

# 圆管内层流脉动流动相位差分析

王 畅,高璞珍,许 超,谭思超

(哈尔滨工程大学 核安全与仿真技术国防重点学科实验室,黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:**为研究圆管内脉动流的流动特性,通过建立数学模型,对圆管内低频率层流脉动流动中流量与压差间的相位差进行了分析。研究表明:低频率流量脉动未引起流体的速度径向分布变化,压差与流量之间存在相位差,相位差只与通道直径、流体黏性及脉动频率相关,脉动频率及流道半径越大,相位差越大,加速度是导致相位差出现的主要原因。

**关键词:**脉动流;层流;圆管;相位差

中图分类号:TK124

文献标志码:A

文章编号:1000-6931(2013)01-0054-04

doi:10.7538/yzk.2013.47.01.0054

## Phase Lag in Laminar Pulsating Flow in Circular Pipe

WANG Chang, GAO Pu-zhen, XU Chao, TAN Si-chao

(National Defense Key Subject Laboratory for Nuclear Safety and Simulation Technology,  
Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** To study the flow characteristics of pulsating single-phase laminar flow in circular pipes, a mathematical model was established to study the phase lag which is exist between the pressure drop and flow rate. The results show that the low frequency flow rate pulsation does not arouse the distortion of velocity distribution; however, there is a phase lag between the pressure drop and flow rate, and the phase lag is related to the radius of the pipe, fluid viscosity and the pulsating frequency. The bigger the pulsating frequency or the radius is, the larger the phases lag is. In addition, the phenomena were discussed based on the mathematical model.

**Key words:** pulsating flow; laminar flow; circular pipe; phase lag

船舶在海洋中航行时由于波浪的影响而处于摇摆、起伏等状态,处于自然循环状态的反应堆冷却剂系统由于受到附加惯性力的影响而产生周期性的脉动流,破坏系统的稳定性<sup>[1-3]</sup>。

近年来国内外研究人员对脉动流的热工水

力特性进行了大量的研究<sup>[4-7]</sup>,但到目前为止,对压差与流量之间的相位差形成机理及影响因素的相关研究并不充分。

本文通过建立数学模型,对圆管内低频率脉动流动条件下流量与压差之间的相位差进行理论分析。

## 1 数学模型

如图1所示,假设半径为 $R$ 的竖直圆管内充满黏性不可压缩流体,作用在 $z$ 向的压力梯度随时间 $t$ 周期性的脉动,即:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = K_0 + K_1 \sin nt \quad (1)$$

式中: $n$ 为脉动频率,rad/s; $K_0$ 为时均压力梯度,Pa/m; $K_1$ 为压力梯度脉动幅度,Pa/m; $p$ 为压力,Pa; $z$ 为轴向距离,m; $t$ 为时间,s。

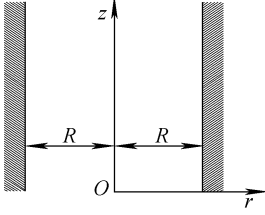


图1 坐标示意图

Fig. 1 Schematic of coordinates in circular pipes

在柱坐标系建立 N-S 方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

式中: $\rho$ 为流体密度,kg/m<sup>3</sup>; $\nu$ 为流体运动黏性系数,m<sup>2</sup>/s; $u$ 为流体速度,m/s; $r$ 为流体质点到管道轴心的距离,m。

在脉动流动中,压力梯度可假定由稳定 Poiseuille 流动压力梯度及时均值为 0 的振荡流压力梯度组成<sup>[8]</sup>:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{\partial p_t}{\partial z} \quad (3)$$

式中: $\partial p_s/\partial z$ 、 $\partial p_t/\partial z$ 分别为稳定项及振荡项压力梯度,Pa/m。

边界条件为: $R=0, \partial u/\partial r=0; r=R, u=0$ 。

将式(3)代入式(2),并将速度分解为稳定项及振荡项速度:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_t}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{\partial p_t}{\partial z} \right) + \\ & \nu \left[ \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

