

文章编号:0253-9993(2013)02-0226-07

# 受压脆性岩石 I - II 型复合裂纹水力压裂研究

冯彦军<sup>1,2,3</sup>, 康红普<sup>1,2</sup>

(1. 天地科技股份有限公司 开采设计事业部, 北京 100013; 2. 煤炭科学研究总院 开采设计研究院, 北京 100013; 3. 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 江苏 徐州 221008)

**摘要:**在线弹性断裂力学理论的基础上,运用最大周向拉应变理论,分析了受远场地应力作用及裂纹面受水压力作用下脆性岩石裂纹的起裂方向及起裂条件。论述了泊松比 $\mu$ 对开裂角 $\theta_0$ , $\theta_0-\beta$ 关系以及断裂包络线的影响,给出了满足最大周向拉应变理论的 I-II 复合型断裂包络线;定义水力压裂裂纹扩展影响因子 $D$ 并分析其对水力压裂裂纹起裂及扩展的影响, $D$ 值逐渐增大时, $K_{II}$ 逐渐减小, $K_I$ 逐渐发挥主导作用,与数值计算结果一致;最后进行实例分析,并与现场水力压裂结果比较,二者结果比较接近。

**关键词:**脆性岩石; I-II 型复合裂纹;水力压裂;裂纹扩展影响因子;起裂准则

**中图分类号:**TU45 **文献标志码:**A

## The initiation of I - II mixed mode crack subjected to hydraulic pressure in brittle rock under compression

FENG Yan-jun<sup>1,2,3</sup>, KANG Hong-pu<sup>1,2</sup>

(1. Coal Mining and Design Department, Tiandi Science & Technology Co., Ltd., Beijing 100013, China; 2. Coal Mining and Design Branch, China Coal Research Institute, Beijing 100013, China; 3. State Key Laboratory for Geomechanics & Deep Underground Engineering, Xuzhou 221008, China)

**Abstract:** The maximal circumferential strain criterion based on linear elastic fracture mechanics was employed for the analysis of the crack initiation. The effect of Poisson's ratio on crack initiation angle  $\theta_0$ , the  $\theta_0-\beta$  relation and fracture envelope was conducted, and the I-II mixed mode fracture envelope that meets the maximal circumferential strain criterion was proposed. Crack propagation influencing factor  $D$  was defined as well as its effect on the crack initiation and propagation during hydraulic fracture was presented, mode I stress intensity factor  $K_I$  retains dominance while mode II stress intensity factor  $K_{II}$  plays a secondary role as  $D$  increases, the trend is in accordance with the numerical results. A practical case analysis was carried out in terms of the proposed method and the result was relatively closed to the field hydraulic fracture operation.

**Key words:** brittle rock; I-II mixed mode crack; hydraulic fracturing; crack propagation influencing factor; initiation criterion

含裂纹脆性岩体是水利、矿山等岩体工程中经常遇到的一类岩体。大多岩体受压且处于复杂应力状态,往往表现为含 I-II 型复合裂纹岩体的变形特征<sup>[1-2]</sup>。针对受压脆性岩石裂纹的开裂,一直是工程界和理论界十分关注的问题,众多学者展开了大量的理论与实验研究。E. Hoek 和 Z. T. Bieniawski<sup>[3-4]</sup>研

究了双压条件下脆性岩石椭圆形裂纹的起裂及扩展,建立了裂纹开裂的应力准则;谢和平等<sup>[5]</sup>提出了适用于裂纹表面自由或受载条件下的应力函数,并利用边界配位法计算了在压缩载荷下岩石内部裂纹的应力强度因子;黎立云等<sup>[6]</sup>对多裂纹类岩石材料模型进行了双压试验,并用最大周向拉应力 $\sigma_{\theta_{max}}$ 及最大

收稿日期:2012-03-20 责任编辑:常琛

基金项目:国家高技术研究发展计划(863)资助项目(2008AA062102);深部岩土力学与地下工程国家重点实验室开放基金资助项目(SKLG-DUEK1007)

