预测型线性规划理论及应用①

徐玖平

(成都科技大学信息与决策研究所 610065)

摘 要 本文在文献[1]～[6]的基础上，针对预测型线性规划问题的不完善性，运用参数线性规划理论与方法对其最优解及其性质进行讨论，并得出了一些新的结论，不仅为预测型线性规划作了一些理论探讨，而且在实际应用上也提供了一些解该规划的方法与具体算法，文章最后以一应用实例给予示范。

关键词 线性规划 预测 GM(1.1) 预测型线性规划 决策

一、引 言

文献[1]～[6]描述的所谓预测型线性规划，是指在线性规划问题的约束条件的约束值变动，并可以用时间序列来描述时，按灰色动态模型 GM(1.1)对约束值进行预测，再按预测值求解线性规划。一般情况记 $X_j, j=1,2,\cdots,n$ 为决策变量；$b_i, i=1,2,\cdots,m$ 为约束量，$b_i(k)$为时刻 bi 的值。

$$b_i=(b_i(1),b_i(2),\cdots,b_i(s)),i\in I$$

为约束时间列，I 为指标集，I 中指标所对应的元素允许出现非序列，即纯量。

$$A=(a_{ij}),i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

$$C=[c_1,c_2,\cdots,c_n]^T,b=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$$

则称

$$\begin{cases}GM:\{b_i\}\to\{\hat{b}_i^{(1)}(s+k)\}\\ IAGO(\hat{b}_i^{(1)}(s+k))=\hat{b}_i(s+k)\\ AX(s+k)\leqslant\hat{b}(s+k)\\ X(s+k)\geqslant\overline{O}\\ f=CX^T(s+k)=\max(\text{或}\min)\end{cases}\tag{1}$$

为 $s+k$ 时刻的线性规划，$\hat{b}(s+k)$是通过 GM(1.1)模型得到的。

换句话讲，预测型线性规划问题，是指矩阵约束

$$AX\leqslant b=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^T$$

结果 b_i 是随着时间变化，则按 GM(1.1)预测未来的约束值 $\hat{b}_i$，再用 $\hat{b}_i$ 求线性规划解，对应未来不同时期的约束值，便有相应的规划解，从而既了解目前条件下的优化结果，又能

① 本文1993年10月8日收到。

分析未来优化结果的变化趋势。为了在理论上的讨论,我们将(1)式简化为如下规划问题。

$$\text{(FLP)}\quad \max F(X)=CX \quad \text{s.t.}\begin{cases}AX\leqslant b(\otimes)=[b_1(\otimes),b_2(\otimes),b_m(\otimes)]^T\\ X\geqslant 0,b_i(\otimes)=[\underline{b}_i,\overline{b}_i],i=1,2\cdots,m\end{cases}\tag{2}$$

§2 最优解及其性质

定义 2.1 设 $X\in E_+^n$,若存在某 $\dot{b}=[\dot{b}_1,\dot{b}_2,\cdots,\dot{b}_m]$,$\dot{b}_i\in[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$,$i=1,2\cdots,m$,使得

$$AX\leqslant\dot{b}$$

成立,则称 X 为(FLP)的可行解,(FLP)的全体可行解所组成的集合称为(FLP)的可行域,记作 R(FLP)。

定义 2.2 设 $X^0\in E_+^n$ 若存在某 $\dot{b}=[\dot{b}_1,\dot{b}_2,\cdots,\dot{b}_m]$,$\dot{b}_i=[\underline{b}_i,\overline{b}_i]$,$i=1,2\cdots,m$,使得 X^0 为下列线性规划

$$(\dot{\text{FLP}})\quad \max F(x)=CX \quad \text{s.t.}\quad AX\leqslant\dot{b},\ X\geqslant\overline{0}\tag{4}$$

的最优解,则称 X^0 为(FLP)的最优解,(FLP)的全体最优解所组成的集合称为(FLP)的最优解集,记作 0(FLP)

为了研究(FLP)的最优解及其性质,我们引入如下参数线性规划

$$(\text{FLP})_\alpha\quad \max F(x)=CX \quad \text{s.t.}\quad AX\leqslant b(\alpha),\ X\geqslant\overline{0},b(\alpha)=\underline{b}+\alpha(\overline{b}-\underline{b}),\alpha\in[0,1]\tag{5}$$

