文章编号:1001-506X(2011)03-0585-05

比较法确定多属性决策问题属性权重的灵敏度分析

马 健,孙秀霞
(空军工程大学工程学院,陕西 西安 710038)

摘 要:属性权重的确定将直接影响多属性决策的求解结果,灵敏度分析可以判断决策结论的稳定性。针对比较法所得属性权重进行方案排序,利用经典的线性规划方法,将属性线性相关约束分解为两类物理意义更清晰的属性相关形式表示的约束条件,求解维持既定方案排序的权重变化区间,得出对既定决策排序结果最敏感的属性,从而辅助决策者做出更加合理的决策。计算实例表明,该方法具有可操作性和实用性。

关键词:灵敏度分析;多属性决策;比较法;属性权重

中图分类号:TV 87;O 159 **文献标志码**:A **DOI**:10.3969/j.issn.1001-506X.2011.03.23

Sensitivity analysis on attribute weight ascertained by comparison method in multiple attribute decision making

MA Jian, SUN Xiu-xia
(*Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*)

Abstract: The result of multiple attribute decision making is directly influenced by the ascertaining of attribute weight, and sensitivity analysis is usually used to analyze the stability of project taxis result. Two kinds of restrictions due to attribute correlation are constructed by making use of classical linear programming methods, and the feasible area of attribute weight to ensure the taxis result of attribute weight from comparison method is worked out. According to the range of the feasible area, the most sensitive attribute is picked out, thus improving the decision-making. The case shows that the sensitivity analysis method is exercisable and applicable.

Keywords: sensitivity analysis; multiple attribute decision making; comparison method; attribute weight

0 引 言

多属性决策是现代决策科学的重要组成部分之一,其理论和方法被广泛应用于社会、经济、管理和军事等多个领域,如人才选拔、投资决策、项目评估和武器系统性能评定等[1]。

在多属性决策中,影响决策结果的因素有两个[2-4]:属性权重和属性值。研究属性权重一般从属性本身的性质出发;目前国内外对属性值的研究[5-8],一般都集中在属性值(参数)的敏感性上。目前还没有相关文献对维持特定方案排序的属性权重变化范围进行研究,此项研究的价值在于它引导人们基于更高的层次做决策——不仅知道决策方案的好坏,还能确定在属性权重发生变化时,对各个决策方案排序产生的影响。

同时,现有的国内外属性权重灵敏度分析文献中极少考虑各个属性之间相关时的情形[9-10],任何科学研究都是从简单情形入手,那么应该首先考虑属性之间线性相关的情形。本文将属性线性相关约束分解为两类物理意义更清晰的属性相关形式,在此约束条件下分析维持方案排序对属性权重范围产生的影响,所得的属性权重范围将更具参考价值。

1 问题描述

多属性决策的属性权重灵敏度分析是指:对于 m 个可选方案 $p_1,p_2,\cdots,p_m$,有 n 个评价指标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$,第 i 个方案的第 j 个指标的评价值表示为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$;按照某种属性权重计算方法得出属性权重 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,进而根据加权法得到方案排序 $p'_1,p'_2,\cdots,p'_m$,求解排序不变时属性权重的取值范围 $\tilde{w}_j=[\tilde{w}_{jm},\tilde{w}_{jM}](j=1,\cdots,n)$,该取值范围表示了本属性的灵敏性或稳定性[9-10]。

对于所有可选方案,其评价指标特征矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=(a_{ij})_{m\times n} \tag{1}$$

收稿日期:2010-06-21; **修回日期**:2010-09-02。
基金项目:中国博士后科学基金(2007042137);航空科学基金(20080896009)资助课题
作者简介:马健(1980-),男,博士研究生,主要研究方向为智能决策。E-mail:majian_1980@163.com

2 多属性决策属性权重灵敏度分析

多属性决策问题中属性权重用来衡量各指标的相对重要程度,其在很大程度上影响决策结果。随着时间的推移,决策问题中涉及自身的系统结构和运行模式、评判专家的主观意识都可能发生变化,因而可能会调整各属性的相对重要程度(权重),从而可能改变方案的排序结果。因此,有必要研究方案排序结果对属性权重的灵敏性或稳定性。

