

# 信噪比失配对 LDPC 码 BP 译码收敛性的影响

李 森<sup>1</sup>, 王 洁<sup>1</sup>, 马林华<sup>2</sup>

(1. 空军工程大学导弹学院, 陕西 三原 713800;

2. 空军工程大学工程学院, 陕西 西安 710038)

**摘要:** 针对信噪比失配下置信传播译码的收敛性问题, 提出了一种收敛性分析方法。该方法利用改进的高斯近似理论计算译码消息的均值和方差, 获得外信息, 进而跟踪译码的收敛过程。可分析不同码型、信道状况、失配程度下的译码收敛性, 并给出了具体步骤和例子, 分析结果可为自适应地确定译码器的估计精度标准提供参考。最后给出了一种灵活的信噪比估计算法, 仿真验证了算法的有效性。

**关键词:** 低密度奇偶校验码; 信噪比; 置信传播; 高斯近似; 信噪比失配

中图分类号: TN 911.22

文献标志码: A

## Convergence of BP decoding for LDPC codes under SNR mismatch

LI Sen<sup>1</sup>, WANG Jie<sup>1</sup>, MA Lin-hua<sup>2</sup>

(1. Missile Inst., Air Force Engineering Univ., Sanyuan 713800, China;

2. Engineering Inst., Air Force Engineering Univ., Xi'an 710038, China)

**Abstract:** Aiming at the convergence of the belief propagation algorithm for decoding low density parity check (LDPC) codes under SNR mismatch, an analysis method is proposed. In order to analyze the convergence of different codes, channels and SNR mismatch, the method tracks the decoding process with the extrinsic information obtained by calculating the mean and the variance using improved Gaussian approximation theory. The decoder can change the estimated precision adaptively through the result of the analysis method. The steps and the examples are also given. In the end, a flexible SNR estimation algorithm and the validity simulation are presented.

**Keywords:** LDPC code; signal-to-noise ratio; belief propagation; Gaussian approximation; SNR mismatch

## 0 引 言

低密度奇偶校验(low-density parity-check, LDPC)码具有接近香农限的优良性质<sup>[1-2]</sup>。信道信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)先验信息是 LDPC 译码器初始化置信传播(belief propagation, BP)算法的必要条件。在接收端, 信道 SNR 是未知参数, 译码器需要估计 SNR 来初始化 BP 译码, 而估计精度将影响采用 BP 算法的 LDPC 码性能<sup>[2-4]</sup>。

文献[5]分别讨论了估计误差为正负无穷时 BP 算法的性能: 过估计时, BP 算法退化为最小和译码算法; 欠估计时, BP 算法误码率趋向于无纠错保护的信道误码率。文献[6]讨论了不同程度的 SNR 失配引起译码 SNR 阈值的变化量。本文在文献[6]的基础上, 进一步研究了 SNR 误差影响下的译码收敛性能和速度, 提出了在保证译码性能的前提下, 译码器应根据需要, 对估计精度作出必要调整。估计精度的提高通常以估计复杂度增大为代价, 所以结合不同 SNR 误差下的译码性能和译码器参数, 合理的选择 SNR 估计精度指标可以减小估计运算量和提高译码效率。

## 1 LDPC 置信传播译码原理

BP 译码算法可用对数似然比(log-likelihood ratio, LLR)下的信息迭代描述<sup>[4,7]</sup>。用  $\tau_{ij}(u_i)$  表示变量节点输出到校验节点信息的置信度,  $\Lambda_{ji}(u_j)$  表示校验节点输出到变量节点的信息的置信度。信息传递如图 1 所示,  $M(i)$  表示与变量节点  $i$  相连的校验节点的集合,  $N(j)$  表示与校验节点  $j$  相连的变量节点的集合。算法可以描述如下:

### 步骤 1 初始化

对于等概率输入的 二元输入加性高斯白噪声(binary input additive white Gaussian noise, BIAWGN)信道,  $\tau_0(x_i) = 2y_i/\delta^2$ 。其中  $y_i$  为译码器接收序列。对校验矩阵  $\mathbf{H}_{j,i} = 1$  的每一对  $(j, i)$  赋值,  $\tau_{ij}(x_i) = \tau_0(x_i)$ ,  $\Lambda_{ji}(z_j) = 0$ 。