作者简介:冯彦军(1980—),男,山西吕梁人,博士研究生。Tel:010-84262912, E-mail:cristiamo@163.com

周向拉应变  $\varepsilon_{\theta_{\max}}$  断裂准则对单个裂纹进行了分析, 所得结果与实验值相符; 有学者<sup>[7]</sup> 在最大切向应力断裂准则中引入  $T$ -stress 项, 建立了广义最大切向应力 (Generalized Maximum Tangential Stress, GMTS) 断裂准则, 利用该准则对 I - II 复合型裂纹的开裂进行了预测, 并进行相关试验, 对带有中心裂纹的巴西圆盘和带有边裂纹的半圆盘分别施加径向载荷和三点弯载荷, 使用高倍光学显微镜对裂纹开裂角进行了测量, 所得结果与 GMTS 准则预测值具有很好的一致性。上述研究有力的推动了脆性岩石复合型裂纹的研究, 为进一步研究受压脆性岩石裂纹的水力压裂 (Hydraulic Fracturing) 提供了理论与实验基础。

水力压裂自提出以来<sup>[8]</sup>, 已广泛应用于石油和天然气工业、水利水电工程、地热资源开发、核废料储存、地应力测量等领域<sup>[9-11]</sup>。因此, 基于不同的工程背景, 国内外学者对水力压裂的机理及其应用展开了广泛的研究。Hubbert 和 Willis<sup>[12]</sup> 对钻孔水力压裂进行了研究, 认为水力压裂产生的裂纹沿垂直于最小主应力的方向扩展; M. A. Kayupov 等<sup>[13]</sup> 利用单向受压、双塞单侧封孔的立方体花岗岩试件进行了水力压裂试验, 并用双重边界元方法进行了数值模拟, 数值分析结合试验观察揭示出试件的破坏是由孔壁周围原生微裂纹的扩展引起的; Ma Z<sup>[14]</sup> 针对不同尺寸以及承受不同约束及载荷的岩石试件进行了水力压裂试验, 研究了裂纹的扩展情况, 得到了一些有益的结论; 李术才等<sup>[15]</sup> 使用相似材料模拟了岩体工程中裂隙不含水、含有压水和水力压裂的破坏过程, 并用 CT 进行了实时监测, 表明三种条件下岩体的破坏形式各不相同, 在分析岩体结构时需考虑水的赋存状态对其影响; 徐世焯等<sup>[16]</sup> 研究了楔入式紧凑拉伸试件在不同水压下裂缝的扩展情况及断裂韧度的测定, 并应用双  $K$  断裂模型计算试件的失稳断裂韧度、黏聚韧度和起裂韧度, 试验结果与计算结果误差较小; 张敦福和朱维申等<sup>[17]</sup> 进行了围压和裂隙水压力共同作用下岩石中椭圆裂纹的开裂研究, 认为开裂点、开裂角、最大切向拉应力和临界载荷随椭圆的纵横轴比和裂纹倾角的不同而变化; Zhang Guangqing 和 Chen Mian<sup>[18]</sup> 基于裂纹扩展准则  $K_I \geq K_{Ic}$ ,  $K_{II} \geq K_{IIc}$  及最大切向应力准则, 建立了水力压裂过程中重张裂纹扩展模型, 认为应力差和初始开裂角是引起裂纹扩展路径不断变化的主要因素; 近年来, 对水力压裂的研究和应用已远远超出其经典范畴, 闫少宏等<sup>[19]</sup> 介绍了水力压裂处理坚硬顶板的机理及相关试验; 邓广哲等<sup>[20-22]</sup> 进行了水力压裂弱化坚硬煤体的整体性和力学特性研究。也有学者在水力压裂提高煤层透气性

及瓦斯抽采效果方面进行了尝试<sup>[23]</sup>。

上述成果为本文拟开展的水力作用下脆性岩石裂纹起裂的研究提供了理论基础。本文旨在研究受压脆性岩石裂纹在水力作用下的起裂行为, 运用最大周向拉应变  $\varepsilon_{\theta_{\max}}$  断裂准则, 建立了裂纹起裂扩展方向及起裂条件, 以期对定量分析此类问题提供理论依据。

## 1 力学模型

本文旨在揭示岩石中裂纹在水压力作用下的开裂规律。针对本问题, 引入以下几点假设<sup>[24]</sup>:

① 所研究岩石材料为脆性材料, 可认为是线弹性的, 可用线弹性断裂力学的相关理论进行研究; ② 认为岩石材料是各向同性的; ③ 裂纹的开裂过程为准静态、等温过程; ④ 将所研究裂纹视为理想裂纹, 并且裂纹尺寸远小于岩体尺寸, 忽略有限尺寸对计算结果的影响, 认为岩体尺寸为无限大; ⑤ 不计体力。

基于以上假设, 受压脆性岩石 I - II 型复合裂纹水力压裂力学模型如图 1(a) 所示。无限大板内含有一条长度为  $2a$  的穿透型斜裂纹, 边缘受到均布双轴压力  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  的作用, 在裂纹面上 ( $y=0, |x|<a$ ) 受常水压力  $P$  的作用, 裂纹方向和  $\sigma_1$  作用方向的夹角为  $\beta$  (称为裂纹角); 分别建立直角坐标系  $x'o'y'$  ( $x'$  轴与  $y'$  轴分别于  $\sigma_3$  与  $\sigma_1$  作用方向平行) 和裂纹直角坐标系  $xoy$  ( $x$  轴与裂纹方向平行,  $y$  轴与裂纹中垂线重合), 应力符号采用弹性力学惯例。

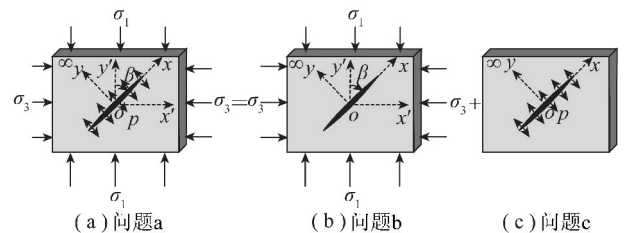


图 1 受压脆性岩石 I - II 型复合裂纹水力压裂力学模型及叠加原理的应用

Fig. 1 Mechanical model of I - II mixed mode crack under hydraulic pressure in brittle rock under compression and application of superposition principle

如图 1 所示, 板的边缘受均布双轴压力作用而裂纹表面受常水压力作用的裂纹问题 (问题 a), 可以转化为问题 b 与 c 的叠加。

对于问题 b,  $\sigma'$  与  $\sigma$  为应力张量分别在坐标系  $x'o'y'$  和坐标系  $xoy$  中的矩阵表示, 通过坐标变换, 可得

$$\sigma = \alpha \sigma' \alpha^T \quad (1)$$

式中,  $\alpha$  为坐标轴  $x, y$  与坐标轴  $x', y'$  之间夹角的方

向余弦; $\alpha^T$  为其转置。

由式(1)可得其远场的应力状态为

$$\begin{cases} \sigma_x = -(\sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \beta) \\ \sigma_y = -(\sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \beta) \\ \tau_{xy} = -(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \beta \cos \beta \end{cases} \quad (2)$$

针对图 1 所示问题,应用叠加原理可求得其应力强度因子为

$$\begin{cases} K_{Ia} = K_{Ib} + K_{Ic} \\ K_{IIa} = K_{IIb} + K_{IIc} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{式中, } \begin{cases} K_{Ib} = \sigma_y \sqrt{\pi a} \\ K_{Ic} = P \sqrt{\pi a} \end{cases}, \begin{cases} K_{IIb} = \tau_{xy} \sqrt{\pi a} \\ K_{IIc} = 0 \end{cases}.$$

可以看出,  $K_{Ib} < 0$ , 这在物理上是不能接受的<sup>[25]</sup>, 负值的 I 型裂纹的应力强度因子  $K_I$  只有在它能抵消正值的应力强度因子时才有意义<sup>[26]</sup>。因此, 上述问题的应力强度因子可表示为

$$\begin{cases} K_{Ia} = [P - (\sigma_1 \sin^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \beta)] \sqrt{\pi a} \\ K_{IIa} = -(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a} \end{cases} \quad (4)$$

当  $K_{Ia} = 0$  时, 为纯 II 型裂纹问题, 对于强压剪情况, 由于裂纹面受到压力而闭合, 需考虑裂纹闭合效应; 本文只考虑  $K_{Ia} > 0$  的 I-II 复合型裂纹问题。

## 2 分析计算

以上模型为 I-II 复合型平面裂纹问题, 运用线弹性断裂力学理论进行分析计算, 拟回答以下两个问题: ① 裂纹起裂后向什么方向扩展? ② 裂纹在什么条件下开始起裂扩展?