2.1 比较法确定属性主观权重

属性权重的确定方法有主观法和客观法。熵权法和投影寻踪法为客观赋权法[11]。基于评价指标特征矩阵可对属性权重灵敏度进行分析,因为决策的准确性本质上取决于决策过程中采用信息量的多少。由于客观赋权法并不在已知指标特征矩阵的基础上引入更多的信息,所以本文研究采用主观赋权法确定属性权重,原因包括:一是在此过程中引入专家根据工作经验和专业知识做出的属性相对重要性判断,作为对指标特征矩阵的补充;二是主观赋权法采用的专家判断信息与属性权重灵敏度分析所采用的指标特征矩阵是相对独立的。

常用主观赋权法有专家调查法[12],由于专家知识结构和研究方向的差异,易导致对多属性决策问题中某个指标的偏爱,采用专家调查法很难准确刻画各个属性相对重要程度。针对此问题,采用-1、0、1 三个标度,使专家能容易地做出比较判断,避免采用分级标度判断出现的臆断性,建立属性对比矩阵。方法如下[13]:

(1) 若属性 q_k 比 q_l 更重要,则排序标度 $e_{kl}=1, e_{lk}=-1$;

(2) 若属性 q_l 比 q_k 更重要,则排序标度 $e_{kl}=-1, e_{lk}=1$;

(3) 若属性 q_l 和 q_k 同等重要,则排序标度 $e_{kl}=e_{lk}=0$。

根据上述属性对比判断标度方法可以得到对比矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

根据最优传递矩阵原理,构造 $\boldsymbol{E}$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{S}=(s_{ij})_{n\times n}$,其中

$$s_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(e_{ik}+e_{kj}) \tag{3}$$

从而可以得到相应的判断矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}$,其中

$$c_{ij}=\exp(s_{ij}) \tag{4}$$

对 $\boldsymbol{C}$ 的每一行求和得到向量 $\boldsymbol{D}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$,其中

$$d_j=\sum_{i=1}^{n}c_{ji},\ j=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

然后,对向量 $\boldsymbol{D}$ 进行正规化,得到排序的权重向量 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,其中

$$w_j=d_j/\sum_{i=1}^{n}d_i,\ j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

且 $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$。

2.2 加权法确定方案排序

一般情况下,在构造特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时,指标的意义、量纲不同,且不同指标的样本值在数量上悬殊较大,为了便于计算和优选分析,利用模糊数学中的隶属度作标准化处理,可以消除指标间由于量纲不同而带来比较上的困难[14]。

假设可选方案 i、评价指标 j 的隶属度为 r_{ij},对于目标为越大越好的属性,有

$$r_{ij}=\frac{a_{ij}-\min\limits_j a_{ij}}{\max\limits_j a_{ij}-\min\limits_j a_{ij}} \tag{7}$$

对于目标为越小越好的属性,有

$$r_{ij}=\frac{\max\limits_j a_{ij}-a_{ij}}{\max\limits_j a_{ij}-\min\limits_j a_{ij}} \tag{8}$$

根据式(7)和式(8)可以得到标准化处理后的隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}=(r_{ij})_{m\times n} \tag{9}$$

根据比较法所得各属性权重 w_j 以及指标隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 得到各方案的综合评价值为

$$M_i=\sum_{j=1}^{n}w_j\cdot r_{ij},\ i=1,\cdots,m \tag{10}$$

可得方案综合评价值 $M'_1>M'_2>\cdots>M'_m$,确定方案优劣排序为 $p'_1,p'_2,\cdots,p'_m$。

2.3 属性不相关时权重灵敏度分析

由确定的方案排序 $p'_1,p'_2,\cdots,p'_m$,将隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 中行向量按方案排序调整得到矩阵 $\boldsymbol{R}'$ 为

$$\boldsymbol{R}'=\begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & \cdots & r'_{1n} \\ r'_{21} & r'_{22} & \cdots & r'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r'_{m1} & r'_{m2} & \cdots & r'_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_m \end{bmatrix}=(r'_{ij})_{m\times n} \tag{11}$$