### 步骤 2 译码迭代

校验节点更新, 对每个  $j$  及  $i \in N(j)$ , 计算

$$\Lambda_{ji}(z_j) = 2 \tanh^{-1} \left\{ \prod_{k \in N(j)/i} \tanh[\tau_{kj}(x_k)/2] \right\} \quad (1)$$

变量节点更新, 对每个  $i$  及  $j \in M(i)$ , 计算

$$\tau_{ij}(x_i) = \tau_0(x_i) + \sum_{k \in M(i)/j} \Lambda_{ik}(z_k) \quad (2)$$

**步骤 3 尝试判决**

对每个变量节点, 计算  $\tau_i(x_i) = \tau_0(x_i) + \sum_{j \in M(i)} \Lambda_{ji}(z_j)$ 。

对于  $\tau_i(x_i) \geq 0, \tau_i(x_i) < 0$ , 分别判决  $\hat{x}_i = 1, \hat{x}_i = 0$ 。如果  $\hat{X}H^T = 0$ , 则译码成功, 译码器输出  $\hat{X}$ 。否则继续步骤 2 迭代过程, 如果达到设置的最大迭代次数, 仍未找到满足的码字, 则宣告译码失败。

$$\{Z_k: K \neq i, K \in M(i)\} \quad \{X_k: K \neq j, K \in N(j)\}$$

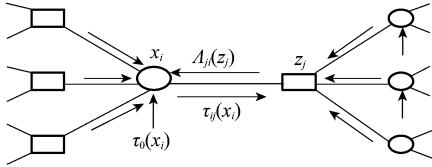


图 1 译码因子图模型

**2 SNR 失配影响的分析方法与举例**

为了提高分析方法的通用性和速度, 本文没有直接进行译码来判断 SNR 估计误差对译码性能的影响; 而是采用密度进化 (density evolution, DE) 的高斯近似 (Gaussian approximation, GA) 理论<sup>[8]</sup> 和外信息传递 (extrinsic information transfer, EXIT)<sup>[9-10]</sup> 理论, 从互信息的角度, 分析 SNR 误差对译码器收敛速度和收敛性的影响。

采用二进制相移键控 (binary phase shift keying, BPSK) 调制, BIAWGN 信道。信道输入码字序列为  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, s_k \in \{+1, -1\}$ ; 噪声序列  $N$  服从高斯  $N(0, \delta^2)$  分布; 则信道输出序列  $Z = S + N$ 。采用对数似然比度量 BP 译码 (LLR-BP) 时, 每个变量节点输入初始化信息为  $\tau_0 = 2Z/\delta^2$ , BP 算法以此初始化信息为基础开始迭代译码。

当 SNR 估计值存在误差, 即  $\delta^2 \neq \hat{\delta}^2$ , 称为 SNR 与信道失配。失配程度可以通过  $\eta = \delta^2/\hat{\delta}^2$  表示。  $\eta > 1, \eta < 1$  分别称为过估计和欠估计。

根据高斯近似原理, 译码迭代消息可近似为服从高斯分布, 则变量节点的 LLR 初始化信息服从高斯  $N(2/\delta^2, 4/\delta^2)$  分布, 方差与均值比值为 2。当 SNR 失配时, 此信息服从高斯  $N(2\eta/\delta^2, 4\eta^2/\delta^2)$  分布, 方差与均值比值不再为 2。文献<sup>[6]</sup>通过举例, 指出此比值在译码过程中是不断变化的。基于上述分析, 传统的 GA 只跟踪均值的方法不再适用。本文通过同时跟踪迭代信息均值和方差的方法分析 BP 译码在失配时的性能。

SNR 匹配时, 均值与方差关系恒定, 迭代信息的分布可完全由均值描述。只跟踪变量消息和校验消息的均值即可跟踪译码过程。根据 LLR-BP 的消息更新公式 (2) 和式 (1), 高斯近似过程可用式 (3) 和式 (4) 描述<sup>[4]</sup>。变量节点和校验节点分别计算为

$$m_{out} = (d_v - 1)m_{in} + m_0 \quad (3)$$

$$m_{out} = g^{-1}(g(m_{in})^{d_v-1}) \quad (4)$$

式中,  $m_{in}$  和  $m_{out}$  分别是节点的输入和输出信息高斯分布的均值;  $m_0$  是初始化变量消息的均值。函数  $g(x)$  是  $\tanh(N(x, 2x)/2)$  的数学期望。