这里 $\underline{b}=[\underline{b}_1,\underline{b}_2,\cdots,\underline{b}_m]^T$,$\overline{b}=b[\overline{b}_1,\overline{b}_2,\cdots,\overline{b}_m]^T$

定理 2.1 $R[(FLP_0]\subseteq R(\dot{FLP})\subseteq R[(FLP)_1]=R(FLP)$

证明 先证 $R[(FLP)_0]\subseteq R(\dot{FLP})$

设任意 $X\in R[(FLP)_0]$,那么一定有

$$AX\leqslant\underline{b},X\geqslant\overline{0}$$

成立.

对任意 $\dot{b}$,则 $AX\leqslant\underline{b}\leqslant\dot{b}$,从而有 $X\in[\dot{FLP}]$

故 $R[(FLP)_0]\subseteq R(\dot{FLP})$ (6)

同理可证 $R[(FLP)_1]\subseteq R[(\dot{FLP})]$ (7)

对任意 $X\in R(FLP)$,则由定义 2.1,存在某 $\dot{b}$,使得

$$AX\leqslant\dot{b},X\geqslant 0$$

再由 $AX\leqslant\dot{b}\leqslant\overline{b},X\geqslant\overline{0}$,得 $X\in R[(FLP)]$

从而有 $R(FLP)\subseteq R[(FLP)_1]$ (8)

另一方面,因为$(FLP)_1$ 是(FLP)的某一特殊形式,所以 $R(FLP)\supseteq R[(FLP)_1]$

故 $R(FLP)=R[(FLP)_1]$ (9)

定理 2.2 设 X^1 是 $(FLP)_1$ 的最优解，X^2 是 $(FLP)_0$ 的最优解，则

$CX^1=\max\{CX|X\in 0(FLP)\}$ (10)

$CX^2=\max\{CX|X\in 0(FLP)\}$ (11)

证明 设 X^1 是 $(FLP)_1$ 的最优解，则

$CX^1=\max\{CX|X\in R[(FLP)_1]\}$ (11)

又因为对任意 $X\in R[(FLP)_1]=R(FLP)$，则 $CX\leqslant CX^1$

所以 $CX^1\geqslant\max\{CX|X\in 0(FLP)\}$ (13)

另一方面，因为 $0[(FLP)_1]\subseteq 0(FLP)$，所以

$CX^1=\max\{CX|X\in 0(FLP)\}$ (14)

故 $CX^1=\max\{CX|X\in 0(FLP)\}$

设 X^2 是 $(FLP)_0$ 的最优解，则

$CX^2=\max\{CX|X\in R[(FLP)_0]\}$

由定理 1.1 $R[(FLP)_0]\subseteq R(FLP)\subseteq R(FLP)$ 得

$CX\geqslant CX^2 \quad \forall X\in(FLP)$ (15)

所以 $CX^2\leqslant\min\{CX|X\in 0(FLP)\}$

另一方面，因为 $O[(FLP)_0]\subseteq 0(FLP)$，所以

$CX^2\geqslant\min\{CX|X\in 0(FLP)\}$ (16)

故 $CX^2=\min\{CX|X\in 0(FLP)\}$ (17)

定理 2.3 任意(FLP)有最优解的充分必要条件是 $R[(FLP)_0]\neq\varnothing$，$0[(FLP)_1]\neq\varnothing$

证明 必要性显然

充分性 因为 $R[(FLP)_0]\neq\varnothing$，所以由定理 2.1 $R[(FLP)_0]\subseteq R(FLP)\subseteq R[(FLP)_1]=R(FLP)$，得 $R(FLP)\neq\varnothing$

对任意 $X\in R(FLP)$，并设 $X^0\in 0[(FLP)_1]\neq\varnothing$

再由定理 2.2 得，$CX\leqslant CX^0$ 即 $0(FLP)\neq\varnothing$

定理 2.4 $(FLP)_\alpha$ 的最优解函数值 $F^*(\alpha)=\max\limits_{X\in R[(FLP)_\alpha]} F(X,\alpha)$ 是 α 在[0,1]上的单调不减函数。

