文章编号：1001-506X(2011)11-2440-05

基于 GM(1,1)幂模型的振荡序列建模方法

王正新[1]，党耀国[2]，裴玲玲[2]
（1. 浙江师范大学经济与管理学院，浙江 金华 321004；
2. 南京航空航天大学经济与管理学院，江苏 南京 210016）

摘　要：针对小样本振荡序列的预测问题，提出了基于单变量一阶灰色幂模型（简称 GM(1,1)幂模型）的振荡序列建模方法。基于 GM(1,1)幂模型中参数之间的关系，构建了一个非线性优化模型来寻求模型参数的最佳值，以此实现对振荡序列的高精度预测。结果表明，建模方法能够较好地体现数据的波动特征，且易于在计算机上实现，进一步拓宽了灰色模型的应用范围。最后以实例验证了所建模方法实用性和有效性。

关键词：灰色系统；GM(1,1)幂模型；振荡序列；预测

中图分类号：N 941.5　　**文献标志码：**A　　**DOI：**10.3969/j.issn.1001-506X.2011.11.18

Modeling approach for oscillatory sequences based on GM(1,1) power model

WANG Zheng-xin[1], DANG Yao-guo[2], PEI Ling-ling[2]
(*1. School of Economics and Management, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China;*
2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: In view of the existing problems in forecasting for small sample oscillatory sequences, this paper puts forward a modeling approach for oscillatory sequences based on the first-order single-variable grey power model (abbreviated as GM(1,1) power model). A non-linear optimization model is constructed based on the relationships between parameters in order to get the best value of the power exponent and the highest forecasting precision. The results show that the proposed modeling approach can reflect the fluctuation of the raw data and is easy to solve using a computer. The range of application of the grey model is further extended. Finally, the validity and practicability are illustrated with two examples.

Keywords: grey system; GM(1,1) power model; oscillatory sequence; forecasting

0　引　言

由于系统内外部的环境因素是复杂多变的，因此，系统的行为数据往往也是杂乱无章地呈现在人们面前。统计理论能够有效解决大样本的系统建模问题，但对于小样本序列的建模却难以实现。灰色模型[1]能够适用于“小样本，贫信息”系统的建模和预测。灰色模型（grey model，GM(1,1)）是最常见灰预测模型之一，近年来，该模型被广泛应用于经济社会的多个领域[1-3]。对模型改进主要集中在灰导数[4-5]、背景值[6-7]、初始条件[8-9]，以及参数估计方法[10-13]。灰色 Verhulst 模型[1]则是另一种被广泛应用的灰色预测模型，它可以较好地适用于具有饱和状态或呈现单峰特点原始序列。但是，目前对该模型的理论研究还不多见，文献[8]研究了灰色 Verhulst 模型初始条件的改进，并取得较好的预测效果。文献[14]在分析模型偏差的基础上，提出了无偏灰色 Verhulst 模型，完全消除了该模型自身所固有的偏差。

GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型是灰色预测中的最常用的模型，它们构成灰色预测体系的核心部分。然而，它们并不能被直接用于振荡序列的预测，这主要是由于其预测结果是一个单调递增或递减的序列。文献[15－16]通过序列变换的方法将振荡的原始数据转化为单调序列再建立灰色模型，虽然取得了较好的预测效果，但是灰色模型本身并没有得到改进。GM(1,1)幂模型[17]是一种非线性灰色模型，它最重要的特点是模型中的幂指数可以更灵活地决定模型的形式，而不像 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型那

收稿日期：2010－08－23；**修回日期：**2011－08－24。
基金项目：国家自然科学基金(71101132,71071077)；全国教育科学“十一五”规划青年课题基金(EIA100402)资助课题
作者简介：王正新(1981－)，男，讲师，博士，主要研究方向为预测与决策理论。E-mail:jenkin226@163.com

样取一个固定的数 0 或 2。因此,只要处理好GM(1,1)幂模型中参数的选取问题,就能够在模型中反映数据的波动特征,从而使得该模型适用于小样本振荡序列的预测。本文将沿着这样的思路,分析 GM(1,1)幂模型中参数之间的关系,并建立优化模型求解最佳的参数,将灰色模型的应用范围扩展为振荡序列的建模和预测。

1　GM(1,1)幂模型及其求解

设非负原始序列为

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

对原始序列 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 作一阶累加生成(1-accumulating generation operators, 1-AGO),得到序列

