

# 垂直发射导弹 Terminal 滑模姿态 控制系统设计\*

李大鹏, 胡云安, 何金新

(海军航空工程学院, 山东烟台 264001)

**摘要:**为了降低垂直发射导弹转弯段姿态方程的复杂程度,运用精确反馈线性化方法,将姿态通道线性化解耦成三个单输入单输出系统。而且垂直发射导弹的转弯需要快速完成,因而对每个通道分别设计全局快速 Terminal 变结构控制器,该控制器能够保证系统在要求的时间内收敛至平衡点,即能够实现快速转弯。通过数字仿真验证了方法的有效性。

**关键词:**垂直发射导弹;快速转弯姿态控制;反馈线性化;滑模变结构控制

中图分类号:TJ765 文献标志码:A

## The Design of Terminal Sliding Control System for Vertical Launching Missile

LI Dapeng, HU Yunan, HE Jinxin

(1 Naval Aeronautical and Astronautical University, Shandong Yantai 264001, China)

**Abstract:**In order to decrease design complexity of attitude control system of vertical launching missile, the attitude channel was decoupled into three SISO linear systems by accurate feedback linearization. Then, the fast terminal sliding mode controller was designed for each attitude channel to ensure the turning speed. This controller can make the missile complete turning in anticipant time, and numerical simulations prove that it is effective.

**Keywords:**vertical launching missile; fast turning attitude control; feedback linearization; sliding mode control

### 0 引言

垂直发射可以最大限度地增加贮弹量,提高导弹快速反应能力,可以对目标实施全方位攻击,这满足了现代战争中快速、全方位、超低空、多目标等作战要求的特点。导弹垂直发射后,需要控制导弹姿态实现快速调转。然而,垂直发射导弹的姿态运动方程是非线性的,而且,各通道之间存在着强烈的耦合作用。在这种条件下控制导弹是非常复杂的。文中基于反馈线性化思想和全局快速 Terminal 滑模变结构控制理论,首先将垂直发射导弹姿态运动方程进行线性化,同时实现三通道的解耦,然后对各控制通道独立设计全局快速 Terminal 滑模变结构控制器。此种设计方法有如下优点:首先对原非线性模型进行线性化时得到的线性模型是“精确的”,

没有忽略任何具体信息;其次,快速 Terminal 滑模变结构控制可以使系统在有限的时间内收敛至平衡点,系统的动态性能优于普通滑模变结构控制中的性能<sup>[1-2]</sup>。全局快速 Terminal 滑模控制对系统不确定性和干扰具有很好的鲁棒性,通过合理的选取参数,可使系统状态到达滑模面足够小的邻域内,沿滑模面收敛到平衡状态控制精度要高于同等条件下普通滑模变结构控制的控制精度<sup>[3-4]</sup>。

### 1 垂直发射导弹姿态运动方程

在弹体坐标系和地面发射坐标系中建立垂直发射导弹姿态运动的数学模型。在垂直发射快速转弯段,导弹速度较低,空气舵的操纵效率较低。姿态调转所需的力和力矩主要靠燃气舵提供。文中建立模型中,忽略了空气舵的作用。

\* 收稿日期:2008-09-22

基金项目:国家自然科学基金(60674090)资助

作者简介:李大鹏(1983-),男,山东高密人,硕士研究生,研究方向:导弹制导与控制。

实际条件下,这个时间段内空气舵的操纵效率不到燃气舵操纵效率的十分之一,因而,这种假设是合理的。

描述垂直发射导弹的姿态运动方程如下<sup>[5]</sup>:

$$\dot{\gamma} = \omega_x + \tan \psi (\omega_y \cos \gamma + \omega_z \sin \gamma)$$

$$\dot{\psi} = \omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{\cos \psi} (\omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma)$$

$$\dot{\omega}_x = \frac{L_x}{J_x} \omega_x + \frac{L_\delta}{J_x} \delta_x$$

$$\dot{\omega}_y = \frac{M_y}{J_y} \omega_y + \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_x \omega_z + \frac{M_\delta}{J_y} \delta_y$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{N_z}{J_z} \omega_z + \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x \omega_y + \frac{N_\delta}{J_z} \delta_z$$