证明 先证任意 $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ 若 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$，则有 $R[(FLP)_{\alpha_1}]\subseteq R[(FLP)_{\alpha_2}]$。

任意 $X\in R[FLP)_{\alpha_1}]$，则

$$
\begin{aligned}
AX&\leqslant \underline{b}+\alpha_1(\overline{b}-\underline{b})\\
&=\underline{b}+\alpha_2(\overline{b}-\underline{b})+(\overline{b}-\underline{b})(\alpha_1-\alpha_2)\\
&\leqslant \underline{b}+\alpha_2(\overline{b}-\underline{b})
\end{aligned}
$$

从而得知，$X\in R[(FLP)_{\alpha_2}]$，即 $R[(FLP)_{\alpha_1}]\leqslant R[(FLP)_{\alpha_2}]$

再证 $F(X,\alpha)$ 单调不减性

$F^*(\alpha_1)=\max\limits_{R[(FLP)\alpha_1]} CX\leqslant \max\limits_{R[(FLP)\alpha_2]} CX=F^*\alpha_2$

定理 2.5 若 $(FLP)_0$ 与 $(FLP)_1$，都有最优值，则 $0(FLP)=\bigcup\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\{F^*(\alpha)\}=[F^*(0)F^*$

(1)]

证明　设任意(FLP)的最优值为 F，由定理 2.1～2.2 得，$F^*(0) \leqslant F \leqslant F^*(1)$ 即，$F \in [F^*(0), F^*(1)]$。

对于参数线性规划$(FLP)_\alpha$，因为约束条件中函数 $b(\alpha)$ 是 α 的连续函数，由参考文献[7]知，其最优值函数 $F^*(\alpha)$ 也为 α 的连续函数，于是对任意 $F \in [F^*(0), F^*(1)]$，根据价值定理，必有 $\alpha_0 \in [0,1]$，使得 $F^*_{\alpha_0} = F$，F 为下列线性规划

$$(FLP)\alpha_0 \quad \begin{array}{ll} & \max F(x, \alpha_1) = CX \\ s.t. & AX \leqslant b(\alpha_0) \\ & X \geqslant \overline{0} \end{array} \tag{19}$$

的最优值。

$$\text{故 } 0(FLP) = \bigcup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \{F^*(\alpha)\} = [F^*(0) F^*(1)] \tag{19}$$

依据上述讨论，求解预测型线性规划等价于求得$(FLP)_\alpha$参数线性规划。于是有必要对其算法进一步探讨。

§3　算　法

引进 3.1（第一判别定理）设一般线性规划为 LP

$$\begin{array}{ll} & \max F(x) = CX \\ s.t. & AX \leqslant b \\ & X \geqslant \overline{0} \end{array} \tag{20}$$

对基 $B = (P_{J1}, P_{J2}, \cdots, P_{Jm})$，若 $B^{-1}b \geqslant \overline{0}$，且 $C_B B^{-1} A - C \geqslant \overline{0}$，则对应于 B 的基本可行解

$$X_B = B^{-1}b \qquad X_N = \overline{0} \tag{21}$$

便是(LP)的最优解（即基本最优解），此时的基 B 称为最优基。

引进 3.2（第三类别定理）　对(LP)任意的单纯形表 $T(B) = b_{ij}$。若有某 j 使得 $b_{ij} \leqslant D$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则对应的线性规划问题(LP)成为无可行解；或者 F 无上界，因此无最优解。

$(FLP)_\alpha$ 的单纯形法计算步骤如下：

Step1　设已知$(FLP)_0$的初始可行基 $B = (P_{J1}, P_{J2}, \cdots, P_{Jm})$，由此构成 B 的单纯形表 $T(B) = b_{ij}$，其中

$$B^+ b = (b_{10}, b_{20}, \cdots, P_{m0})^T \geqslant \overline{0}$$

Spep2　令 $V = \{K \mid b_{ij} < 0, 1 \leqslant j \leqslant n\}$，若 $V = \varnothing$，则得基本最优解

$$X_B = B^{-1}b, X_N = \overline{0}$$

转 Step6，否则转 Step3。

Step3　若 $V \neq \varnothing$，对 $K \in V$，当 $b_{ik} \leqslant 0, i = 1, 2 \cdots, m$ 时，则停止，得到问题无最优解。否则转 Step4。