然后由 $\boldsymbol{R}'$ 建立如下形式的矩阵 $\boldsymbol{R}^*$

$$\boldsymbol{R}^*=\begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} r'_1-r'_2 \\ r'_1-r'_3 \\ \vdots \\ r'_1-r'_m \end{matrix}\right\} m-1\text{ 行} \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} r'_i-r'_{i+1} \\ r'_i-r'_{i+2} \\ \vdots \\ r'_1-r'_m \end{matrix}\right\} m-i\text{ 行} \\ \vdots \\ r'_{m-1}-r'_m \end{bmatrix} \tag{12}$$

显然,$\boldsymbol{R}^*$ 满足式(13)

$$\boldsymbol{R}^*\cdot(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}>0 \tag{13}$$

定义 1 对于指标评估隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 的多属性决策问题,根据比较法确定属性权重向量 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,得到方案排序 $p'_1,p'_2,\cdots,p'_m$,按照式(12)可以得到矩

阵$\boldsymbol{R}^*$，将$\boldsymbol{R}^*$称为多属性决策方案排序矩阵。

权重灵敏度分析时，$\boldsymbol{R}^*$即为属性权重w_j的线性不等式约束矩阵，根据式(10)可知$\boldsymbol{R}^*$的行数为$\sum_{i=1}^{m-1} i = m(m-1)/2$。由于此处仅考虑属性之间不相关的情形，故属性权重$w_j$的等式约束为

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \tag{14}$$

如果没有特别的限制条件，属性权重w_j的取值范围为[0,1]，这也是灵敏度分析时w_j的取值范围。

因此，多属性决策问题中属性不相关时，第j个属性权重w_j维持方案排序不变的变化区间定义为$\tilde{w}_j=[\tilde{w}_{jm},\tilde{w}_{jM}]$($j=1,\cdots,n$)，可以通过如下优化问题的求解得到。

$$\min \tilde{w}_{jm} = w_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{R}^* \cdot (w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}} > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ 0 \leqslant w_i \leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{15}$$

$$\max \tilde{w}_{jM} = w_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{R}^* \cdot (w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}} > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ 0 \leqslant w_i \leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{16}$$

2.4　属性相关时权重灵敏度分析

2.3 节分析中没有考虑属性之间的相关性，但是事实上多属性决策问题所选的属性之间都存在一定的关联性，如果在属性权重灵敏性分析时考虑属性之间的相关性会得到更贴近实际的权重变化区间。

任何科学研究都是从简单情形入手，那么应该首先考虑属性之间线性相关的情形，从这个意义上讲，同样可以将线性相关的情形分解为两种更简单的属性相关形式，它们具有更清晰的物理意义，便于决策者进行参数的设定，具体形式如下：

(1) 由于系统属性固有的特性，特定属性之间保持恒定的相对重要性，使得属性权重的比值为一常数，在进行灵敏性分析时作为属性权重的约束条件。

定义 2　对于可选方案集为$\boldsymbol{P}=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$，评价属性集为$\boldsymbol{Q}=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$的多属性决策问题，根据某种方法或准则得到属性$i$和属性$j$的属性权重为$w_i$和$w_j$，由于系统自身和外界环境改变，属性权重调整为$w_i'$和$w_j'$，有

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i'}{w_j'} = c_1 \tag{17}$$

式中，c_1为一常数，即属性i和属性j之间保持恒定的相对重要性，称c_1为属性i对于属性j的相对重要性系数。当然，如果有多对属性之间存在如式(17)的相关性，可将其表示为矩阵形式。