式中: $\gamma, \psi, \vartheta$  为滚动角、偏航角和俯仰角; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  为在弹体坐标系上的角速度; $J_x, J_y, J_z$  为在弹体坐标系 3 轴上的转动惯量; $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  为燃气舵滚转舵偏角、偏航舵偏角和俯仰舵偏角; $L_x, M_y, N_z$  为在弹体坐标系 3 轴上的相应气动参数; $L_\delta, M_\delta, N_\delta$  为在弹体坐标系 3 轴上相应的操纵系数。

通过分析上述模型可知,垂直发射导弹转弯段的姿态运动方程是非线性的,这种非线性是不能忽略的,而且三通道间存在着强烈的耦合作用。

## 2 状态空间描述

选取系统的状态和控制量如下:

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] = [\gamma, \psi, \vartheta, \omega_x, \omega_y, \omega_z]$$

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, u_3] = [\delta_x, \delta_y, \delta_z]$$

取 3 个姿态角为垂直发射导弹的输出,并令:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{L_x}{J_x} \\ T_2 = \frac{L_y}{J_y} \\ T_3 = \frac{L_z}{J_z} \end{cases} \quad \begin{cases} M_1 = \frac{L_\delta}{J_x} \\ M_2 = \frac{M_\delta}{J_y} \\ M_3 = \frac{N_\delta}{J_z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{J_z - J_x}{J_y} \\ \lambda_3 = \frac{J_x - J_y}{J_z} \end{cases}$$

则系统的状态空间可以描述为:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

其中:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_4 + \tan x_3 (x_5 \cos x_1 + x_6 \sin x_1) \\ x_5 \cos x_1 - x_6 \sin x_1 \\ \frac{1}{\cos x_2} (x_5 \sin x_1 + x_6 \cos x_1) \\ T_1 x_4 \\ T_2 x_5 + \lambda_2 x_6 x_4 \\ T_3 x_6 + \lambda_3 x_4 x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = (\mathbf{I}_{3 \times 3}, \mathbf{0}_{3 \times 3})$$

## 3 垂直发射导弹姿态运动的反馈线性化及通道间的解耦

根据文献[6],对垂直发射导弹姿态运动方程进行精确线性化。作状态变换如下:

$$z_1^0 = x_1$$

$$z_1^1 = x_4 + x_5 \cos x_1 \tan x_3 + x_6 \sin x_1 \tan x_3$$

$$z_2^0 = x_2$$

$$z_2^1 = x_5 \cos x_1 - x_6 \sin x_1$$

$$z_3^0 = x_3$$

$$z_3^1 = \frac{1}{\cos x_2} (x_6 \cos x_1 + x_5 \sin x_1)$$

并设  $\mathbf{z} = (z_1^0, z_1^1, z_2^0, z_2^1, z_3^0, z_3^1)$ 。

由计算可知,当  $\psi < \frac{\pi}{2}$  时,该变换是可逆的。

并且所作的非线性状态变换  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$  在整个定义域内是微分同胚,是全局有意义的。

通过精确反馈线性化,可以得到系统的伪线性状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{z}_i^0 = z_i^1 \\ \dot{z}_i^1 = v_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

输出方程为:

$$y_i = z_i^0 \quad (2)$$

令:  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ , 且  $\mathbf{v} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{u}$

并设  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3), \mathbf{Q} = (Q_1^T, Q_2^T, Q_3^T)^T$ , 则对式(1)进行计算可得到  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ 。

其中:

$$P_1 = (x_6 \cos x_1 - x_5 \sin x_1)(x_4 + x_6 \sin x_1 \tan x_3 + x_5 \cos x_1 \tan x_3) \tan x_3 + (x_6 \sin x_1 + x_5 \cos x_1)(x_5 \sin x_1 + x_6 \cos x_1) \sec x_2 \sec^2 x_3 + T_1 x_4 + (\lambda_2 x_4 x_6 + T_2 x_5) \tan x_3 \cos x_1 + (\lambda_3 x_4 x_5 + T_3 x_6) \tan x_3 \sin x_1$$

$$P_2 = (T_2 x_5 + \lambda_2 x_4 x_6) \cos x_1 - (T_3 x_6 + \lambda_3 x_4 x_5) \cdot$$