Step4　令 $b_{o\alpha} = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} b_{oj}$，求

$$\theta=\min\{\frac{b_{io}}{b_{is}}|b_{is}>0,1\leqslant i\leqslant m\}=\frac{b_{ro}}{b_{rs}} \tag{22}$$

$$J_r=\min\{J_i|\theta=\frac{b_{io}}{b_{is}},b_{is}>0\} \tag{23}$$

Step5　以 brs 为主元，主元行为 r 行，主元列为 s 列，作{r，s}换基迭代，得基 $\overline{B}=(P_{J1},P_{J2},\cdots,P_{Jm})$的单纯形表$(\overline{b}_{ij})$，其中

$$\overline{b}_{rj}=\frac{b_{rj}}{b_{rs}}(1\leqslant j\leqslant n) \tag{24}$$

$$\overline{b}_{rj}=b_{ij}-\frac{b_{rj}}{b_{rs}}b_{is}(1\leqslant i\neq r\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n) \tag{25}$$

以 $\overline{b}_{rj}$代替(b_{rj})转 Step2

Step6　令 $\overline{b}=B^{-1}b=(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\cdots,\overline{b}_m)^T$ (26)

$$\overline{b}'=B^{-1}b'=(\overline{b}'_1,\overline{b}'_2,\cdots,\overline{b}'_m)^T \tag{27}$$

$$W=\{k|\overline{b}'_k<o\} \tag{28}$$

若 W＝∅，则对一节 $\alpha\geqslant0$ 的 α，现行基仍保持为最优基，最优解与最优值分别为

$$X_B=B^{-1}(b+2b'),X_N=\overline{0},F^*=C_BB^{-1}(b+\alpha b') \tag{29}$$

否则转 Step7。

Step7　令 $\alpha=\min\limits_{k\in W}\{\frac{\overline{b}k'}{-\overline{b}k}\}=\{\frac{\overline{b}t}{-\overline{b}t'}\}$ (30)

$\alpha_1=\alpha$，则对一切 $\alpha\in[0,\alpha_1]$，现行基仍为最优基，最优解与最优值分别为

$$X_B=B^{-1}(b+\alpha b'),X_N=\overline{0},F^*=C_BB^{-1}(b+\alpha b')$$

Step8　当 $\alpha=\alpha_1$ 时知 $X_{Bt}=0$，若此时 $bij\geqslant0,j=1,2,\cdots,n$，则在 $\alpha>\alpha_1$ 时，原$(FLP)_\alpha$无可行解存在，转 Step12，否则转 Step9。

Step9　求 $\theta=\max\{\frac{b_{ij}}{b_{tj}}|b_{ij}<0,1\leqslant j\leqslant n\}$ (31)

$$h=\min\{j|\frac{b_{oj}}{b_{ij}}=\theta,bij<0,1\leqslant j\leqslant n\} \tag{32}$$

转 Step10

Step10　以 b_{tk}为主元，作{t，h}旋转变换，可得基 $\overline{B}=(P_{J1},P_{J2},\cdots,P_{Jm})$，故 $T(\overline{B})=\overline{b}_{ij}$ 其中

$$\overline{b}_{tj}=\frac{b_{tj}}{b_{th}}(j=0,1,2,\cdots,n) \tag{33}$$

$$\overline{b}_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{rj}}{b_{rs}}b_{is}(0\leqslant i\neq r\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n) \tag{34}$$

用 $\overline{B}$ 代替 B，T(B)代替 T(B)转 Step11

Step11　令 $V=\{i|b_{io}<0\}$，若 $V\neq\varnothing$，则已获得 $\alpha=\alpha_1$ 的另一最优基及其对应的单纯形表 $T(\overline{B})$，转 Step7，否则，对任意 $t\in V$，令 $b_{tc}=\min\limits_{j\in V}b_{io}$转 Step9。