(2) 对参与决策的属性进行分类，每个类别作为一个决策属性空间的子集，在进行多属性决策时，属性子集的权重为恒定值，同时作为属性权重灵敏度分析时的约束条件。

定义 3　对于可选方案集为$\boldsymbol{P}=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$，评价属性集为$\boldsymbol{Q}=\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$的多属性决策问题，根据属性的特性将其分为若干个子类，假设$\boldsymbol{Q}_l$为评价属性集$\boldsymbol{Q}$的第l个子集，w_i和w_i'分别为$\boldsymbol{Q}_l$内第i个属性调整前后的属性权重值，有

$$\sum_{Q_l} w_i = \sum_{Q_l} w_i' = c_2 \tag{18}$$

式中，c_2为一常数，即属性$\boldsymbol{Q}$的第l个子集$\boldsymbol{Q}_l$的权重值，称c_2为子集$\boldsymbol{Q}_l$的子集权重系数。从物理意义来讲，子集$\boldsymbol{Q}_l$代表决策时更高一层的权重，即借鉴层次分析法（analytic hierarchy process，AHP）的思想，将决策所考虑因素分为几个大类并赋予权重，再将所考虑属性分层展开。同样地，多个子类存在如式(18)的相关性，可将其表示为矩阵形式。

根据属性不相关时权重灵敏度分析需要求解的优化问题，结合上述两种属性相关性约束条件，得到属性相关时第j个属性权重w_j权重灵敏性分析需要求解的优化问题，可得到属性相关时属性权重w_j维持方案排序的变化区间为$\bar{w}_j=[\bar{w}_{jm},\bar{w}_{jM}]$($j=1,\cdots,n$)。

$$\min \bar{w}_{jm} = w_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{R}^* \cdot (w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}} > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ 0 \leqslant w_i \leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n \\ \dfrac{w_k}{w_s} = c_1 \\ \sum_{Q_l} w_l = c_2\end{cases} \tag{19}$$

$$\max \bar{w}_{jM} = w_j,\ j=1,2,\cdots,n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{R}^* \cdot (w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}} > 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ 0 \leqslant w_i \leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n \\ \dfrac{w_k}{w_s} = c_1 \\ \sum_{Q_l} w_l = c_2\end{cases} \tag{20}$$

综上所述，多属性决策问题的属性权重灵敏度分析步骤如下：

步骤 1　确定评价指标特征矩阵$\boldsymbol{A}$(式(1))；

步骤 2　通过专家对各个指标相互重要程度的比较，得到对比矩阵$\boldsymbol{E}$(式(2))，根据式(3)得到$\boldsymbol{E}$的传递矩阵$\boldsymbol{S}$，从而可以得到判断矩阵$\boldsymbol{C}$(式(4))，根据式(6)计算出属性权重w_j；

步骤 3　根据矩阵$\boldsymbol{A}$标准化处理后的隶属度矩阵$\boldsymbol{R}$，以及比较法得到的属性权重w_j对方案进行排序(式(10))，针对该排序将$\boldsymbol{R}$调整得到$\boldsymbol{R}'$(式(11))，进而得到多属性决策方案排序矩阵$\boldsymbol{R}^*$(式(12))；

步骤 4　求解优化问题式(15)、式(16)，得到维持上述方案排序未考虑属性相关的属性权重变化区间$\tilde{w}_j=[\tilde{w}_{jm},\tilde{w}_{jM}]$($j=1,\cdots,n$)；

步骤 5　分析决策问题属性特点，根据式(17)、式(18)

建立两种形式的属性权重约束条件，求解优化问题式(19)、式(20)，得到维持上述方案排序考虑属性相关的属性权重变化区间为 $\bar{w}_j=[\bar{w}_{jm},\bar{w}_{jM}]$ $(j=1,\cdots,n)$。

3 案例分析

选用文献[15-16]的案例。对该离散方案决策问题的描述如表 1 所示，决策的目的是依据最大速度、飞行范围等 6 个指标对 6 种飞机的综合性能进行排序。

表 1 决策原始数据表

属性	最大速度 Ma	飞行范围 /km	最大负荷 /kg	购买费用	可靠性	灵敏度
1	2.0	1 500	20 000	5.5	5	9
2	2.5	2 700	18 000	6.5	3	9
3	1.8	2 000	21 000	4.5	7	7
4	2.2	1 800	20 000	5.0	5	5
5	2.1	2 100	19 750	5.3	6	6
6	2.3	2 300	20 800	5.2	6	8

