

导弹高度控制变结构设计中 Lyapunov 方法应用*

张元文, 郭振云, 鲁中华

(国防科学技术大学航天与材料工程学院, 长沙 410073)

摘要:基于 Lyapunov 方法的变结构系统中运动分为正常运动及滑模运动。正常运动不具有对参数扰动及外界干扰的鲁棒性, 故期望其运动稳定且快速地趋近滑模面, 而这主要受 Lyapunov 矩阵 Q 及变结构控制参数 k 的影响; 滑模运动具有鲁棒性, 而滑模面的大小及滑动性能受制于 Q 。为了达到期望的性能指标, 需要选择适当的 Q 和 k 。通过理论推导, 分析了 Q 和 k 对运动性能的影响, 得出了参数间的具体耦合作用, 建立了相应的优化模型。通过某巡航导弹高度控制仿真, 证明了按照理论分析所采取的优化能满足各项设计指标, 且抖振得到较好削弱; 通过弹体参数扰动仿真分析证明了变结构控制的鲁棒性优势。

关键词: Lyapunov 方法; 滑模变结构控制; 优化; 鲁棒性; 抖振

中图分类号: TJ765.2 文献标志码: A

Application of Lyapunov Method in VSC for Missile Height Control

ZHANG Yuanwen, GUO Zhenyun, LU Zhonghua

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: As for the Lyapunov based variable structure control system, the state movement is divided into two phases: normal phase and sliding mode. The normal phase has no robustness to missile parameter perturbation and outer disturbance, so the requirement for normal phase is to move steadily and quickly. Fortunately, by adjusting the Lyapunov matrix Q and parameter k , this goal can be achieved. The sliding phase has robustness, and the size of sliding mode surface and the sliding performance can only be affected by Q . In conclusion, the Q and k must be adjusted to achieve the expected performance. By theoretical analysis, the affection of Q and k to performance was got, the coupling action of parameters was analyzed and the optimization model was built. The simulation of cruise missile height control proves that the optimization method can satisfy each design requirement, and the vibration is preferably weakened. The simulation of missile parameter disturbance proves the robustness of variable structure control.

Keywords: Lyapunov method; variable structure control of sliding mode; optimize; robustness; vibration

0 引言

反舰导弹的掠海巡航高度在目前海战的进攻和防御中是一项重要的战术技术指标。然而导弹在掠海飞行过程中会受到各种干扰, 如垂直阵风、海浪等通过高度表信号对飞行高度测量的影响。利用传统的 PID 控制要抑制上述干扰影响是十分困难的, 而应用变结构控制不失为解决问题的有效途径。

Suolin Duan 等^[1]将自适应滑模变结构控制 (SMVSC) 应用于某型机器人的操纵器, 在传统

变结构的基础上自适应加入连续的控制律以消除抖振。陈洁等^[2]采用输出重定义技术, 设计了某型导弹高度控制积分型滑模控制律。李乙杰等^[3]基于李亚普诺夫稳定性理论设计电磁轴承变结构滑模控制器, 用饱和函数取代常规变结构控制的符号函数。GU Wen-jin 等^[4]研究了切换线斜率对系统性能的影响, 对误差自适应滑模区的存在条件和可达条件进行了探讨, 根据这些条件提出了一种能实现误差自适应变结构的切换函数。Kyung-Soo Kim 等提出选择合适的 Lya-

* 收稿日期: 2008-07-01

作者简介: 张元文(1983-), 男, 贵州安顺人, 硕士研究生, 研究方向: 飞行器制导控制。

Lyapunov 矩阵以设计满足性能要求的滑模面,并通过某不确定系统仿真加以验证^[5]。

文中基于 Lyapunov 稳定性理论对某型导弹高度控制进行变结构设计,得出了切换函数和控制律。分析了 Lyapunov 方法中 Q, k 对系统运动的影响,为基于 Lyapunov 方法的变结构设计参数优化提供了依据。讨论了抖振的消除策略,解决了直接基于 Lyapunov 方法的趋近运动性能较差的问题。

1 基于 Lyapunov 的变结构控制理论

变结构控制中应用李雅普诺夫方法主要基于以下几个定理。

定理 1:若 $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, 则称函数 $V(x)$ 为径向无限大。

定理 2(李亚普诺夫主稳定性定理):如果存在正定函数 $V(x)$, 使其沿线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + bu$ 之解的导数 $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} (Ax + bu) < 0$ ($x \neq 0$), 则称线性系统的原点是渐近稳定的, 若 $V(x)$ 还是径向无限大, 则原点 $x = 0$ 是全局渐近稳定。

