

# 卫星导航中 GDOP 最小值的分析与仿真\*

陈 坡<sup>1</sup>, 韩松辉<sup>1,2</sup>, 归庆明<sup>1,2</sup>, 孙付平<sup>1</sup>

(1 解放军信息工程大学测绘学院, 郑州 450052; 2 解放军信息工程大学理学院, 郑州 450001)

**摘要:**目前国内外相关文献在推导 GDOP 理论最小值时没有考虑接收机的可观测范围,故在现实中是无法达到的。在限制卫星高度截止角大于零的条件下,重新推导了 GDOP 的理论最小值,并提出相应的求解方法,给出 GDOP 值达到最小时卫星的空间几何分布情况;最后通过算例验证本文推导得到的 GDOP 理论最小值的正确性。

**关键词:**卫星导航; GDOP 最小值; 可视卫星数; 矩阵分析法

**中图分类号:** P228 **文献标志码:** A

## Analysis and Simulation on Minimum Value of GDOP in Satellite Navigation

CHEN Po<sup>1</sup>, HAN Songhui<sup>1,2</sup>, GUI Qingming<sup>1,2</sup>, SUN Fuping<sup>1</sup>

(1 Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China;

2 Institute of Science, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** The computation of minimum GDOP can't be acquired in previous researches, because receiver only receives signal when satellite is above the ground level. In this paper, the equation of GDOP minimum value was again deduced with the constraint of satellites above zero degree elevation, a method to get the minimum of GDOP was given and the user/satellite geometry was considered. Finally, computation indicated the new algorithm on the minimum of GDOP is effective and useful.

**Keywords:** satellite navigation; minimum value of GDOP; number of visible satellite; matrix analysis

### 0 引言

精度衰减因子 GDOP 描述了接收机与可视卫星间的几何分布关系<sup>[1]</sup>,是衡量 GNSS 卫星定位精度的一个重要指标。GDOP 值越小,几何分布就越好,定位精度就越高。因此为了提高 GNSS 导航定位精度,应使 GDOP 值最小<sup>[2-3]</sup>。文献[4-6]给出了 GDOP 值与接收机和卫星组成的多面体体积之间的关系,但是未对 GDOP 的最小值进行分析;文献[7]对 GPS 定位中的 GDOP 进行了分析,推导出了利用 4 颗卫星导航定位时, GDOP 的最小值为 $\sqrt{2}$ ;文献[1]经过分析发现文献[7]给出的最小值 $\sqrt{2}$ 是不能达到的,并利用矩阵的特征值推导出 GDOP 的理论最小值为 $\sqrt{\frac{10}{n}}$ ;文献[8-9]从不同角度得到了与文献[1]相同的 GDOP 理论最小值及其计算公式。但是分析发现文献[1, 8-9]给出的 GDOP 最小值计算方法是从纯数学角度

推导的,没有考虑到接收机不能接收地平线以下卫星信号的情况。文献[10]也指出在卫星导航定位中,接收机通常只能接收卫星高度截止角大于零的卫星信号,在实际中上述理论最小值是不能达到的,但是文献[10]并没有给出实际 GDOP 最小值的求解方法。

文中从实际情况出发,对 GDOP 最小值的求解重新进行了分析和推导,得到了 GDOP 最小值的计算方法,并给出了 GDOP 值达到最小时的卫星空间几何分布情况;最后给出了仿真和实测算例,验证了文中推导方法和结果的正确性。

### 1 现有 GDOP 最小值计算方法的分析

#### 1.1 GDOP 的定义

接收机至卫星  $i$  在历元  $t_k$  时刻的伪距观测方程为:

$$\rho^i = D^i + c(\delta t^i - \delta t) + \delta\rho_n + d_{ion}^i + d_{tro}^i + \varepsilon_u + \varepsilon_{mul} + \varepsilon \quad (1)$$