利用多属性决策问题的属性权重灵敏度分析方法，按照如下步骤对该案例进行分析。

步骤 1 对于购买飞机可选方案，由表 1 可得其评价指标特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2.0 & 1\,500 & 20\,000 & 5.5 & 5 & 9\\ 2.5 & 2\,700 & 18\,000 & 6.5 & 3 & 9\\ 1.8 & 2\,000 & 21\,000 & 4.5 & 7 & 7\\ 2.2 & 1\,800 & 20\,000 & 5.0 & 5 & 5\\ 2.1 & 2\,100 & 19\,750 & 5.3 & 6 & 6\\ 2.3 & 2\,300 & 20\,800 & 5.2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

步骤 2 根据比较法对各个属性相互重要程度进行比较，得到对比矩阵 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

通过构造 $\boldsymbol{E}$ 的传递矩阵 $\boldsymbol{S}$，从而得到相应的判断矩阵 $\boldsymbol{C}$，进而计算出属性权重 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\boldsymbol{W}=[0.121\,8,0.062\,6,0.143\,9,0.103\,1,0.237\,3,0.331\,2]^{\mathrm{T}}$$

步骤 3 将 $\boldsymbol{A}$ 标准化处理后的隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0.285\,7 & 0.000\,0 & 0.666\,7 & 0.50 & 0.50 & 1.00\\ 1.000\,0 & 1.000\,0 & 0.000\,0 & 0.00 & 0.00 & 1.00\\ 0.000\,0 & 0.416\,7 & 1.000\,0 & 1.00 & 1.00 & 0.50\\ 0.5714 & 0.250\,0 & 0.666\,7 & 0.75 & 0.50 & 0.00\\ 0.428\,6 & 0.500\,0 & 0.583\,3 & 0.60 & 0.75 & 0.25\\ 0.714\,3 & 0.666\,7 & 0.933\,3 & 0.65 & 0.75 & 0.75 \end{bmatrix}$$

根据比较法所得属性权重 $\boldsymbol{W}$ 以及指标隶属度矩阵 $\boldsymbol{R}$ 得到方案综合评价值为

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{W}=$$
$$[0.632\,2,0.515\,6,0.676\,1,0.377\,2,0.490\,1,0.756\,5]$$

根据方案综合评价值 $M_6>M_3>M_1>M_2>M_5>M_4$，确定方案优劣排序为 6—3—1—2—5—4。针对该排序将 $\boldsymbol{R}$ 调整得到 $\boldsymbol{R}'$，进而得到多属性决策方案排序矩阵 $\boldsymbol{R}^*$ 为

$$\boldsymbol{R}^*=\begin{bmatrix} 0.428\,6 & 0.666\,7 & 0.266\,7 & 0.150\,0 & 0.250\,0 & -0.250\,0\\ -0.285\,7 & -0.333\,3 & 0.933\,3 & 0.650\,0 & 0.750\,0 & -0.250\,0\\ 0.714\,3 & 0.250\,0 & -0.066\,7 & -0.350\,0 & -0.250\,0 & 0.250\,0\\ 0.142\,9 & 0.416\,7 & 0.266\,7 & -0.100\,0 & 0.250\,0 & 0.750\,0\\ 0.285\,7 & 0.166\,7 & 0.350\,0 & 0.050\,0 & 0.000\,0 & 0.500\,0\\ -0.285\,7 & 0.416\,7 & 0.333\,3 & 0.500\,0 & 0.500\,0 & -0.500\,0\\ -1.000\,0 & -0.583\,3 & 1.000\,0 & 1.000\,0 & 1.000\,0 & -0.500\,0\\ -0.571\,4 & 0.166\,7 & 0.333\,3 & 0.250\,0 & 0.500\,0 & 0.500\,0\\ -0.428\,6 & -0.083\,3 & 0.416\,7 & 0.400\,0 & 0.250\,0 & 0.250\,0\\ -0.714\,3 & -1.000\,0 & 0.666\,7 & 0.500\,0 & 0.500\,0 & 0.000\,0\\ -0.285\,7 & -0.250\,0 & 0.000\,0 & -0.250\,0 & 0.000\,0 & 1.000\,0\\ -0.142\,9 & -0.500\,0 & 0.083\,3 & -0.100\,0 & -0.250\,0 & 0.750\,0\\ 0.428\,6 & 0.750\,0 & -0.666\,7 & -0.750\,0 & -0.500\,0 & 1.000\,0\\ 0.571\,4 & 0.500\,0 & -0.583\,3 & -0.600\,0 & -0.750\,0 & 0.750\,0\\ -0.142\,9 & 0.250\,0 & -0.083\,3 & -0.150\,0 & 0.250\,0 & 0.250\,0 \end{bmatrix}$$