### 2.1 最大周向拉应变理论 ( $\varepsilon_{\theta_{\max}}$ -criterion)

进行起裂分析的核心是选取合理的起裂准则。目前, 还不存在一个万能的准则, 能够适用于所有尺度和条件; 运用较广泛的起裂准则有: 最大周向拉应力准则 ( $\sigma_{\theta_{\max}}$ -criterion)、能量释放率准则 ( $G$ -criterion) 及应变能密度因子准则 ( $S$ -criterion)。所述准则都认为 I-II 复合型裂纹的起裂扩展为非自相似扩展, 并且当  $\beta$  较大 ( $K_{II}/K_I$  较小) 时, 三者对起裂角及起裂载荷的预测是一致的。然而,  $\sigma_{\theta_{\max}}$ -criterion 和  $G$ -criterion 并未考虑材料的影响,  $S$ -criterion 对受压作用下的断裂预测还有待于实验的进一步验证<sup>[2,25]</sup>; 应变类准则在压剪 I-II 复合型断裂问题中给出的结果与岩石及类岩石材料的实验结果最为接近<sup>[27]</sup>。因此, 本文拟用最大周向拉应变理论 ( $\varepsilon_{\theta_{\max}}$ -criterion) 对上述模型进行起裂分析。

引入以裂纹端点为原点的极坐标 (称为裂纹前缘坐标系), 如图 2 所示, 对于 I-II 复合型裂纹问

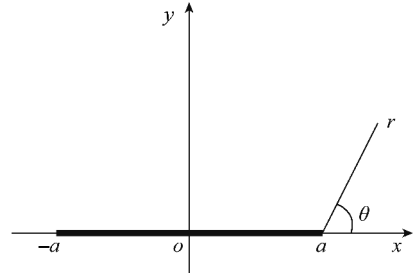


图 2 裂纹前缘坐标系 ( $r, \theta$ )

Fig. 2 Crack tip coordinate system ( $r, \theta$ )

题, 裂纹尖端的应力分量奇异项在极坐标中可表示为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I (3 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I (1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] \end{cases} \quad (5)$$

对平面应力问题, 应力分量和应变分量满足 Hooke 定律

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\theta} \end{cases} \quad (6)$$

将式(5)中的应力分量代入式(6), 求得  $\varepsilon_\theta$ , 整理后为

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2E\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3\mu + \cos \theta + \mu \cos \theta) - K_{II} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta + 3\mu \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta - \mu \sin \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (7)$$

式中,  $E, \mu$  分别为材料的弹性模量和泊松比;  $K_I, K_{II}$  分别为 I, II 型裂纹端部的应力强度因子。

最大周向拉应变理论认为:

(1) 裂纹沿垂直于环向应变  $\varepsilon_\theta$  最大的方向起裂扩展;

(2) 当  $\varepsilon_{\theta_{\max}}$  达到临界值  $\varepsilon_c$  时, 裂纹开始起裂扩展。

### 2.2 裂纹起裂扩展的方向

根据最大周向拉应变理论, 裂纹起裂扩展的方向应满足以下条件

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \quad (8)$$

由  $\frac{\partial \varepsilon_{\theta}}{\partial \theta} = 0$  可得

$$K_{\text{I}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2\mu - 3(1 + \mu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + K_{\text{II}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 9(1 + \mu) \sin^2 \frac{\theta}{2} - 3 - \mu \right] = 0 \quad (9)$$