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

式中,$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)(k=1,2,\cdots,n)$。

对序列 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 作紧邻均值生成(neighbor generation, NQ),得到序列

$$\boldsymbol{Z}^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$$

式中,$z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$ $(k=2,3,\cdots,n)$。

定义 1[17]　设 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为非负的单峰原始数据序列,$\boldsymbol{X}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为的 1-AGO 序列,$\boldsymbol{Z}^{(1)}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列,则有满足灰建模 3 条件的如下非线性模型,称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(z^{(1)}(k))^{\gamma}\tag{1}$$

为 GM(1,1)幂模型。为了更好地区别模型中的发展系数 a,本文用 γ 表示文献[17]中的 α。

其中,$\gamma\neq1$,GM(1,1)幂模型发展系数$-a$、灰色作用量 b,以及幂指数 γ 均为未知参数。当 $\gamma=0$ 时,GM(1,1)幂模型为 GM(1,1)模型;当 $\gamma=2$ 时,GM(1,1)幂模型为灰色 Verhulst 模型。γ 的具体计算公式可参阅文献[17]。

得到幂指数 γ 的估计之后,我们便可以根据式(1)对参数列$(a,b)^{\mathrm{T}}$ 作最小二乘估计

$$(a,b)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\tag{2}$$

式中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^{\gamma}\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^{\gamma}\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^{\gamma}\end{bmatrix},\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}$$

定义 2　称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^{\gamma}\tag{3}$$

为 GM(1,1)幂模型的白化方程。

定理 1　设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{Y},\hat{\boldsymbol{a}}$ 如上所述,$\hat{\boldsymbol{a}}=(a,b)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$,则

(1) 白化方程$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^{\gamma}$ 的解也称时间响应函数,为

$$x^{(1)}(t)=\left(\frac{b}{a}+c\,\mathrm{e}^{-(1-\gamma)at}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}\tag{4}$$

(2) GM(1,1)幂模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(z^{(1)}(k))^{\gamma}$ 的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left\{\frac{b}{a}+\left[(x^{(0)}(1))^{1-\gamma}-\frac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-(1-\gamma)ak}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}},\quad k=1,2,\cdots,n\tag{5}$$

(3) 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)\tag{6}$$

2　基于 GM(1,1)幂模型的振荡序列建模

2.1　振荡序列的定义

定义 3　设 $\boldsymbol{X}=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$为非负系统行为序列,若

(1) $\forall k=2,3,\cdots,n,x(k)-x(k-1)>0$,称 X 为单调增长序列;

(2) $\forall k=2,3,\cdots,n,x(k)-x(k-1)<0$,称 X 为单调递减序列;

(3) 若存在 $k_1,k_2\in\{2,3,\cdots,n\}$,使得不等式 $x(k_1)-x(k_1-1)>0$ 和 $x(k_2)-x(k_2-1)<0$ 同时成立,称 $\boldsymbol{X}$ 为振荡序列。

传统的灰色预测模型对单调增长或单调递减序列进行预测具有较高的精度,而对于振荡序列的建模往往难以取得令人满意的结果。

2.2　GM(1,1)幂模型对振荡序列的适应性分析

GM(1,1)幂模型最重要的特点是模型中的幂指数可以更灵活地决定模型的形式。而 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型则难以做到这一点。

GM(1,1)模型的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t)=\frac{b}{a}+c\,\mathrm{e}^{-at}\tag{7}$$

即取式(4)中 $\gamma=0$。

灰色 Verhulst 模型的时间响应函数为

$$x^{(1)}(t)=\frac{1}{b/a+c\,\mathrm{e}^{at}}\tag{8}$$

即取式(4)中 $\gamma=2$。

这两种经典的灰色预测模型分别对应于两类比较特殊的单调曲线,而 GM(1,1)幂模型则更加一般化,其单调性随着幂指数 γ 取值的变化而变化。GM(1,1)幂模型的预测函数既可能单调递增,也可能单调递减,还可能是振荡的。因此,只要我们处理好幂指数 γ 的取值问题,GM(1,1)幂模型完全可以适用于振荡序列的建模和预测。

2.3　模型检验

将第 k 时刻的相对误差(relative percentage error, RPE)记为 RPE(k),其公式为

$$\mathrm{RPE}(k)=\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\right|\times100\%$$