步骤 4 求解优化问题式(15)、式(16)，得到维持方案排序 6—3—1—2—5—4，且未考虑属性相关的属性权重变化区间 $\tilde{w}_j=[\tilde{w}_{jm},\tilde{w}_{jM}]$ $(j=1,\cdots,n)$，与比较法所得属性权重进行比较，如表 2 所示。

由表 2 可以看出，若要维持方案排序为 6—3—1—2—5—4，各属性权重变化区间长度 $\tilde{w}_3>\tilde{w}_4>\tilde{w}_5>\tilde{w}_1>\tilde{w}_6>\tilde{w}_2$，即属性 2 权重变化区间最小，敏感性最大；反之，属性 3 权重变化区间最大，敏感性最小。特别地，除属性 6 之外，其他属性权重均可能取 0，说明属性 6 在此种方案排序时的重要性胜于其他属性，故在决策前确定指标特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中

各方案属性 6 的取值时需要更加慎重。

表 2　不相关情形属性权重变化范围

序号	属性	权重	权重变化范围
1	最大速度	0.121 8	0～0.402 3
2	飞行范围	0.062 6	0～0.333 3
3	最大负荷	0.143 9	0～0.554 8
4	购买费用	0.103 1	0～0.508 5
5	可靠性	0.233 7	0～0.500 0
6	灵敏度	0.331 2	0.106 1～0.500 0

步骤 5　依据式(17)、式(18)考虑的属性相关的形式，分析该飞机采购问题所考虑的属性之间的相关性如下：

(1) 一般地，最大速度越大，则最大负荷越小，二者紧密相关，将最大速度、最大负荷划分为一个子类 $\boldsymbol{Q}'$，取 $\boldsymbol{Q}'$ 对应的子集权重系数 c_2 为 1/3，属性权重约束有

$$w_1 + w_3 = 1/3$$

(2) 若飞机的可靠性高，说明飞机各部件、系统具有较长的无故障工作时间，同时有较好的故障容错能力；若灵敏度高，说明飞机机动性或可控性很好。可靠性相对于灵敏度的相对重要性系数 c_1，此处认定这两种属性同等重要，则 c_1 取值为 1，有

$$\frac{w_5}{w_6} = 1 \Rightarrow w_5 - w_6 = 0$$

加入上述属性权重约束条件，求解优化问题式(19)、式(20)，得到维持上述方案排序考虑属性相关的属性权重变化区间 $\bar{w}_j = [\bar{w}_{jm}, \bar{w}_{jM}]$ $(j=1,\cdots,n)$，与比较法所得属性权重进行比较，如表 3 所示。

表 3　相关情形属性权重变化范围

序号	属性	权重	权重变化范围
1	最大速度	0.121 8	0.062 3～0.330 0
2	飞行范围	0.062 6	0～0.241 2
3	最大负荷	0.143 9	0～0.267 7
4	购买费用	0.103 1	0～0.303 3
5	可靠性	0.233 7	0.171 5～0.335 0
6	灵敏度	0.331 2	0.171 5～0.335 0

由表 3 可以得出，若要维持方案排序 6－3－1－2－5－4，各属性权重变化区间长度 $\bar{w}_4 > \bar{w}_1 = \bar{w}_3 > \bar{w}_2 > \bar{w}_5 = \bar{w}_6$，即属性 5、6 权重变化区间最小，敏感性最大；反之，属性 4 权重变化区间最大，敏感性最小。特别地，由于考虑了属性相关性，与表 2 相比，除了属性权重灵敏性排序有所变化外，属性 1、5、6 权重均不能为 0，说明这 3 个属性考虑属性相关时重要性胜于其他属性，故在决策前确定指标特征矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中各方案这 3 个属性的取值需要更加慎重。