通过变量分离法,式(4)可分解为:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \quad (6)$$

解式(5)可得:

$$u_s(r) = \frac{K_0}{4\nu} (R^2 - r^2) \quad (7)$$

为便于计算,将压力梯度用复数形式表示:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial z} = \Re \left( i \frac{K_1}{\rho} e^{int} \right) \quad (8)$$

则速度函数的形式可假定为:

$$u_t = \Re [-if(r)e^{int}] \quad (9)$$

因此,将式(8)、(9)代入式(6),得:

$$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) - \frac{in}{\nu}f(r) = \frac{K_1\rho}{\nu} \quad (10)$$

式(6)的解<sup>[9]</sup>可表示为:

$$u_t(r, t) = \Re \left\{ i \frac{K_1}{\rho\nu} \left[ 1 - \frac{J_0(r\sqrt{-in/\nu})}{J_0(R\sqrt{-in/\nu})} \right] e^{int} \right\} \quad (11)$$

式中: $J_0$ 为第1类0阶 Bessel 函数; $\Re$ 表示取实部; $i$ 为虚数; $R$ 为管道半径,m。

当 $0 < x < 1$ 时, $J_0(x) \approx 1 - x^2/4$ 。因此,在

$0 < R\sqrt{n/\nu} < 1$  范围内,式(11)可简化为:

$$u_t(r, t) = \frac{K_1/\mu \cdot (R^2 - r^2)}{16 + (nR^2/\nu)^2} \left( 4\sin nt - \frac{nR^2}{\nu} \cos nt \right) \quad (12)$$

$$u_t(r, t) = \frac{K_1(R^2 - r^2)}{\sqrt{16 + (nR^2/\nu)^2} \mu} \sin(nt - \Delta\phi) \quad (13)$$

式中, $\mu$ 为动力黏度。

由式(13)可见,在当前频率范围内,脉动流的径向速度分布仍为抛物线形式,并未出现“环状效应”,但在速度与压力梯度之间存在相位差 $\Delta\phi$ 。

对瞬态振荡项速度 $u_t(r, t)$ 沿整个通道截面积分,可得任意时刻的振荡项截面平均速度:

$$\bar{u}_t(t) = \frac{K_1 R^2}{2\sqrt{16 + (nR^2/\nu)^2} \mu} \sin(nt - \Delta\phi) \quad (14)$$

$$\Delta\phi = \arctan(nR^2/4\nu) \quad (15)$$

假定流体为 20 °C 的水,其黏性为 $1.011 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s。相位差随脉动频率及管道尺寸的变化规律如图2所示。随着脉动频率及管道直径增大,相位差逐渐增大并趋近于 $\pi/2$ 。

## 2 受力分析

受力分析如图3所示,对圆管内脉动流动建立动量守恒方程:

$$\begin{aligned} \pi r^2 p - \pi r^2 \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \\ (2\pi r dz) \tau_w = \rho \pi r^2 dz \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (16) \end{aligned}$$

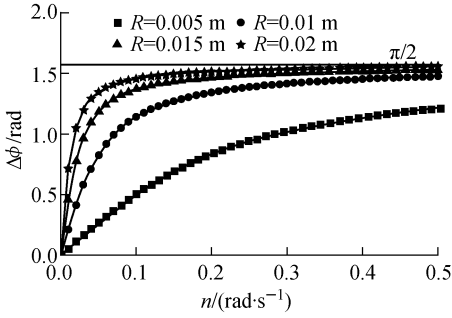


图2 基于变量分离法的相位差变化规律  
Fig. 2 Analysis of phase lag  
based on separation of variables method