所有时点的相对误差平均值(average relative percentage error, ARPE)记为 ARPE,其公式为

$$\mathrm{ARPE}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\mathrm{RPE}(k)$$

对于给定 α,当 ARPE$<\alpha$ 且 RPE(n)$<\alpha$ 成立时,称模型为残差合格模型,一般取 $\alpha=5\%$。

2.4 基于 GM(1,1)幂模型的振荡序列建模方法

文献[17]根据灰色系统信息覆盖的原理先估计出幂指数 γ 的值，然后对参数 a 和 b 进行估计。然而，对于一个小样本振荡序列，文献[17]的方法就未必适用。因为该方法是由灰信息的覆盖为准则得到的，而不以最终的预测精度为依据，因此虽然该方法能够较好地反应数据的一阶和二阶灰导数特性，但并不一定能够获得最佳的预测精度。为了使得模型更好地反映原始数据的波动特征，获得最佳的预测精度，我们可以利用非线性规划的方法来求解模型的参数 a、b 和幂指数 γ。

设 γ 已知，将参数列 $(a,b)^{\mathrm{T}}$ 最小二乘估计公式进行展开，以确定参数 a、b 和幂指数 γ 的关系。

由于 $(a,b)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$，所以首先计算 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$。

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{*}=\frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2\gamma}\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2}-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma+1}\right)^{2}}\times$$

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{2\gamma} & \sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{\gamma+1}\\ \sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{\gamma+1} & \sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^{\gamma}\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^{\gamma}\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^{\gamma}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)x^{(0)}(k)\\ \sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma}x^{(0)}(k)\end{bmatrix}$$

所以

$$(a,b)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\frac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2\gamma}\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2}-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma+1}\right)^{2}}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{2\gamma} & \sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{\gamma+1}\\ \sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{\gamma+1} & \sum\limits_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sum\limits_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)x^{(0)}(k)\\ \sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma}x^{(0)}(k)\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma+1}\sum\limits_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)(z^{(1)}(k))^{\gamma}-\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2\gamma}\sum\limits_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2\gamma}\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2}-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma+1}\right)^{2}}\\ \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2}\sum\limits_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)(z^{(1)}(k))^{\gamma}-\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma+1}\sum\limits_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2\gamma}\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{2}-\left(\sum\limits_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^{\gamma+1}\right)^{2}}\end{bmatrix}$$

基于以上参数 a 和 b 的表达式，可建立以下非线性优化模型，以便求出最优的幂指数，使得模型的平均相对误差绝对值在理论上达到最小。

$$\min_{\gamma}\ \mathrm{ARPE}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\right|$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\gamma\neq 1\\ \hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)\\ \hat{x}^{(1)}(k)=\left\{\dfrac{b}{a}+\left[(x^{(0)}(1))^{1-\gamma}-\dfrac{b}{a}\right]\mathrm{e}^{-a(1-\gamma)(k-1)}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}\\ k=2,3,\cdots,n\end{cases}$$

为了去掉以上优化模型目标函数的绝对值，引入以下定理。

引理 1[12] 对于任意 n 个实数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}|f_i|=\sum_{i=1}^{n}\max\{f_i,-f_i\}=$$

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}f_i,\sum_{i=1}^{n}f_i-2f_1,\sum_{i=1}^{n}f_i-2f_2,\cdots,\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}f_i-2f_n,\cdots,\sum_{i=1}^{n}(-f_i)\right\}=\max\{\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n\}$$

式中，$\boldsymbol{A}_n=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，$\boldsymbol{B}_n$ 为 $n\times 2^n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}_n$ 的每一列都是 1 或 −1 允许重复的排列。

因此，本文优化模型中的目标函数可以转化为以下等价目标

$$\min \text{ARPE} = \min\max\ (\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B}_{n-1})$$

式中，$\boldsymbol{A}_{n-1}=(\text{RPE}(2),\text{RPE}(3),\cdots,\text{RPE}(n))$，$B_{n-1}$ 的每一列都是 1 或 −1 允许重复的排列。

通过运筹学软件 Lingo（或 Matlab、Excel 等）可以很方便地求解以上模型，得到参数 γ、a 和 b 的优化值。将以上方式获得的参数值代入 GM(1,1)幂模型求解过程，便可以获得较好的预测结果。