4　结束语

依据比较法所得属性权重对多属性决策问题方案进行排序，在此基础上提出多属性决策问题的属性权重灵敏度分析方法，分别从属性不相关和属性相关情形两个方面进行分析。该方法不仅可以给出维持方案排序不变的属性权重取值区间，还可以得出对既定决策排序敏感的属性，这可为决策者提供更全面的决策支持。

参考文献：

[1] 孙昭旭，韩敏，邱莞华. 一种多属性决策问题的分类方法研究[J]. 控制与决策，2006，21(6)：171－174. (Sun Z X, Han M, Qiu W H. Classification approach for multicarria decision making problem[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(6): 171－174.)

[2] Jiang Y, Tian D G, Pan Y. Ranking environmental projects model based on multicriteria decision-making and the weight sensitivity analysis [J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2007, 18(3): 534－539.

[3] Figueira J, Greco S, Ehrgott Y. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*[M]. Norwell MA: Kluwer Academic Publishers, 2005.

[4] Inusu D R, French S. A framework for sensitivity analysis indiscrete multi-objective decision-making[J]. *European Journal of Operational Research*, 1991, 54(2): 176－190.

[5] Barron H, Schmidt C P. Sensitivity analysis of additive multi-attribute value models [J]. *Operations Research*, 1988, 36(1): 122－127.

[6] Masuda T. Hierarchical sensitivity analysis of the priorities used in analytics hierarchy process [J]. *Systems Science*, 1990, 21(2): 415－427.

[7] Zavadskas E K, Turskis Z, Dejus T, et al. Sensitivity analysis of a simple additive weight method[J]. *International Journal of Management and Decision Making*, 2007, 8(5/6): 555－574.

[8] French S, Rios-Insua D. *Partial information and sensitivity analysis in multi-objective decision making* [M]. London: Springer-Verlag, 1989.

[9] 林振智，文福拴，薛禹胜. 黑启动决策中指标值和指标权重的灵敏度分析[J]. 电力系统自动化，2009，33(9)：20－25. (Lin Z Z, Wen F S, Xue Y S. Sensitivity analysis on the values and weights of indices in power system blackstart decision making[J]. *Automation of Electric Power Systems*, 2009, 33(9): 20－25.)

[10] Triantaphyllou E, Sanchez A. A sensitivity analysis approach for some deterministic multi-criteria decision-making methods [J]. *Decision Sciences*, 1997, 28(1): 151－194.

[11] 付强，赵小勇. 投影寻踪模型原理及其应用[M]. 北京：科学出版社，2006. (Fu Q, Zhao X Y. *Principle and application of projection pursuit model*[M]. Beijing: Science Press, 2006.)

[12] 陈水利，李敬功，王向公. 模糊集理论及其应用[M]. 北京：科学出版社，2005. (Chen S L, Li J G, Wang X G. *Fuzzy sets theory and applications*[M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[13] 徐森泉. 基于熵权的施工导流标准多目标风险决策研究[D]. 武汉：武汉大学，2004. (Xu S Q. Multl-objective decision analysis of diversion study of diversion standards based on entropy[D]. Wuhan: Wuhan University, 2004.)

[14] 王美义，张凤鸣，刘智. 模糊信息的熵权多属性决策方案评估方法[J]. 系统工程与电子技术，2006，28(10)：1523－1535. (Wang M Y, Zhang F M, Liu Z. Evaluation method of the multi-attribute scheme based on entropy weight of fuzzy information[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(10): 1523－1535.)

[15] Hwang C L, Yoon K. *Multiple attribute decision making*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[16] 易平涛，郭亚军. 权数非独裁性条件下基于竞争视野优化的多属性决策方法[J]. 控制与决策，2007，22(11)：1259－1263. (Yi P T, Guo Y J. Multi-attribute decision-making method based on competitive view optimization under condition of weights nondictatorship[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(11): 1259－1263.)