式(9)为按最大周向拉应变理论所预测的开裂角公式。开裂角  $\theta_0$  由泊松比  $\mu$ 、裂纹尖端的应力强度因子  $K_{\text{I}}$ 、 $K_{\text{II}}$  或  $K_{\text{II}}/K_{\text{I}}$  确定;  $\theta_0$  的正负取决于  $K_{\text{II}}$  的正负,当  $K_{\text{II}} > 0$  时,  $\theta_0 < 0$ , 当  $K_{\text{II}} < 0$  时,  $\theta_0 > 0$ ; 图 3 是基于  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  准则, 泊松比  $\mu$  分别取 0, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 和 0.30 时, 开裂角  $\theta_0$  与比值  $K_{\text{II}}/K_{\text{I}}$  关系曲线。

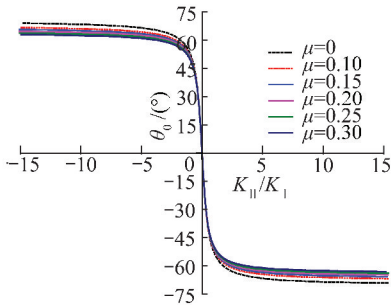


图 3 基于  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  准则的开裂角  $\theta_0$  与比值  $K_{\text{II}}/K_{\text{I}}$  的关系

Fig. 3 Relationship between crack initiation angle  $\theta_0$  and ratio of stress intensity factor  $K_{\text{II}}/K_{\text{I}}$  as predicted by the  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  criterion

最大周向拉应力理论 ( $\sigma_{\theta_{\text{max}}}$  - criterion) 为上述  $\mu = 0$  的情形, 从图 3 中可看出, 当  $\mu$  或  $|K_{\text{II}}/K_{\text{I}}|$  值较小时,  $\sigma_{\theta_{\text{max}}}$  准则与  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  准则给出的结果很接近; 当  $K_{\text{II}} = 0$  (纯 I 型裂纹) 时,  $\theta_0 = 0$ , 即裂纹沿自身平面扩展; 当  $|K_{\text{II}}| \neq 0$ , 但值不是很大时,  $|\theta_0|$  急剧增加; 当  $K_{\text{I}} = 0$ , 但  $K_{\text{II}} \neq 0$  (纯 II 型裂纹), 即  $K_{\text{II}}/K_{\text{I}} \rightarrow \infty$  时, 由  $\sigma_{\theta_{\text{max}}}$  准则预测的开裂角  $|\theta_0| = 70^\circ 32'$ ,  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  准则所预测的开裂角  $|\theta_0| \leq 70^\circ 32'$ , 且与材料的泊松比  $\mu$  有关, 因而  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  准则更具有针对不同材料的适应性。

针对图 1 所示模型, 令  $K_{\text{I}} = K_{\text{Ia}}$ ,  $K_{\text{II}} = K_{\text{IIa}}$ , 并将式(4)代入式(9), 可得基于最大周向拉应变理论预测的开裂角  $\theta_0$  与裂纹角  $\beta$  的关系, 为了便于讨论, 假定  $P > \sigma_1$  (保证  $K_{\text{I}} > 0$ ),  $\sigma_1 > \sigma_3$ ; 定义  $D = (P - \sigma_1) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ , 当  $\mu = 0.3$ , 绘制出  $D$  取不同值时, 开裂角  $\theta_0$  与裂纹角  $\beta$  的关系曲线, 如图 4 所示。从该图可看出, 当  $\beta = 0^\circ$  或  $90^\circ$  时,  $\theta_0 = 0$ , 说明裂纹方向与  $\sigma_1$  平行或垂直时, 裂纹扩展为自相似扩展; 随着  $D$  的逐渐增大,  $\theta_0$  逐渐减小,  $K_{\text{II}}$  逐渐减小,  $K_{\text{I}}$  发挥主导作用, 特别地, 当  $\sigma_1 = \sigma_3$  时,  $D$  趋于无穷大, 这时  $K_{\text{II}} = 0$ , 裂纹表现为纯 I 型裂纹扩展。

在水力压裂作业中,  $P$  为水压力,  $\sigma_1, \sigma_3$  为以主应力表示的地应力。若地应力不变时,  $D$  随着  $P$  值的