$$\sin x_1 - (x_5 \sin x_1 + x_6 \cos x_1)(x_5 \cos x_1 \cdot \tan x_3 + x_6 \sin x_1 \tan x_3 + x_4)$$

$$P_3 = [x_4 + \tan x_3 (x_6 \sin x_1 + x_5 \cos x_1) + \tan x_2 (x_6 \cos x_1 + x_5 \sin x_1)] + \cos x_1 \sec x_2 (\lambda_3 x_4 x_5 + T_3 x_6) + \sin x_1 \sec x_2 (\lambda_2 x_4 x_6 + T_2 x_5)$$

$$Q_1 = (M_1, M_2 \cos x_1 \tan x_3, M_3 \sin x_1 \tan x_3)$$

$$Q_2 = (0, M_2 \cos x_1, -M_3 \sin x_1)$$

$$Q_3 = (0, M_2 \sin x_1 \sec x_2, M_3 \cos x_1 \sec x_2)$$

式(1)和式(2)即为经过状态变换和输入变换处理的垂直发射导弹姿态控制系统的状态空间描述,可见系统已被解耦成3个独立的控制通道,每个通道是临界稳定的线性能控规范型。

## 4 Terminal 滑模姿态控制器设计

上面已经把垂直发射导弹转弯段的3个通道进行了线性化解耦,所以可用线性系统的 Terminal 滑模变结构控制理论对每个通道的控制器进行独立设计。

通过反馈线性化解耦得到的3个独立的子系统,每个系统都是单输入单输出且状态变量为相变量的线性系统,此时滑模运动的不变性条件自动成立。通常,变结构控制器设计包括两个步骤:切换面(滑动面)的设计和变结构控制的设计。下面以第  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 个通道为例进行设计<sup>[2]</sup>。第  $i$  个通道的状态方程如式(1)所示。

选取全局快速 Terminal 滑动模态为:

$$s_{i1} = \dot{s}_{i0} + \alpha_{i0} s_{i0} + \beta_{i0} s_{i0}^{q_{i0}/p_{i0}} = 0 \quad (3)$$

其中,  $\alpha_{i0}, \beta_{i0} > 0$ , 且  $q_{i0} < p_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $s_0 = r_i - z_i^0$ ,  $r_i$  为第  $i$  个通道的姿态角跟踪指令。

设计 Terminal 滑模姿态控制器为:

$$v_i(t) = \alpha_{i0} \dot{s}_{i0} + \beta_{i0} \frac{d}{dt} s_{i0}^{q_{i0}/p_{i0}} + k_i s_{i1} + m_i s_{i1}^{q_i/p_i} \quad (4)$$

### 4.1 稳定性分析

定义 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} s_{i1}^2 \quad (5)$$

则可知, Lyapunov 函数  $V$  对时间的导数为:

$$\dot{V} = s_{i1} \dot{s}_{i1} = -k_i s_{i1}^2 - m_i s_{i1}^{(q_i+p_i)/p_i} \quad (6)$$

因为  $p_{i1} + q_{i1}$  为偶数, 所以  $\dot{V} \leq 0$ , 系统是稳

定的。

### 4.2 滑模到达时间分析

由式(3)可以得出:

$$\dot{s}_{i1} = -k_i s_{i1} - m_i s_{i1}^{q_i/p_i} \quad (7)$$

解微分方程(7)可得到达滑模面  $s_{i1} = 0$  的时间为  $t_{i1}$ :

$$t_{i1} = \frac{p_{i1}}{k_i(p_{i1} - q_{i1})} \ln \frac{k_i [z_i^0(0)]^{(p_{i1}-q_{i1})/p_{i1}} + m_i}{m_i} \quad (8)$$

其中,  $k_i, m_i > 0$  和  $q_{i1}, p_{i1}$  ( $q_{i1} < p_{i1}$ ) ( $i = 1, 2, 3$ ) 为正奇数。

求出了  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 后, 由  $u = Q^{-1}(v - P)$  便可以计算出  $u$ , 这个  $u$  直接控制垂直发射导弹的燃气舵片。

## 5 数值仿真

根据垂直发射导弹数据进行仿真, 其中:

$M_1 = 20, M_2 = 10, M_3 = 10, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = 5, T_1 = -0.35, T_2 = 0.33, T_3 = 0.33$ ; 姿态角初值为  $\vartheta = \frac{\pi}{2}, \psi = 0, \gamma = 0$ , 即垂直状态; 姿态角终值为

$\vartheta = 0, \psi = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{6}$ ; 各气动参数拉偏 20% 作为干扰输入, 根据式(8), 可以通过调整各参数的值, 控制导弹在指定的时间内完成转弯, 文中假定导弹在 1.2 s 内完成转弯, 仿真图如图 1 所示。

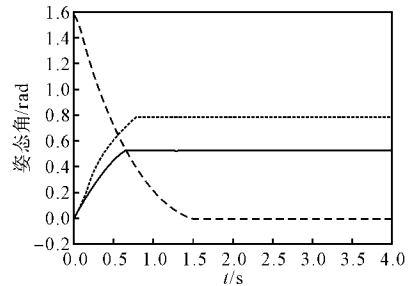


图 1 姿态角变化曲线

由仿真图可看出, 文中设计的全局快速 Terminal 滑模变结构控制器, 能够控制垂直发射导弹在发射初段实现快速转向指定的方位, 并且对外加干扰具有很强的鲁棒性。在仿真中, 实际完成转弯的时间稍大于理论上的收敛时间, 这是由反馈线性化过程中的延迟以及外加扰动造成的。

(下转第 16 页)

在 $(-1 \times 10^{-15}, 1 \times 10^{-15})$ 无增长现象,但是四元数模型 3 个角的误差幅度均有增长趋势。说明双欧模型优于四元数模型。

### 5 结 论

捷联式惯导系统中采用的是“数学平台”,姿态解算精度问题一直是研究的重点。文中从理论上分析了四元数模型由于条件数问题和不能在实际应用时保证四元数时时刻刻都是单位化四元数而导致出现误差较大并使误差有增大趋势,这是四元数微分方程数学模型的缺陷;同时,文中提供了用双欧模型来解决这些问题,并做了圆锥运动下相关的数字仿真。从仿真结果可以看出四阶经典龙格库塔方法解算双欧模型的优

越性,使解算结果充分逼近真值,而且误差幅度稳定没有增长趋势。所以在角速率输入下,采用传统四阶经典龙格库塔式解算双欧模型是一种十分有效而且精度较高的算法。

参考文献:

[1] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2006.  
 [2] 郑慧姚,陈绍林,莫忠息. 数值计算方法[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002.  
 [3] 李庆扬,关治,白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京:清华大学出版社,2000.  
 [4] 张春慧,吴简彤,何昆鹏. 四阶龙格-库塔法在捷联惯导系统姿态解算中的应用[J]. 应用科技,2005, 32(6):37-39.

(上接第 11 页)

### 6 结 论

通过对垂直发射导弹姿态运动方程进行非线性变换,使得复杂的非线性控制问题变为了线性控制问题,并且实现了 3 个姿态控制通道间的解耦。设计的全局快速 Terminal 滑模变结构控制器能够有效地克服系统不确定性影响,并能够在有限时间内到达平衡状态,仿真验证了该方法的有效性。下一步的主要工作是研究考虑控制器机构受限制情况下的全局快速 Terminal 滑模姿态控制器设计。

参考文献:

[1] Park K B, Tsuiji T. Terminal sliding mode of second-order nonlinear uncertain systems[J]. Interna-

tional Journal of Robust and Nonlinear Control, 1999, 9(11):769-780.

[2] 贺昱曜,闫茂德. 非线性控制理论及应用[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2007:177-181.  
 [3] Yuri B Shtessel, Ilya A Shkolnikov, Arie Levant. Smooth second-order sliding modes: Missile guidance application[J]. Automatica, 2007, 43 (8): 1470-1476.  
 [4] Mark D J Brown. Disturbance cancellation techniques for MIMO smooth sliding mode control[R]. AIAA 2001-4167.  
 [5] 马金铎,周绍磊,程继红. 导弹控制系统原理[M]. 北京:航空工业出版社,1996:17-20  
 [6] 韩艳铎,周凤岐,周军. 基于反馈线性化和变结构控制的飞行器姿态控制系统设计[J]. 宇航学报, 2004,25(6):638-641.