定理 3(李亚普诺夫定理):对于线性时不变系统 $\dot{x} = Ax + bu$ 而言, 若系统阵 A 稳定, 也即 A 的特征根实部均为负, 则对任意给定的正定阵 Q , 满足式(1)且有唯一的正定解阵 V 。

$$A^T V + VA = -Q \quad (1)$$

为了得出具有一般化的结论, 这里假设研究对象为单输入线性时不变:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (2)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{n \times n}, u \in \mathbf{R}^1, b \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ 。

假设 (A, b) 可控且 A 稳定。若不可控, 将系统分解成能控子系统及不能控子系统, 分析不能控部分的稳定性, 如稳定则可以单独控制能控部分。如果 A 不稳定, 可以通过引入状态反馈使其稳定。则基于 Lyapunov 方法的切换函数及控制律^[6]:

$$S = b^T Vx \quad (3)$$

$$u = -k \operatorname{sgn} b^T Vx, k > 0$$

式(3)选取的切换面及控制律保证了系统(2)的全局渐近稳定性, 简单证明如下。

选择李亚普诺夫函数 $v = x^T Vx$, 其中 V 为一正定阵。判断 \dot{V} 沿式(2)之解的导数:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= x^T V(Ax + bu) + (Ax + bu)^T Vx = \\ & x^T (VA + A^T V) + 2x^T Vbu \end{aligned} \quad (4)$$

根据定理 3 可知, 任给定一正定阵 Q , 存在唯一正定解 V 使得 $A^T V + VA = -Q$ 。将变结构控制律代入式(4), 可得:

$$\dot{v} = -x^T Qx - 2kS \operatorname{sgn} S, S = b^T Vx \quad (5)$$

从上式可以看出, 当控制 u 满足式(3)时, v 正定而 \dot{v} 负定, 又由于 $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v(x) = x^T Vx = \infty$, 即 $v(x)$ 是径向无穷大的, 则可知系统(2)满足全局渐近稳定。

在切换面上存在系统(2)的滑动模态。对 $S(x)$ 求其沿式(2)及式(3)即:

$$\dot{x} = Ax - bk \operatorname{sgn} b^T Vx \quad (6)$$

之解的导数:

$$\dot{S} = b^T VAx - kb^T Vb \operatorname{sgn} b^T Vx \quad (7)$$

由于 $k > 0, V$ 正定, 则系数 $kb^T Vb > 0$ 。当 x 比较小时, 有:

$$\begin{aligned} S\dot{S} &\approx -S \cdot kb^T Vb \operatorname{sgn} b^T Vx = \\ & -kb^T Vb \cdot \operatorname{sgn} S < 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由上式可知至少在原点附近到达条件成立, 切换面 S 上原点附近区域存在滑动模态区。且依据上述分析可知系统滑动模态吸引区由 S 上、下二超面间的区域构成, 此二超面的方程由式(9)确定。

$$b^T VAx = \pm kb^T Vb \quad (9)$$

2 系统性能理论分析

由以上分析可知, 假设系统(2)初始状态为 x_0 , 则初始 Lyapunov 函数值为 $v_0 = x_0^T Vx_0$, 而 v_0 随时间变化逐渐趋向于原点状态 $x_f = 0$, 变化率如式(5)所示。设计切换函数以及控制律时, Q, k 为可调节, 故可以优化其使得系统性能达到最优。

2.1 全程运动时间分析

从运动时间最优来说, 调节 Q, k 使得 \dot{v} 最小, 则运动全程时间最短。为分析方便, 改变式(5)的形式:

$$\dot{v} = -x^T Qx - 2k|S|, S = b^T Vx \quad (10)$$

分析上式可知, 要使 \dot{v} 达到尽量小, $Q, k, |S|$ 应尽量大。然而在实际工程中控制量有限制, 故控制律 $u = -k \operatorname{sgn} b^T Vx, k > 0$ 的系数 k 有限制。另外, 切换函数中的正定阵 V 由 $A^T V + VA = -Q$ 计算而得, 要使 $|S| = |b^T Vx|$ 较大, 对 Q

有相应限制,也即是 Q 和 V 耦合的。基于以上分析,采用优化得出满足条件的 Q, k 最优值。建立优化模型:

$$\text{目标函数: } \dot{v} = -x^T Q x - 2k|S|, S = b^T V x$$

$$\text{限制条件: } u = -k \text{sgn} b^T V x < u_r, k > 0$$

$$A^T V + V A = -Q$$

优化参数: Q, k

2.2 滑模运动特性分析

基于 Lyapunov 方法的变结构设计得出的滑模运动满足:

$$S = b^T V x = 0 \tag{11}$$

滑模变结构控制设计中,所依据的模型一般是已经转化为相变量表示的模型,即:

$$x = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad \dots]^T \tag{12}$$

为便于分析,假设所设计的对象模型为二阶,即 $x = [x_1 \quad \dot{x}_1]^T, b = [0 \quad b]^T$, 正定阵 V :