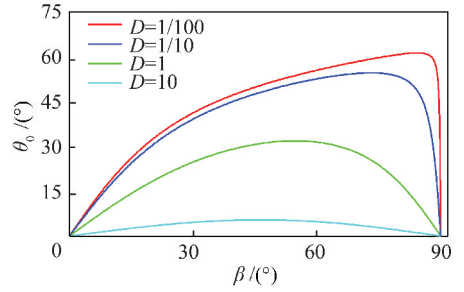


图 4 基于  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  准则的开裂角  $\theta_0$  与裂纹角  $\beta$  随  $D$  变化的关系曲线

Fig. 4 The effect of  $D$  on the relationship between crack initiation angle  $\theta_0$  and crack inclination angle  $\beta$  based on the  $\varepsilon_{\theta_{\text{max}}}$  - criterion

增加而增加, 当裂纹起裂所需的压力  $P$  远大于地应力时, 地应力对裂纹扩展方向的影响较小, 裂纹扩展近似表现为自相似扩展, 因此, 可称  $D$  为水力压裂裂纹扩展影响因子; 另外,  $D$  与水压力和最大主应力的差值 ( $P > \sigma_1$ ) 成正比, 与地应力差 ( $\sigma_1 - \sigma_3$ ) 成反比。

结合 Abaqus 和 Franc3D 软件分析水力压裂裂纹扩展影响因子  $D$  对水力压裂裂纹扩展的影响。根据王台铺煤矿 15 号煤顶板岩层的地应力场 (表 2) 及坚硬顶板水力压裂作业情况。分别取  $P = 20$  MPa 和  $P = 100$  MPa, 地应力  $\sigma_1, \sigma_3$  分别为 7, 3 MPa, 即  $D = 3.25$  和  $D = 23.25$ , 初始裂纹半长 0.2 m。岩石弹性模量取 70 GPa, 泊松比 0.26。图 5 为模型有限元网格。

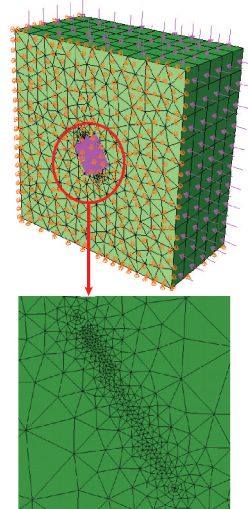


图 5 模型有限元网格

Fig. 5 Finite element mesh

当水压力  $P = 20$  MPa, 即  $D = 3.25$  时, 水力压裂裂纹扩展情况如图 6 所示, 其中 step1 为初始裂纹状态。

从图 6 看出, 裂纹沿着与原裂纹面成一定角度起

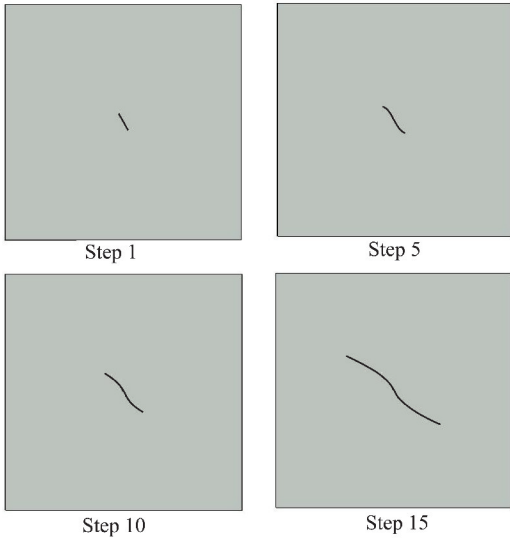


图 6  $D=3.25$  时水力压裂裂纹扩展  
Fig. 6 Crack propagation as  $D=3.25$

裂并扩展,其扩展方向最终趋向垂直于最小主应力方向。

当水压力  $P=100$  MPa,即  $D=23.25$  时,水力压裂裂纹扩展情况如下:从图 7 看出,当水压力  $P$  远大于地应力,即  $D$  值较大时,裂纹起裂及扩展为自相似扩展,表现为 I 型裂纹起裂扩展,与最大拉应变理论所得结论一致。