3　算例验证

3.1　数值算例

设一个振荡序列 $X=(5,6.5,4.5,7)$，由其曲线形状（图 1）可见，该序列上下波动，没有明显的规律性。对于这样振荡序列，直接应用 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型难以取得令人满意的预测结果。下面将分别利用 GM(1,1)模型、灰色 Verhulst 模型以及本文提出的 GM(1,1)幂模型建模方法，对 X 进行预测，结果如表 1 和图 1 所示。

表 1　3 种模型对振荡序列 X 的预测误差比较

k	原始数据	GM(1,1)模型		灰色 Verhulst 模型		GM(1,1)幂模型	
		预测值	RPE/%	预测值	RPE/%	预测值	RPE/%
1	5	5.00	0	5.00	0	5.00	0
2	6.5	5.72	12.07	4.34	33.28	6.69	2.97
3	4.5	5.99	33.18	6.04	34.27	4.89	8.63
4	7	6.28	10.23	6.38	8.88	6.93	1.05
ARPE/%			18.49		25.48		4.22

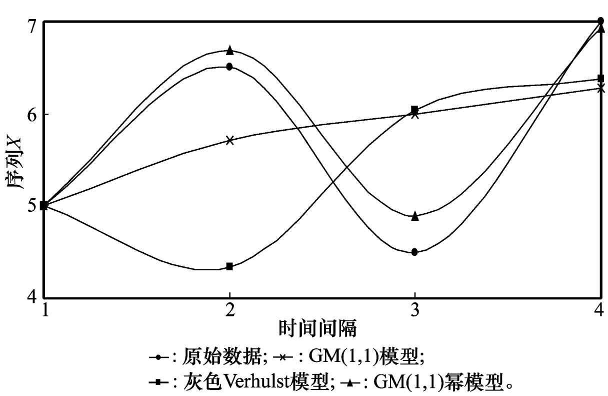

图 1　3 种模型对振荡序列 X 的预测曲线

由表 1 可以看到，直接应用 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型进行预测的平均误差分别为 18.49%和 25.48%；而GM(1,1)幂模型的平均误差仅为 4.22%，精度高达 95.78%。GM(1,1)幂模型对每个时点的预测误差均小于 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型。若取误差检验标准 $\alpha=5\%$，3 种模型中，只有 GM(1,1)幂模型符合残差合格模型的条件，从图 1 同样可以看出，对于给定的振荡曲线，GM(1,1)幂模型的预测效果要显著好于 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型。我们认为，主要原因就在 GM(1,1)幂模型的幂指数 γ 可以根据原始数据的波动特征，灵活地调整预测曲线的形状。这就说明，只要我们取得适当的参数，GM(1,1)幂模型完全可以胜任小样本振荡序列的预测。

3.2　南京民用航空国际航线里程的预测

2006 年～2009 年南京民用航空国际航线里程序列是一个振荡序列（数据来源于 2007～2010 年《南京统计年鉴》）（单位：公里）

$$X^{(0)}=(1\ 780,10\ 460,9\ 074,6\ 387)$$

由于 2006 年以前《南京统计年鉴》并未公布该指标的数据，目前仅能获得 2006 年～2009 年 4 个数据，且上下波动，因此，它是典型的小样本振荡序列。本文分别采用传统的 GM(1,1)模型、灰色 Verhulst 模型以及本文提出的 GM(1,1)幂模型建模方法进行预测，结果如表 2 所示。

表 2　3 种模型对南京民用航空国际航线里程的预测误差比较

k	原始数据	GM(1,1)模型		灰色 Verhulst 模型		GM(1,1)幂模型	
		预测值	RPE/%	预测值	RPE/%	预测值	RPE/%
2006	1 780	1 780	0	1 780	0	1 780	0
2007	10 460	10 652	1.83	5 218	50.12	9 997	4.43
2008	9 074	8 473	6.62	10 538	16.141	9 074	0.00
2009	6 387	6 740	5.52	7 833	22.63	6 455	1.07
ARPE/%			4.66		29.63		1.83

由表 2 可以看到，直接应用 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型进行预测的平均误差分别为 4.66%和 29.63%；而 GM(1,1)幂模型的平均误差仅为 1.83%，精度高达 98.17%。若取误差检验标准 $\alpha=5\%$，3 种模型中，只有 GM(1,1)幂模型符合残差合格模型的条件，可见本文的建模方法对振荡序列的预测能够取得满意的精度。

4　结　论

由于 GM(1,1)幂模型的幂指数可以根据原始数据的波动特征，灵活地调整预测曲线的形状。因此，对于给定的一个小样本振荡序列，只要我们采取恰当的方法找到最优的参数，GM(1,1)幂模型的预测效果一定会超于传统模型，并且可以获得高精度的预测结果。

参考文献：

[1] Liu S F, Lin Y. *Grey information theory and practical applications*[M]. London: Springer-Verlag, 2006.