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

V 的正定性要求其系数满足一定约束:

$$\begin{aligned} v_{11} &> 0 \\ v_{11} \cdot v_{22} - v_{12} \cdot v_{21} &> 0 \end{aligned} \tag{14}$$

将 b, V 代入式(11),可得:

$$S = b \cdot [v_{21} \quad v_{22}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

简化上式:

$$\dot{x}_1 + \frac{v_{21}}{v_{22}} x_1 = 0 \tag{16}$$

积分上式:

$$x_1 = x_{10} e^{-at} \tag{17}$$

其中 $a = v_{21}/v_{22}$ 。由式(17)可以看出,滑模运动性能受 v_{21}, v_{22}, x_{10} 的影响。一般 x_1 是指跟踪误差,故期望 x_{10} 较小, a 较大。 a 取值受式(14)限制,而 V 取值又受 Q 的影响,故 Q 的选择影响滑模运动性能。

2.3 抖振的削弱

滑模变结构控制的应用受限于抖振。到目前为止,人们为消除抖振作了不少工作,但收效甚微。文中讨论采用趋近律方法削弱抖振的影响。

取变结构切换面以及控制律:

$$u = -(b^T V_1 b)^{-1} [k \text{sgn} S + k_1 S + b^T V_1 A x]$$

$$S = b^T V_1 x \tag{18}$$

其中 $b^T V_1 b \neq 0, V_1$ 正定。选定 Lyapunov 函数为

$v = 0.5x^T V_1 x$ 。对 v 求导可得 \dot{v} :

$$\dot{v} = x^T V_1 A x - \rho x^T V_1 b (b^T V_1 A x + k \text{sgn} S + k_1 S) \tag{19}$$

其中 $\rho = (b^T V_1 b)^{-1}$, 整理式(20)可得:

$$\dot{v} = x^T (V_1 A - \rho V_1 b b^T V_1 A) x - \rho (k \text{sgn} S + k_1 S) \cdot S \tag{20}$$

上式右端第一项设为 $0.5x^T (A^T P + P A) x, P$ 如式(21)所示。

$$P = V_1 - \rho V_1 b b^T V_1 \tag{21}$$

任给一正定阵 Q , 由于 A 是稳定的, 根据定理 3 可知有唯一确定的正定阵 P 。由式(21)可知, $\dot{v} < 0$, 而 $v > 0$, 由定理 2 可知系统(2)全局渐近稳定。而 V_1 可由式(22)求得:

$$V_1 = P + (b^T V_1 b)^{-1} V_1 b b^T V_1 \tag{22}$$

对 S 求导, 可得 \dot{S} 的表达式:

$$\dot{S} = b^T V_1 [A x - b (b^T V_1 b)^{-1} (k \text{sgn} S + k_1 S + b^T V_1 A x)] = -k_1 S - k \text{sgn} S \tag{23}$$

从上式可以看出, $S \dot{S} < 0$, 表明切换面上全是滑动模态区。而从 \dot{S} 的形式可以看出, 趋近运动满足指数趋近律, 运动性能良好, 且通过选择较小的 k 使得在切换面附近 \dot{S} 很小, 削弱了抖振的影响。

3 系统性能实例验证

选取某巡航飞行器为研究对象, 其运动状态为 $H = 25 \text{ km}, Ma = 6$, 基于 Lyapunov 方法设计其高度控制系统。

忽略舵机动态特性, 考虑内外环控制。内环采用经典 PD 控制, 外环采用滑模变结构控制。具体结构如图 1 所示。

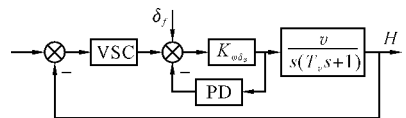


图 1 高度控制系统内外环构型

其中被控对象传递函数模型如式(24)所示。

$$K_{\phi} (s) = - \frac{\Delta \varphi(s)}{\Delta \delta_{\varphi}(s)} = \frac{k_{\omega \varphi}}{T_1^2 s^2 + 2 \xi_1 T_1 s + 1} \frac{T_v s + 1}{T_v s} \tag{24}$$