**2.1 均值和方差的跟踪方法**

SNR 失配时, 仍然沿用高斯近似, 同时跟踪迭代消息

的均值方差来分析译码过程。对于变量节点, 用式 (3) 跟踪变量信息的均值, 用式 (5) 跟踪变量消息方差<sup>[2]</sup>。

$$\delta_{out}^2 = (d_v - 1)\delta_{in}^2 + \delta_0^2 \quad (5)$$

对于校验节点, 用  $G$  和  $G^{-1}$  分别表示  $(m, \delta^2 \rightarrow g_1, g_2)$  和  $(g_1, g_2 \rightarrow m, \delta^2)$  的对应关系; 其中  $g_1 = E[\tanh(N(m, \delta^2)/2)], g_2 = E[\tanh^2(N(m, \delta^2)/2)]$ 。定义如下双入双出表

$$G(m, \delta^2) = (g_1(m, \delta^2), g_2(m, \delta^2)) = (E[\tanh(N(m, \delta^2)/2)], E[\tanh^2(N(m, \delta^2)/2)])$$

使用式 (6) 跟踪校验消息的均值和方差

$$(m_{out}, \delta_{out}^2) = G^{-1}(g_1^{d_c-1}(m_{in}, \delta_{in}^2), g_2^{d_c-1}(m_{in}, \delta_{in}^2)) \quad (6)$$

本文通过数值的方法来计算  $G$  和  $G^{-1}$ 。制  $(g_1, g_2 \sim m, \delta^2)$  对应表, 如图 2 所示。通过查表的方法来跟踪均值和方差。

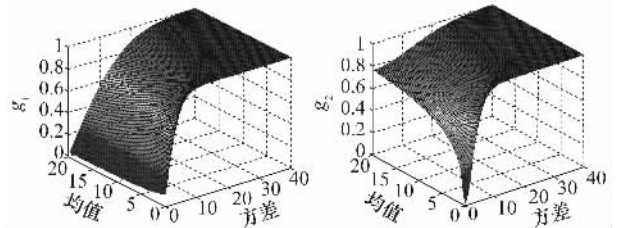


图 2  $(g_1, g_2 \sim m, \delta^2)$  对应表

**2.2 平均附加信息的跟踪方法**

设译码器输入为  $X$ , 输出  $Y$ , 则  $Y$  与  $X$  之间的互信息反映了译码器输出  $Y$  根据校验关系和输入  $X$  获得的附加信息量 (即两者之间的互信息), 表示为  $I_E = H(X) - H(X/Y)$ 。根据外信息传递理论, LDPC 码译码器可以分成变量节点译码器和校验节点译码器<sup>[9-10]</sup>。变量节点译码器可以看成是一个重复码译码器, 称为 VND。校验节点译码器可以看成是一个单比特校验节点译码器, 称为 CND。这样 LDPC 译码可分为  $N$  个 VND 和  $M$  个 CND, 它们之间通过边交织接在一起。LDPC 码可分成多个子译码器, 分析信息转移情况可以从平均附加信息和平均先验信息着手。对于规则 LDPC 码, 各个变量节点和校验节点是等价的, 假设它们独立同分布。平均附加信息和平均先验信息就等于各子译码器的附加信息和先验信息。

文献<sup>[10-11]</sup>利用外信息传递理论, 通过跟踪传输码字与节点输出迭代信息之间的互信息, 进而分析 LDPC 码近似性能。在此基础上, 本文通过跟踪迭代信息的均值和方差来跟踪 VND 附加信息量的变化, 进而分析码字的收敛情况。

假设先验信息  $p(s=1) = p(s=-1) = 0.5$ , 则  $H(s) = 1$ 。假设 VND 输出每比特附加信息为  $I_{E,VND}$ , 则  $I_{E,VND}$  可由式 (7) 计算

$$I_{E,VND} = H(s) - H(s/\tau_{ij}(x)) \quad (7)$$

根据 BP 译码的判决标准, 可得如下后验概率

$$P(s = 1/\tau_{ij}(x)) = \begin{cases} 1, & \tau_{ij}(x) \geq 0 \\ 0, & \tau_{ij}(x) < 0 \end{cases}$$

$$P(s = -1/\tau_{ij}(x)) = \begin{cases} 0, & \tau_{ij}(x) \geq 0 \\ 1, & \tau_{ij}(x) < 0 \end{cases}$$