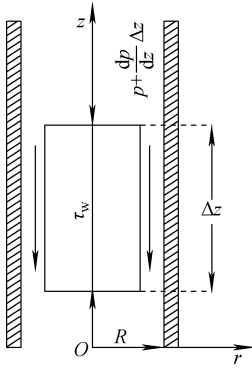


图3 受力分析  
Fig. 3 Schematic of force analysis

对式(16)化简,得:

$$r\rho \frac{du}{dt} + r \frac{\partial p}{\partial z} + 2\tau_w = 0 \quad (17)$$

$$\tau_w = -\mu \frac{du_r}{dr} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17),得:

$$r\rho \frac{du}{dt} + r \frac{\partial p}{\partial z} - 2\mu \frac{du_r}{dr} = 0 \quad (19)$$

$$du_r = \frac{r}{2\mu} \left( \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dr \quad (20)$$

对式(20)积分,得:

$$u_r = \frac{r^2}{4\mu} \left( \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) + C \quad (21)$$

由于当  $r=R$  时,  $u_{r=R}=0$ , 因此有:

$$C = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (22)$$

因此,速度径向分布为:

$$u_r = \frac{r^2 - R^2}{4\mu} \left( \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (23)$$

对径向速度在整个流道截面积分,可得到

截面平均速度为:

$$u = -\frac{R^2}{8\mu} \left( \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (24)$$

由于  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{z}$ , 将其代入式(24)得:

$$\frac{\Delta p}{z} = \frac{8\mu u}{R^2} + \rho \frac{du}{dt} \quad (25)$$

假定速度的变化规律为  $u(t) = A \sin nt + B$ , 将其代入式(25)得:

$$\Delta p/z = \sqrt{M^2 + N^2} \sin(nt + \Delta\phi) + C \quad (26)$$

$$\Delta\phi = \arctan(nR^2/8\mu) \quad (27)$$

式中:  $M=8\mu A/R^2$ ;  $N=\rho nA$ ;  $C=8\mu B/R^2$ ;  $A, B$  为常数。

假定流体为 20 °C 的水,  $\Delta\phi$  随脉动频率及管道半径的变化如图 4 所示, 与图 2 中的现象一致, 相位差随脉动频率及管道直径增大而增大, 且逐渐趋近于  $\pi/2$ 。

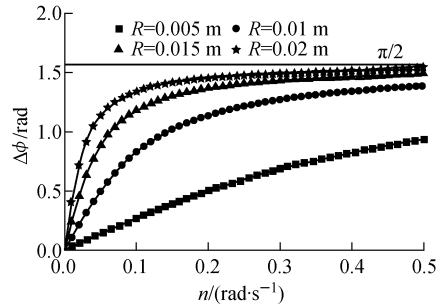


图4 基于受力分析模型的相位差变化  
Fig. 4 Phase lag based on force analysis model

由式(15)、(27)可知,文献[7,9]中的相位差并非由于测量仪表本身的响应时间差造成。此外,流体运动黏性系数越大,相位差越小,当驱动压头相同时,黏性越大,壁面切应力也越大,导致流体速度减小,相应的加速度也越小,因此相位差也越小。

Qi 等<sup>[6]</sup>认为由于脉动导致速度的径向分布发生改变,尤其是在近壁区域出现倒流现象是导致相位差出现的主要原因。然而在本文中的脉动频率范围内,由式(7)、(13)及(23)可见,脉动流的速度径向分布仍为抛物线形式,因此,相位差不是由于流量脉动导致速度径向分布发生变化引起的。

由式(25)可知,脉动流的压降由摩擦压降及加速度引起的加速压降组成。由于低频率脉

动流动的速度径向分布仍为抛物线形式,联立式(7)、(13)、(18)及(25)可得到摩擦压降及加速压降表达式为:

$$\tau_w = \frac{K_0 R}{2} + 2KR\mu \sin(nt - \Delta\phi) \quad (28)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\rho n KR^2}{2} \cos(nt - \Delta\phi) \quad (29)$$

由式(28)、(29)可知,壁面切应力与速度始终同相脉动,加速压降与速度呈反相脉动。因此,壁面切应力引起的摩擦压降与总压降之间的相位差等同于速度与压降之间的相位差。由