[2] Li D C, Yeh C W, Chang C J. An improved grey-based approach for early manufacturing data forecasting[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, 57(4): 1161 - 1167.

[3] Wang C H, Hsu L C. Using genetic algorithms grey theory to forecast high technology industrial output[J]. *Applied Mathe-*

matics and Computation, 2008, 195(1): 256 - 263.

[4] 李玻，魏勇. 优化灰导数后的新 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践，2009, 29(2): 100 - 105. (Li B, Wei Y. Optimizes grey derivative of GM (1,1)[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2009, 29(2): 100 - 105.)

[5] 王义闹，刘开第，李应川. 优化灰导数白化值的 GM(1,1)建模法[J]. 系统工程理论与实践，2001, 21(05): 124 - 128. (Wang Y N, Liu K D, Li Y C. GM(1,1) modeling method of optimum the whiting values of grey derivative[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2001, 21(05): 124 - 128.)

[6] 罗党，刘思峰，党耀国. 灰色模型 GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学，2003, 5(8): 50 - 53. (Luo D, Liu S F, Dang Y G. The optimization of grey model GM (1,1)[J]. *Engineering Science*, 2003, 5(8): 50 - 53.)

[7] 王正新，党耀国，刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践，2008, 28(2): 61 - 67. (Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. An optimal GM(1,1) based on the discrete function with exponential law[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2008, 28(2): 61 - 67.)

[8] Dang Y G, Liu S F. The GM models that x(n) be taken as initial value[J]. *Kybernetes*, 2004, 33(2): 247 - 255.

[9] 姚天祥，刘思峰，党耀国. 初始值优化的离散灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术，2009, 31(10): 2394 - 2398. (Yao T X, Liu S F, Dang Y G. Discrete grey prediction model based on optimized initial value[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(10): 2394 - 2398.)

[10] Tsaur R C. Forecasting analysis by using fuzzy grey regression model for solving limited time series data[J]. *Soft Computing*, 2008, 12(11): 1105 - 1113.

[11] 张岐山. 提高灰色 GM(1,1)模型精度的微粒群方法[J]. 中国管理科学，2007, 15(5): 126 - 129. (Zhang Q S. Improving the precision of GM (1,1) model by using particle swarm optimization[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2007, 15(5): 126 - 129.)

[12] 王义闹，吴利丰. 基于平均相对误差绝对值最小的 GM(1,1) 建模[J]. 华中科技大学学报(自然科学版)，2009, 37(10): 29 - 31. (Wang Y N, Wu L F. Modeling GM(1,1) based on the minimum of mean absolute percentage error[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology (Nature Science Edition)*, 2009, 37(10): 29 - 31.)

[13] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, 33(2): 1173 - 1186.

[14] 王正新，党耀国，刘思峰. 无偏灰色 Verhulst 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践，2009, 29(10): 138 - 144. (Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Unbiased grey verhulst model and its application[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2009, 29(10): 138 - 144.)

[15] 沈继红，尚寿亭，赵希. 舰船纵摇运动函数变换 GM(1,1)模型研究[J]. 哈尔滨工业大学学报(自然科学版)，2001, 33(3): 291 - 294. (Shen J H, Shang S T, Zhao X. Functional transformation GM(1,1) model constructed for ship pitching[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2001, 33(3): 291 - 294.)

[16] 钱吴永，党耀国. 基于振荡序列的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践，2009, 29(3): 149 - 154. (Qian W Y, Dang Y G. GM(1,1) model based on oscillation sequences[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2009, 29(3): 149 - 154.)

[17] 王正新，党耀国，刘思峰，等. GM(1,1)幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术，2009, 31(10): 2380 - 2383. (Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. Solution of GM(1,1) power model and its properties[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(10): 2380 - 2383.)