\* 收稿日期:2012-08-30

基金项目:国家自然科学基金(40974009;41074011);郑州市科技计划攻关项目(0910SGYG21198);中国卫星导航学术年会青年优秀论文获奖者资助课题资助

作者简介:陈坡(1982-),男,河南南阳人,工程师,博士研究生,研究方向:卫星导航及组合导航数据处理。

式中相关参数的定义可参考文献[9 - 10]。

在接收机概略位置  $r_{uo} = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$  处泰勒展开, 忽略二阶以上的小量, 得到观测  $n(n \geq 4)$  颗卫星的观测方程为:

$$HX = L + \epsilon \tag{2}$$

其中:  $X = (\delta x \ \delta y \ \delta z \ b)^T$  为待估向量,  $(\delta x \ \delta y \ \delta z)^T$  为位置改正量,  $b$  为接收机钟差等效距离参数,  $H =$

$$\begin{bmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} & 1 \\ e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{xn} & e_{yn} & e_{zn} & 1 \end{bmatrix}$$
 为  $n \times 4$  的列满秩系数矩阵,  $e_i =$

$(e_{xi}, e_{yi}, e_{zi})$  为接收机指向第  $i$  颗可视卫星的方向余弦, 满足  $|e_i| = 1$ , 即  $e_i (i = 1, 2, \dots, n)$  均位于单位球面上,  $L$  为  $n \times 1$  观测向量, 其权阵为单位矩阵,  $\epsilon$  为  $n \times 1$  随机误差向量。

模型(2)中  $X$  的最小二乘解为:

$$\hat{X} = (H^T H)^{-1} H^T L \tag{3}$$

其协方差阵为  $Q = \sigma_0^2 (H^T H)^{-1}$ , 其中  $\sigma_0$  为未知的单位权中误差;

$$H^T H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n e_{xi}^2 & \sum_{i=1}^n e_{xi}e_{yi} & \sum_{i=1}^n e_{xi}e_{zi} & \sum_{i=1}^n e_{xi} \\ \sum_{i=1}^n e_{yi}e_{xi} & \sum_{i=1}^n e_{yi}^2 & \sum_{i=1}^n e_{yi}e_{zi} & \sum_{i=1}^n e_{yi} \\ \sum_{i=1}^n e_{zi}e_{xi} & \sum_{i=1}^n e_{zi}e_{yi} & \sum_{i=1}^n e_{zi}^2 & \sum_{i=1}^n e_{zi} \\ \sum_{i=1}^n e_{xi} & \sum_{i=1}^n e_{yi} & \sum_{i=1}^n e_{zi} & n \end{bmatrix} \tag{4}$$

则  $GDOP = \sqrt{\text{tr}(H^T H)^{-1}}$ , 其中  $\text{tr}(H^T H)^{-1}$  表示矩阵  $(H^T H)^{-1}$  的迹。

GDOP 表征了接收机和可视卫星在空间的几何分布情况。

### 1.2 现有 GDOP 最小值计算方法的分析

设  $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是  $H^T H$  的特征值, 则有:

$$GDOP = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\lambda_i}} \tag{5}$$

文献[1, 8]采用不等式求解上式的最小值, 得:

$$GDOP = \sqrt{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\lambda_i}} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_4}} \geq \sqrt{3 \left[ \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\lambda_4}} \tag{6}$$

由条件  $|e_i| = 1, i = 1, 2, \dots, n$ , 可知矩阵  $H^T H$  的

迹为:

$$\text{tr}(H^T H) = 2n \tag{7}$$

即:

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 2n \tag{8}$$

当  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  相等时式(6)的等号成立且当  $\lambda_4 = n$  时, 获得最小值  $GDOP_{\min} = \sqrt{\frac{10}{n}}$ 。但是这个最小值的获取有一个前提就是要求  $H^T H$  为对角矩阵, 即需要同时满足以下条件:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n e_{xi}e_{yi} = \sum_{i=1}^n e_{xi}e_{zi} = \sum_{i=1}^n e_{yi}e_{zi} = 0 \\ \sum_{i=1}^n e_{xi} = \sum_{i=1}^n e_{yi} = \sum_{i=1}^n e_{zi} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