高斯近似下的变量消息服从  $\tau(x) \sim N(m, \delta^2)$  分布, 则  $H(s/\tau_{ij}(x))$  可用式 (8) 计算

$$H(s/\tau_{ij}(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \log_2(1 + e^{-t}) dt \quad (8)$$

由于式(8)中的均值和方差可用 2.1 节所述方法迭代得到,故根据  $f(t)$  的分布,选择合适的积分区间之后,式(8)可通过数值积分的方法计算。最终变量节点的平均附加信息可由式(9)计算

$$I_{E,VND} = 1 - H(s/\tau_{ij}(x)) \quad (9)$$

### 2.3 失配下的理论译码迭代次数

上文已经阐明 LDPC 的每次迭代是节点信息的更新。译码器的迭代过程中,先是 VND 将附加信息传递给 CND,然后 CND 将更新信息传到 VND。当每个译码器信息量达到一定量后,每次再转化的信息很少。当 SNR 水平在码字的阈值之内,只有无穷次迭代才能实现无错译码,因此估计迭代次数是建立在给定误码率的前提下的。预设误码率为  $P_e$ ,当变量节点的平均附加信息  $I_{E,VND} > 1 - H(P_e)$  即可视为无错译码。因此,平均迭代次数可由  $I_{E,VND}$  收敛到此预设值的迭代次数估计出来。

### 2.4 分析方法举例

#### 2.4.1 SNR 失配下的初始化

设信噪比为 2.0 dB,图 3 给出了不同 SNR 估计误差下式(8)中的积分函数  $f(t)$  和初始化  $I_{E,VND}^0$  的变化情况。估计误差带来了变量消息分布的改变,造成了初始化  $I_{E,VND}^0$  的减小。

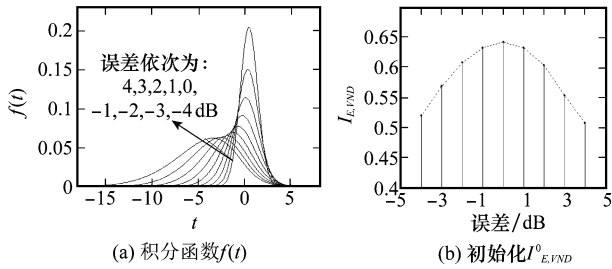


图 3 SNR 失配下的初始化

#### 2.4.2 SNR 失配下的译码收敛情况

不同程度的 SNR 失配下,跟踪迭代过程中的  $I_{E,VND}$  的变化情况,分析过估计和欠估计下的收敛性能和收敛速度。设信噪比为 2.0 dB,以(3,6)规则码为例,预设误码率  $P_e = 10^{-5}$ ,当  $I_{E,VND} > 1 - H(10^{-5})$ ,停止迭代。迭代次数上限取 30 次,收敛情况如图 4 所示。

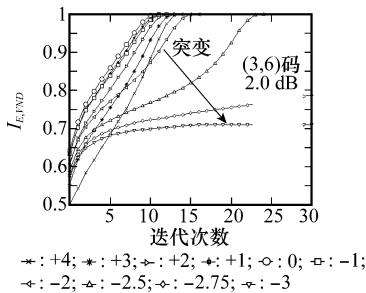


图 4 失配下的 BP 译码收敛情况

SNR 匹配时,每次迭代  $I_{E,VND}$  的增量随着迭代逐渐减小,最终能快速收敛到预设值。过估计时,收敛依然很快。

随着过估计程度的加深,收敛到预设值的迭代次数有微小的增加。

SNR 欠估计时,失配程度不同的收敛曲线差异很大。并且失配程度在 -1 dB 内时,对收敛性影响不大。随着程度继续加深,迭代次数随之显著增加,收敛速度明显减小。此现象说明译码器对误差存在一个容忍区间,超过容限时性能会急剧下降。当误差为 -3 dB 时,  $I_{E,VND}$  只收敛到 0.7 左右,即 SNR 失配造成了译码阈值的变化。此结果与文献[6]讨论的(3,6)规则码的阈值相吻合,本文方法同样可以作阈值分析。

在迭代次数上限为 50 次、SNR 为 2.0 dB、不同失配程度时,通过实际编码、加噪、译码仿真码长为  $10^4$  的(3,6)的平均迭代次数,如图 5 所示。其与理论计算得到的图 4 吻合。

