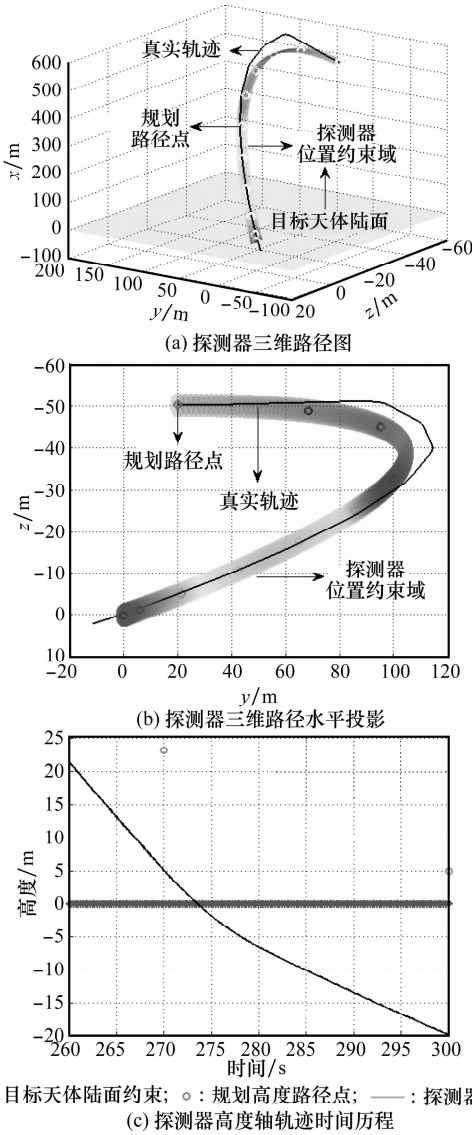


图 6 三维位置空间内 3 次多项式拟合制导控制路径约束满足情况

4 结 论

凸规划制导算法给出了一条同时满足状态约束与控制约束的标称轨迹,在此基础上所设计的反馈控制增强了系统对不确定因素的鲁棒性。与传统多项式拟合制导算法相比较,由于将动力学约束、状态约束以及控制约束同时引入轨迹规划的过程中,因此基于凸规划的制导算法产生的路

径点是满足具有状态与控制约束的非线性动力学系统的可行解,从而提高了制导控制性能。值得一提的是,考虑到凸规划问题求解的高效性,该制导控制方法具有在线规划的潜力。

参考文献:

[1] Klumpp A R. Apollo lunar descent guidance[J]. *Automatica*, 1974,10(2):133-146.

[2] Sostaric R R, Rea J R. Powered descent guidance methods for the moon and mars[C]// *Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2005.

[3] Blackmore L, Acikmese B, Scharf D. Minimum-landing-error powered-descent guidance for Mars landing using convex optimization[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(4): 1161-1171.

[4] Ploen S R, Acikmese A B, Wolf A. A comparison of powered descent guidance laws for Mars pinpoint landing[C]// *Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2006.

[5] Acikmese A B, Ploen S R. Convex programming approach to powered descent guidance for Mars landing [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007,30(5):1353-1366.

[6] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex optimization* [M]. 1st ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004:561-623.

[7] Nesterov Y, Nemirovsky A. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming* [M]. 3rd ed. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001: 217-248.

[8] Sturm J F. Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999,11(1):625-653.

[9] Toh K C, Todd M J, Tutuncu R H. SDPT3-a matlab software package for semidefinite programming[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999,11(1):545-581.

[10] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory* [M]. 1st ed. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994:7-35.

[11] Rossil A, Marzari F, Farinella P. Orbital evolution around irregular bodies[J]. *Earth, Planets and Space*, 1999, 51: 1173-1180.

[12] Yeomans D K, Antreasian P G, Barriot J P, et al. Radio science results during the near-shoemaker spacecraft rendezvous with Eros[J]. *Science*, 2000, 289(5487): 2085-2088.