Step12　综合以上计算，总结最优解及作为 α 的函数 maxF(X，α)之间的关系。

定理 3.1　若$(FLP)_\alpha$是非退化的，则上述算法是收敛的。

证明　由引理 3.1～3.2，可直接获证。

若在上述算法中出现循环时，可在文献[9]中查到处理办法，这里从略。

§4 最优值 maxF(x)作为b的函数关系

定义 4.1 设凸集 $\Gamma \subseteq E^n$,f(x)是 Γ 上的函数,若对任意两点 $X^1,X^2 \in \Gamma$,任意λ∈[0,1],都有

$$f[\lambda X^1+(1-\lambda)X^2]=\lambda f(X^1)+(1-\lambda)f(X^2) \tag{35}$$

则称 f(X)为凸集 Γ 上的仿射函数。

定理 4.1 设 $f_1,f_2,\cdots,t_n$ 均为定义在 E^n 上的仿射函数,令

$$g(x)=\max\{f_i(x)\mid i=1,2,\cdots,t\},X\in E^n \tag{36}$$

则 g(x)为 E^n 的分段线性且连续的凸函数。

定义 4.2 由(36)式定义的函数称为多面凸函数。

定理 4.2 $F^*(b)$是定义在 Cone(A)上的一个多面凸函数。

定理 4.3 $F^*(\overline{0})=0$,且对任意 λ≥0,$F^*(\lambda b)=\lambda F^*(b)$,即 $F^*(b)$是正齐次函数。

定义 4.3 设凸集 $\Gamma \subseteq E^n$,f(x)为定义在 Γ 上的一个凸函数,若对任意 X∈Γ,存在向量 g,均有

$$f(X)\geqslant f(\overline{X})+q(X-\overline{X}) \tag{37}$$

则向量 q 称为 f(X)在 $\overline{X}\in\Gamma$ 的次梯度。

定理 4.4 W 是 $F^*(b)$在 $b^*\in$Cone(A)的次梯度,当且仅当 W 是 $b=b^*$时对偶规划的最优解。

定理 4.1~4.4 的证明参见文献[10],稍作变化即可获得,这里省略。

§5 预测型线性规划在投资决策中的应用

某厂有自己支配资金 120 万元,其中行政开支需要 30 万元。工资和福利基金 26 万元。当年需流动资金 130 万元,生产用 11 万元,基建用 17 万元,交利税 53 万元,生产盈利预计 47 万元。当年度有关部门提出要上的基建项目有五个所需投资规划见表 1、表 2

表 1 各项目投资与收人表

项目	A	B	C	D	E
年初所需投资(万元)	10	30	20	30	20
第一年纯收入(万元)	1.5	2	3	2.5	2.5
第一年流动资金(万元)	4	4	13	10	6.5
资金回收率(%)	30.4	45.6	13.5	24.2	22.2

各部门计划基建项目需投资规划表 (单位:万元)

项目	建设周期 (1)	投资 (2)	当前收入 (3)	工程消耗 (4)	折旧 (5)	营业收入 (6)=(3)-(4+5)	税金 $7=\frac{(6)}{2}$	纯收入 8=(6)-(7)	流动资金 9=(3)-(4)-(7)
A	1		14	8.5	25	3.0	1.5	1.5	4
	2		17.5	10	25	50	25	25	5
	3		17.5	10	25	50	25	25	5
	4		17.5	10	25	50	25	25	5
B	1		10	8	6	(4)	(2)	(2)	4
	2		40	20	6	14	7	7	13
	3		110	60	6	44	22	22	28
	4		90	40	6	44	22	22	28
	5		150	80	6	64	32	32	38
C	1	20	30	14	10	6	3	3	13
	2		20	8	10	2	1	1	11
D	1	30	23	10.5	7.5	5	25	2.5	2.5
	2		30	12.5	75	10	5	5	10.2
	3		35	14.5	75	13	65	65	14
	4		40	16.5	75	16	8	8	15.5
E	1		20	11	4	5	25	25	65
	2		20	11	4	5	25	25	65
	3		22	12	4	6	3	3	70
	4		24	13	4	7	35	35	75
	5		27	14	4	9	45	45	85