由于参与导航定位解算的卫星均应为地平面上方的可视卫星, 则所有卫星与  $Z$  轴的夹角介于  $0$  和  $\frac{\pi}{2}$  之间, 故要求  $e_{zi} > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。这与条件  $\sum_{i=1}^n e_{zi} = 0$  相矛盾, 所以矩阵  $H^T H$  不能为对角矩阵。故上述 GDOP 最小值是数学意义上的最小值, 而不是测量意义上的最小值。

## 2 GDOP 最小值的理论推导

推导 GDOP 的最小值, 需要在满足  $e_{zi} > 0, i = 1, 2, \dots, n$  的条件下进行。经过分析, 给出如下结论:

定理 令  $H^T H = \begin{bmatrix} C & U \\ U^T & D \end{bmatrix}$ , 其中:

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n e_{xi}^2 & \sum_{i=1}^n e_{xi}e_{yi} \\ \sum_{i=1}^n e_{yi}e_{xi} & \sum_{i=1}^n e_{yi}^2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n e_{zi}^2 & \sum_{i=1}^n e_{zi} \\ \sum_{i=1}^n e_{zi} & n \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n e_{xi}e_{zi} & \sum_{i=1}^n e_{xi} \\ \sum_{i=1}^n e_{yi}e_{zi} & \sum_{i=1}^n e_{yi} \end{bmatrix}。$$

则  $GDOP \geq \sqrt{\text{tr}(C^{-1}) + \text{tr}(D^{-1})}$ , 且当且仅当  $U = 0$  时上式等号成立, 即  $GDOP_{\min} = \sqrt{\text{tr}(C^{-1}) + \text{tr}(D^{-1})}$ 。

证明: 因  $H$  为列满秩矩阵, 则  $H^T H$  是正定矩阵, 故  $C, D$  也是正定矩阵。

由分块矩阵的求逆法可知:

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C} - \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T)^{-1} & -(\mathbf{C} - \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1} \\ -(\mathbf{D} - \mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

进而可得:

$$GDOP = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T)^{-1} + \text{tr}(\mathbf{D} - \mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1}} \quad (11)$$

由于  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  为正定矩阵,故  $\mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T$  和  $\mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U}$  均半正定,即:

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T \geq 0 \\ \mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U} \geq 0 \end{cases}$$

仅当  $\mathbf{U} = 0$  时上式等号成立。故:

$$\begin{cases} \mathbf{C} \geq \mathbf{C} - \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T \\ \mathbf{D} \geq \mathbf{D} - \mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U} \end{cases}$$

因此:

$$GDOP = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T)^{-1} + \text{tr}(\mathbf{D} - \mathbf{U}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U})^{-1}} \geq \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}^{-1}) + \text{tr}(\mathbf{D}^{-1})} \quad (12)$$

仅当  $\mathbf{U} = 0$  时上式等号成立,证毕。

$\mathbf{U} = 0$  要求条件:

$$\sum_{i=1}^n e_{xi}e_{zi} = \sum_{i=1}^n e_{xi} = \sum_{i=1}^n e_{yi}e_{zi} = \sum_{i=1}^n e_{yi} = 0 \quad (13)$$

同时成立,故求解 GDOP 最小值的问题转化为寻找满足上述条件的  $(e_{xi}, e_{yi}, e_{zi})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。当  $n = 4$  时,可构造满足条件的一族解如下所示:

$$(e_x, e_y, e_z) = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq \beta$$

这一族解有明确的几何意义:接收机与 4 颗卫星组成一个对称的六面锥,中心与  $Z$  轴重合,接收机在锥尖位置,4 颗卫星不在与  $XOY$  平行的平面上,这个六面锥投影在  $XOY$  平面上是一个菱形。