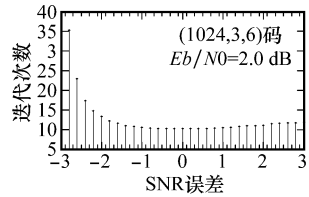


图 5 失配下的译码迭代次数变化

综上,在译码收敛性上,欠估计比过估计敏感。译码器应依据实际译码中迭代次数的明显变化,及时发现 SNR 欠估计,并做出相应调整。

## 3 一种高效的 SNR 估计方法

本节提出一种利用硬判决后校验方程不满足个数的统计均值,并查找均值与信噪比对应表来估算 SNR 的方法。

假设码长为  $N$ ,码率为  $V$ ,则校验矩阵共确定了  $M = N(1-V)$  个校验约束方程。调制采用 BPSK,则信源发送序列映射为  $S_k \in \{+1, -1\}$ 。AWGN 信道白高斯噪声序列为  $N_k = \{N_1, N_2, \dots, N_i\}$ ,  $N_k \sim N(0, \sigma^2)$  服从高斯分布。信噪比恒定,即  $\sigma^2$  恒定,则  $Z_k/\delta \sim N(0, 1)$  服从标准正态分布,其分布函数为  $\Phi(\cdot)$ 。可得码元  $S_k$  硬判决后的错误概率  $P_e = P\{N_k < -1 | S_k = 1\} = P\{N_k > 1 | S_k = -1\}$ ,即码元错误概率  $P_e = \Phi(-1/\delta)$ 。

下面讨论 SNR 恒定时,校验方程不满足个数  $n$  的分布。校验矩阵确定以后,每个校验节点和变量节点的度数也相应确定下来。设校验节点度数分别为  $d_m, m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ,当校验节点相连的变量节点对应的码元中有奇数个错误,则该校验节点确定的校验方程将不满足校验关系。将一个校验方程是否满足看成一个随机事件,记为  $f_m \in \{0, 1\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ,其中校验关系  $f_m$  满足取 0,反之取 1。则对于度数为  $d_m$  的校验节点

$$P\{f_m = 1\} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^d \binom{d}{i} (P_e)^i (1 - P_e)^{d-i}, \quad d \in \{d_m, d_m - 1\} \quad (10)$$

式中,当  $d_m$  为奇数时,  $d$  取  $d_m$ ;反之  $d$  取  $d_m - 1$ 。则随机变量  $f_m$  的均值和方差可表示为  $E(f_m) = P\{f_m = 1\}, D(f_m) = (1 - P\{f_m = 1\})P\{f_m = 1\}$ 。根据概率论中的 Liapunov 定理,可以证明对于任意  $X$  恒有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P \left[ \frac{\sum_{m=1}^M f_m - \sum_{m=1}^M E(f_m)}{\sqrt{\sum_{m=1}^M D(f_m)}} \leq X \right] = \int_{-\infty}^X \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

式中,  $n = \sum_{m=1}^M f_m$ 。可见随着  $M$  增大,  $n$  分布趋向于均值为  $E(n) = \sum_{m=1}^M E(f_m)$  的高斯分布。并且当 SNR 不变时, 相同码长的同类型码的  $E(n)$  相等, 且可由式(10)计算。

综上, 译码器硬判决后不满足的方程数  $n$  的分布趋向于高斯分布。故对于给定 LDPC 码, 可计算不同 SNR 所对应的分布均值。因此可以建立  $E(n)$  与 SNR 的对应表[均值-SNR], 译码器通过统计校验方程不满足个数的均值来估计信道的 SNR。

### 3.1 渐进分布仿真

验证短码长时的分布近似情况。设信噪比分别为 3.0 dB 和 2.0 dB, 对码长为 1 024 的 (1 024, 3, 6) 码校验矩阵(共 512 个校验方程)进行仿真, 统计  $n$  的概率密度函数, 如图 6 所示。可直观地看出, 即使码长不是特别长的时候, 分布已经具有渐近高斯分布的直观特性了。当然也可对统计样本做定量的分布假设检验分析, 此处不再详述。

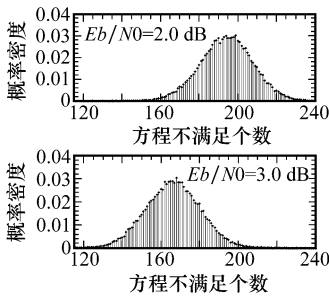


图 6 校验关系不满足个数的分布情况

### 3.2 估计精度仿真

为验证不同码率下的估计有效性, 对码长为 1 024, 分别对码率为 3/4、1/2、1/4 的 (3, 12)、(3, 6)、(3, 4) 码进行仿真。通过本节方法建立各校验矩阵的 [均值-SNR] 对应表。译码器通过统计平均得到  $n$  的均值, 查表得到估计的 SNR 值, 并与真值比较, 计算估计误差。信噪比为 2.5 dB 下, 估计精度如图 7 所示。