根据上述资料,运用预测型规划的方法,经济效益(投资回收年限或投资回收率)为目标函数,以投资限额为约束条件,建立如下投资决策模型:

$$\max F(x)=0.304x_1+0.456x_2+0.135x_3+0.242x_4+22.2x_5$$

$$(\text{FLP})'\quad \text{s.t. } x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant b_1(\otimes)\text{(投资约束)}$$

$$\begin{cases}-9x_1-4x_2-9x_3-5x_4-7.5x_5\leqslant-360\text{(资金回收任务约束)}\\ 24x_1+8x_2+39x_3+20x_4+19.5x_5\leqslant102.0\text{(所需流动资金)}\\ x_1\leqslant10.0\\ x_2\leqslant30.0\\ x_3\leqslant20.0\quad\text{项目限额约束}\\ x_4\leqslant30.0\\ x_5\leqslant20.0\\ x_i\geqslant0,i=1,2,\cdots,5\end{cases}$$

依据基建投资历年数值序列 $b_1(\otimes)$

1989 年　　1990 年　　1991 年　　1991 年

$b_1^{(1)}(\otimes)=(43.4, \quad 45.6, \quad 51.3, \quad 56.7)$

对 $b_1(\otimes)$ 作 AGO 生成后得 $b(1)_1(\otimes)$，再建 GM(1.1)模型，得基建投资预测模型

$$b_1(\otimes)=400.15407e^{0.108186825k}+356.755407 \tag{38}$$

用上式预测 1993 年，1994 年基建设投资额分别为 63.3、70.5，故得 $b_1(\otimes)=[43.4,70.5]$，并得(FLP)′转为对应的参数线性规划

$$(FLP)'_\alpha \quad \begin{array}{l} \max F(x)=0.304x_1+0.456x_2+0.135x_3+0.242x_4+22.2x_5 \\ \text{s.t.} \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant 43.4+37.1 \\ \left\{\begin{array}{l} -9x_1-4x_2-9x_3-5x_4-7.5x_5\leqslant -360 \\ 24x_1+8x_2+39x_3+20x_4+19.5x_5\leqslant 102.0 \\ x_1\leqslant 10.0 \\ x_2\leqslant 30.0 \\ x_3\leqslant 20.0 \\ x_4\leqslant 30.0 \\ x_5\leqslant 20.0 \\ x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,5 \end{array}\right. \end{array}$$

上式求解，当 $\alpha=19.9/37.1$ 时，求得 1993 年优化解为

X_1(A 项目)=10.00 万元　　X_2(B 项目)=30.00 万元，　　X_3(C 项目)=0.00

X_4(D 项目)=10.06 万元　　X_5(E 项目)=13.24 万元，　　$F^*_{1993}=22.09$ 万元。

平均投资回收率 22.09/63.3=0.349

当 $\alpha=1$ 时，求得 1994 年优化解为

X_1(A 项目)=10.00 万元　　X_2(B 项目)=30.00 万元，　　X_3(C 项目)=0.00

X_4(D 项目)=21.38 万元　　X_5(E 项目)=5.552 万元，　　$F^*_{1994}=23.19$ 万元。

平均投资回收率 23.19/70.5=0.349

上述表明，投资效益 1994 年不如 1993 年，平均投资回收率下降 1.85%。

参 考 文 献

[1] 邓聚龙，灰色预测与决策，华中理工大学出版社，1986 年，P275～280

[2] 邓聚龙，灰色系统基本方法，华中理工大学出版社，1987 年，P413～420

[3] J. L. Deng, Grey System, China Ocean Press(1988), P130～131

[4] 邓聚龙，多维灰色规划，华中理工大学出版社，1989 年，P173～178

[5] J. L. Deng, Introduction of Grey System Theory, The Journal of Grey System, Vol. 1 No. 1 1989, P17～18

[6] 邓聚龙，灰色系统理论教程，华中理工大学出版社，1990 年，P413～420

[7] T. Gal, Linear Parametric Programming—A brief survey, Math. Prog. Study, 1984, 21

[8] A. S. Mame, Noted on Parametric Linear Programming, RAND Report, 686, The Rand Corporation, 1953

[9] K. G. Murty, Linear Programming, Wiley, New York, 1983

[10] 张建中、许绍吉，线性规划，科学出版社，1990 年，P141～147

[11] J. P. Xu, Theory of Grey Interval's Linear Progamming and It's Application to LP's Paradox Research, The Journal of Grey System, Vol. 5 No. 3s 1993, P197～204