将这一族解代入到矩阵  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  中,得到 GDOP 最小值的计算公式为:

$$GDOP_{\min} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta + 2}{2(\cos\alpha - \cos\beta)^2} + \frac{1}{2\sin^2\alpha} + \frac{1}{2\sin^2\beta}} \quad (15)$$

当  $n = 5$  时,可构造一族解如下所示:

$$(e_x, e_y, e_z) = \begin{bmatrix} \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \neq \beta$$

相应地, GDOP 最小值的计算公式为:

$$GDOP_{\min} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 3}{3\cos^2\beta + 3\cos^2\alpha - 4\cos\alpha\cos\beta - 2\cos\alpha - 2\cos\beta + 2} + \frac{1}{2\sin^2\alpha} + \frac{1}{2\sin^2\beta}} \quad (17)$$

此时在  $n = 4$  的基础上,增加的第 5 颗卫星在接收机正上方,即位于  $Z$  轴正上方的位置,此时 GDOP 值亦达到最小。

可依次类推构造  $n = 2k$  和  $n = 2k + 1$ ,

( $k = 3, 4, 5, 6, \dots$ ) 时满足  $\mathbf{U} = 0$  并且  $\sum_{i=1}^n e_{xi}e_{yi} = 0$  的解族,并可以利用数值法得到相应的 GDOP 最小值。

### 3 仿真与分析

算例 1:为了验证文中推导出的 GDOP 理论最小值的正确性,以 4 颗、5 颗可视卫星为例进行仿真分析。分别按下列三种方案计算相应的 GDOP 最小值,计算结果如表 1 所示。

1) 用文中方法计算得到 GDOP 的最小值,记为  $GDOP_{\min1}$ 。

2) 按公式  $GDOP_{\min} = \sqrt{\frac{10}{n}}$  计算 GDOP 的最小值,记为  $GDOP_{\min2}$ 。

3) 根据美国 JPL 喷气动力实验室网站提供的卫星轨道根数等数据,不考虑各种误差的影响,采用外推法计算 GDOP 的最小值。这个 GDOP 最小值应该是相对真实的,记为  $GDOP_{\text{true}}$ 。

表 1 三种方案得到的 GDOP 最小值

可视卫星数	$GDOP_{\min1}$	$GDOP_{\min2}$	$GDOP_{\text{true}}$
4	1.979603	1.5811	1.979799
5	1.581895	1.4142	1.581987

由表 1 可以看出,文中给出的 GDOP 最小值与仿真计算的真正最小值基本上是一致的,而以往文献[1-9]中给出的 GDOP 最小值在实际导航中是达不到的。

算例 2:为了进一步验证文中结果的正确性,利用 XW-GPS1000 接收机在郑州市区采集一天的 GPS 静态数据,采样周期为 1s,分析处理后可以得到

GDOP 值随可视卫星数变化的曲线如图 1 所示。

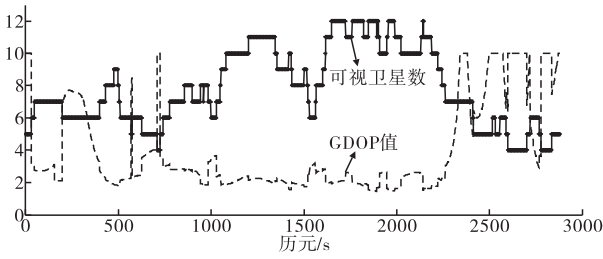


图 1 卫星 GDOP 值

由图 1 可以看出,对于 GPS 卫星导航系统,由于受卫星数目和卫星轨道长时间变化的限制及观测时卫星高度截止角的影响,可视卫星数为 4、5 时, GDOP 最小值分别为 3.492、2.430,比理论推导的 GDOP 最小值大得多。

### 4 结论

文中对 GNSS 导航定位中 GDOP 最小值的计算方法进行了分析,得到了以下结论:

- 1) 在导航定位中,接收机通常只能观测到卫星高度截止角大于 0 的卫星,因此相关文献给出的 GDOP 理论最小值是不合理的,也是不能达到的;
- 2) 文中对 GDOP 最小值进行了分析和推导,得出当接收机在  $n$  颗卫星的空间几何分布满足一定条件时, GDOP 达到最小值,并利用数值法得到了 4 颗、5 颗可视卫星对应的 GDOP 最小值;
- 3) 随着 GNSS 的发展,当多个卫星导航系统组合导航定位时,随着卫星数目的增加,卫星的空间几何分布会得到较大的改善, GDOP 值将变小;

(上接第 26 页)

的晃动基座下机载捷联惯性导航系统的自主粗对准算法可以减小角运动的干扰,有一定的滤波作用,可以实现航母系泊条件下机载捷联惯性导航系统的初始粗对准。同时考虑测量噪声和病态性的存在,推导了基于惯性坐标系中重力积分矢量的精对准算法,在经过卡尔曼滤波之后,基本可以满足精对准的精度要求。

#### 参考文献:

[1] 王司,邓正隆. 惯导系统动基座传递对准技术综述[J]. 中国惯性技术学报,2003,11(2):61-67.

[2] 秦永元,严恭敏,顾冬晴,等. 摇摆基座上基于信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报,2005,23(5):681-684.

[3] 赵长山,秦永元,白亮. 基于双矢量定姿的摇摆基座粗对

4) 文中的研究成果可以为星座设计、导航定位精度分析等提供一定的理论参考。

#### 参考文献:

[1] 盛璇,杨景曙,曾芳玲. 伪距定位中的 GDOP 最小值[J]. 火力与指挥控制,2009,34(5):22-24.

[2] 王泽民,伍岳. GPS、Galileo 及其组合导航定位的 DOP 值分析[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2006,31(1):9-11.

[3] 张育林,范丽,张艳,等. 卫星星座理论与设计[M]. 北京:科学出版社,2008.

[4] 丛丽,Ahmed I Abidat,谈展中. 卫星导航几何因子的分析与仿真[J]. 电子学报,2006,34(12):2204-2208.

[5] 丛丽,谈展中. 提高卫星导航定位精度和实时性的选星算法[J]. 系统工程与电子技术,2008,30(10):1914-1917.

[6] Yang Yong, Miao Lingjuan. GDOP results in all-in-view positioning and in four optimum satellites positioning with GPS PRN codes ranging[C]//IEEE Position Location and Navigation Symposium, 2004:723-727.

[7] H Sairo, D Akopian, J Takala. Weighted dilution of precision as quality measure in satellite positioning[J]. IEEE Radar, Sonar and Navigation, 2003,150(6):430-436.

[8] 李建文,李作虎,周巍,等. 卫星导航中几何精度衰减因子最小值分析及应用[J]. 测绘学报,2011,40(增刊):85-89.

[9] 何晓峰. 北斗/微惯性组合导航方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2009.

[10] 谭述森. 卫星导航定位工程[M]. 北京:国防工业出版社,2007.

准算法分析与实验[J]. 中国惯性技术学报,2009,17(4):436-440.

[4] Napolitano F, Gaiffe T, Cottreau Y, et al. PHINS: the first high performances inertial navigation system based on fiber optic gyroscopes [C]//9th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, 2002:296-304.

[5] 郭所风,申功璋,吴成富,等. 先进飞机控制系统[M]. 北京:国防工业出版社,2003.

[6] 施红兵. 不变性理论在稳定性罗经中的应用研究[D]. 上海:上海交通大学,1994.

[7] 秦永元,朱新颖. 舰载机捷联惯导自对准方案设计仿真[J]. 中国惯性技术学报,2008,16(1):28-33.

[8] 袁涛,李四海. 病态理论在捷联惯导粗对准中的应用[J]. 兵工自动化,2011,30(10):27-29.