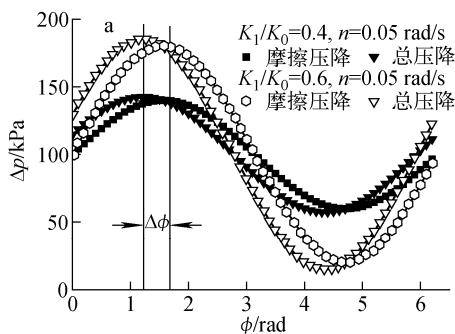


图 5a 可见,在相同脉动频率条件下,当脉动振幅增加时,壁面切应力、加速压降同时发生改变,在两者的综合作用下,相位差不发生变化,由图 5b 可见,以温度为 20 °C 的水为工质、 $R=0.01$  m 的管道内脉动流为例,在相同脉动振幅条件下,当脉动频率增加时,壁面切应力的脉动幅值并不发生变化,加速压降的脉动幅度随之增大,导致相位差随脉动频率发生改变。且随着脉动频率增大,加速压降在总压降中所占比例也越来越大,这也是相位差最终趋近于  $\pi/2$  的原因。

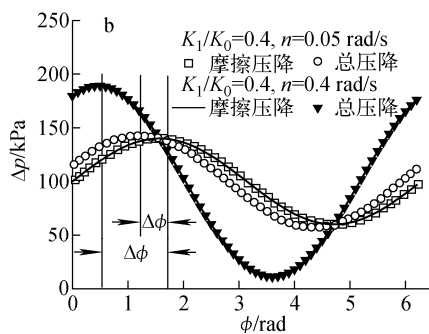


图 5 脉动振幅(a)及频率(b)对相位差的影响

Fig. 5 Effect of pulsating amplitude (a) and frequency (b) on phase lag

### 3 结论

1) 在低频层流脉动流动中,压差与流量之间存在相位差;

2) 相位差随脉动频率及管道半径增大而增大,随流体黏性增大而减小;

3) 速度变化引起的加速度导致出现相位差。

### 参考文献:

- [1] YAN B H, YU L, YANG Y H. Effects of rolling on laminar frictional resistance in tubes[J]. *Ann Nucl Energy*, 2010, 37(3): 295-301.
- [2] TAN Sichao, SU Guanghui, GAO Puzhen. Experimental and theoretical study on single-phase natural circulation flow and heat transfer under rolling motion condition [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2009, 29(14-15): 3 160-3 168.
- [3] PENDYALA R, JAYANTI S, BALAKRISHNAN A R. Flow and pressure drop fluctuations in a vertical tube subject to low frequency oscillations[J]. *Nucl Eng Des*, 2008, 238(1): 178-187.
- [4] OHMI M, IGUCHI M, USUI T. Flow pattern

and frictional losses in pulsating pipe flow-part 5 wall shear stress and flow pattern in a laminar flow[J]. *Bull JSME*, 1981, 187(24): 75-81.

- [5] RICHARDSON E G, TYLER E. The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established [J]. *Proc Phys Soc*, 1929, 231(42): 1-15.
- [6] QI X G, SCOTT D M, WILSON D I. Modeling laminar pulsed flow in rectangular microchannels [J]. *Chem Eng Sci*, 2007, 63(10): 2 682-2 689.
- [7] 王畅,高璞珍. 圆管内流量波动流动特性分析 [J]. *核动力工程*, 2011, 32(3): 97-101.
- WANG Chang, GAO Puzhen. Analysis of flow characteristics under flow fluctuation condition in circular pipe[J]. *Nucl Power Eng*, 2011, 32(3): 97-101(in Chinese).
- [8] MOSCHANDREOU T, ZAMIR M. Heat transfer in a tube with pulsating flow and constant heat flux[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1997, 40(10): 2 461-2 466.
- [9] SCHLICHTING H, GERSTEN K. Boundary-layer theory[M]. [S.l.]: Springer, 1999.