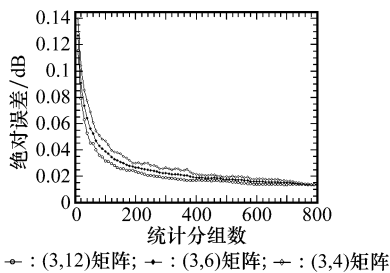


图 7 不同统计容量下的估计精度

当参与统计平均的分组数为 10 组时, 绝对误差已经在 0.1 dB 左右。容量在 (0~100) 分组区间内, 误差下降很快。此后继续统计的分组对估计精度提高贡献不大。恒定信噪比下, 此方法具有较好的估计精度。

当信道信噪比变化时, 不满足方程数均值亦随之同向

变化, 查表所得的估计值亦是趋向于信道实际 SNR, 具有适应信噪比缓慢变化的能力。本文所述的估计方法, 核心运算包括模二、平均、查表, 其具有较低的实现复杂度。并且译码器可根据精度需要, 自适应地调整参与统计的分组数, 具有较大的灵活性。

## 4 结论

SNR 估计精度的提高通常以复杂度增大为代价。而不同码型、信道状况、估计误差下, LDPC 码的译码性能存在很大差异。所以, 依据实际译码器情况和 SNR 估值, 自适应调整期望的估计精度是有必要的。可以根据给定 LDPC 码型, 通过本文方法分析一类 LDPC 码在不同 SNR 误差下的译码性能。并结合译码器参数和误差容许区间, 在保证误码率性能的前提下, 合理选择精度可以提高译码器的 SNR 估计效率。

### 参考文献:

- [1] 倪俊枫, 甘小莺, 张海滨, 等. 改进的分层修正最小和 LDPC 译码算法及译码器设计[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(12): 2531-2535. (Ni Junfeng, Gan Xiaoying, Zhang Haibin, et al. Improved layered modified minimal sum LDPC decoding algorithm and decoder design[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(12): 2531-2535.)
- [2] 潘小飞, 刘爱军, 张邦宁. 一种基于 LDPC 编码系统的符号同步联合信噪比估计算法[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(1): 125-129.
- [3] Saeedi H, Banihashemi A. Design of irregular LDPC codes for BIAWGN channels with SNR mismatch[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2009, 57(1): 6-11.
- [4] 吕强, 赵春晖, 毕文斌. 基于 LDPC 码的 BICM 系统中的迭代盲信道估计[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(7): 1260-1263. (Lü Qiang, Zhao Chunhui, Bi Wenbin. Iterative blind channel estimation in LDPC coded BICM system[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2008, 30(7): 1260-1263.)
- [5] Anastasopoulos A. A comparison between the sum-product and the min-sum iterative detection algorithms based on density evolution [C] // *Proc. of IEEE. Global Telecommunications Conference*, 2001: 1021-1025.
- [6] Saeedi H, Banihashemi A. Performance of belief propagation for decoding LDPC codes in the presence of channel estimation error [J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2007, 55(2): 84-86.
- [7] Refaey A, Chouinard J Y. A comparison between BP, log-likelihood and max log-likelihood decoding algorithms of LDPC codes based on EXIT chart and EXIT trajectories methods [C] // *Proc. of International Conference on Advanced Technologies for Communications*, 2008: 189-194.
- [8] Di Changyan, Richardson T, Urabanke R. Weight distribution of low density parity check codes[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2006, 52(11): 4839-4855.
- [9] Ashikhmin A, Kramer G, Brink S T. Extrinsic information transfer functions: A model and two properties [C] // *Proc. of Information Sciences and Systems Conference*, 2002: 742-747.
- [10] Ashikhmin A, Kramer G, Brink S T. Extrinsic information transfer functions: Model and erasure channel properties[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2004, 50(11): 2657-2673.
- [11] Brink S T, Kramer G, Ashikhmin A. Design of low density parity check codes for modulation and detection [J]. *IEEE Trans. on Communication*, 2004, 50(4): 670-678.