内环 PD 控制参数为: $k_p = 15, k_d = 2.48$ 。将内环简化为一阶系统, 则由图 1 可得外环被控对象

$$\text{传递函数为 } G_{out}(s) = \frac{k v}{T_v \cdot s(s + 0.0625)} \circ$$

将外环被控对象传递函数转化为状态方程,选择状态变量:

$$\begin{aligned} y_1 &= e = H_r - H \\ y_2 &= \dot{y}_1 = -\dot{H} \end{aligned} \quad (25)$$

则建立外环状态空间模型:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -0.0625 \cdot y_2 - kv \cdot \delta_\varphi \end{aligned} \quad (26)$$

将上述模型用矩阵表示:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (27)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.0625 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -kv \end{bmatrix} \quad (28)$$

由于 A 不稳定,采用状态反馈 $k_2^T x$ 使其稳定,其中,稳定后的状态矩阵仍然以 A 表示。依据 Lyapunov 方法可得变结构切换函数及控制律:

$$\begin{aligned} S &= -0.5e - 67.6565\dot{e} \\ u &= -k \operatorname{sgn} S \end{aligned} \quad (29)$$

为了消除抖振影响,取控制律为 $u = -k \operatorname{sat}(S)$ 。基于上升时间、调节时间以及超调量考虑,加入 $u \leq u_l$ 的限制,对上式中 k 进行优化,优化结果如图 2 所示。

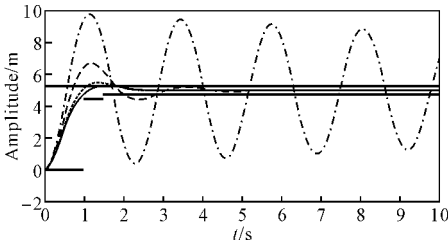


图 2 高度控制具体优化过程

图 2 中实线指 k 取得最优值 0.0532 时的高度变化曲线,而其他线型表示 k 取非最优值优化过程。从图中可以看出,基于 Lyapunov 方法所得的高度变结构控制完全满足设计要求,上升时间小于 1s,调节时间小于 1.5s,超调量小于 5%。而且从稳态运动可以看出,抖振的影响很小,运动曲线很光滑。

滑模变结构控制的最大的特点就是鲁棒性,一旦运动到达滑模面后,运动特性不再受系统参数及外界干扰的影响。为了验证所设计变结构控制系统的性能,将弹体参数摄动 $\pm 50\%$,对系统进

行仿真分析。其中图 3 给出了弹体参数摄动 $\pm 50\%$ 的结果。从图中可以看出,弹体参数的变化对系统性能影响很小,证明所设计控制系统的鲁棒性很好。

4 结论

依据以上的理论分析及实例验证,可以得出如下结论。

1) 基于 Lyapunov 方法的变结构控制能够保证运动状态原点处的全局渐近稳定,能够至少保证在原点附近的切换面上存在滑模运动,且滑模运动稳定。

2) 基于 Lyapunov 方法的变结构控制的性能主要受 Q 阵和参数 k 的影响,可以通过优化来达到 Q 与 k 的最佳取值。

3) 滑模运动的性能主要受 V 的影响,对于二阶系统来说,运动到达滑模面上的初始位置以及 v_{21}/v_{22} 决定了滑动运动的性能。因此合理选择 Q 阵,可以使得由式 $A^T V + VA = -Q$ 确定的 V 满足设计要求。

4) 抖振的消除要以不过分损害系统滑模运动特性为前提,故采用饱和函数代替符号函数时,需要优化设计饱和函数中的延迟量。

参考文献:

[1] Duan S, Ma Z. Adaptive sliding-mode robust tracking control for robot manipulator with the uncertainties[C]// 2006.

[2] 陈洁,潘长鹏,顾文锦.基于观测器的超音速巡航导弹过载控制系统设计[C]// 2007 年中国控制与决策学术年会论文集,2007.

[3] 李乙杰,李锐华,孙耀杰,等.基于边界层法的电磁轴承滑模变结构控制研究[J].系统仿真学报,2005,17(8):1962-1965.

[4] Wen-jin G, Yi-fei Z, Chang-ping L. Composite control of linear/adaptive variable structure control [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2001, 14 (1): 49-56.

[5] Kim K, Park Y. Using Lyapunov matrices for sliding mode design[C]// Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, 2000, 3:2204-2209.

[6] 高为炳.变结构控制的理论及设计方法[M].北京:科学出版社,1998.

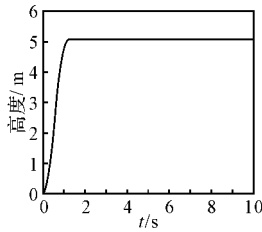


图 3 高度控制时域响应(弹体参数摄动 $\pm 50\%$)