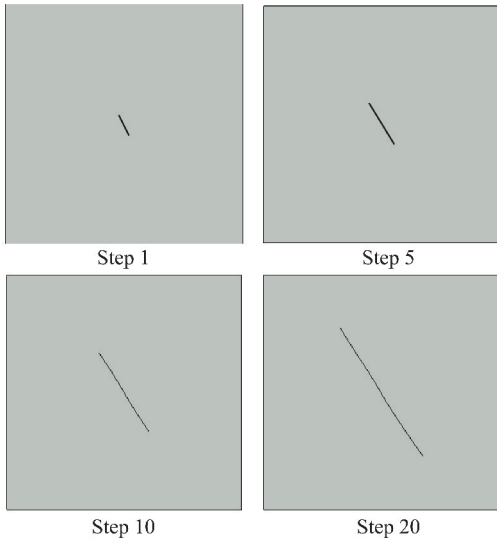


图 7  $D=23.25$  时水力压裂裂纹扩展  
Fig. 7 Crack propagation as  $D=23.25$

固定其它参数,当  $\mu$  分别取 0, 0.1, 0.2 和 0.3 时,绘制出开裂角  $\theta_0$  与裂纹角  $\beta$  的关系曲线,如图 8 所示。从该图可看出,当  $\beta$  值小于  $20^\circ$  或接近  $90^\circ$  时,泊松比  $\mu$  对  $\theta_0-\beta$  的变化几乎无影响。

### 2.3 裂纹起裂扩展的条件

最大周向拉应变理论认为:当  $\varepsilon_{\theta_{max}}$  达到临界值  $\varepsilon_c$  时,裂纹开始起裂扩展。由式(9)求得开裂角  $\theta_0$

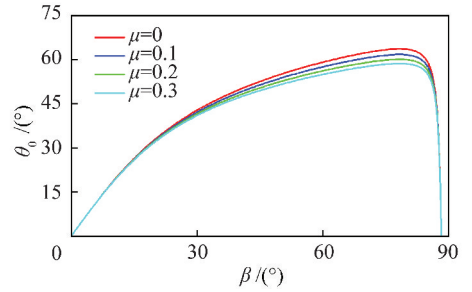


图 8 基于  $\varepsilon_{\theta_{max}}$  准则的开裂角  $\theta_0$  与裂纹角  $\beta$  随  $\mu$  变化的关系曲线

Fig. 8 The effect of  $\mu$  on the relationship between crack initiation angle  $\theta_0$  and crack inclination angle  $\beta$  based on the  $\varepsilon_{\theta_{max}}$ -criterion

后,可以确定起裂条件,将  $\theta=\theta_0$  代入式(7)可得

$$\varepsilon_{\theta_{max}} = \frac{1}{2E\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta_0}{2} (1 - 3\mu + \cos \theta_0 + \mu \cos \theta_0) - K_{II} \left( 3\cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 + 3\mu \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 - \mu \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \quad (10)$$

当  $\varepsilon_{\theta_{max}} = \varepsilon_c$ , 且  $K_I = K_{IC}, K_{II} = 0$  (纯 I 型裂纹,此时  $\theta_0 = 0$ ) 时,可得

$$\varepsilon_c = \frac{1 - \mu}{E\sqrt{2\pi r}} K_{IC} \quad (11)$$

式中,  $K_{IC}$  为材料断裂韧性。

由式(10)和(11)得

$$K_I \cos \frac{\theta_0}{2} (1 - 3\mu + \cos \theta_0 + \mu \cos \theta_0) - K_{II} \left( 3\cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 + 3\mu \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \theta_0 - \mu \sin \frac{\theta_0}{2} \right) = 2(1 - \mu) K_{IC} \quad (12)$$

式(12)即为按最大周向拉应变理论建立的 I-II 复合型断裂准则。

由式(9)和式(12)可得,泊松比  $\mu$  分别取 0, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25 和 0.30 时,满足最大周向拉应变理论的 I-II 复合型断裂包络线(图 9)。从图 9 可看出,随着泊松比  $\mu$  的增大,断裂包络线愈趋于保守。

### 3 应用实例

晋城王台铺煤矿 15 号煤层直接顶为石灰岩,属于典型的坚硬岩石,其力学参数见表 1,其中  $\sigma_c, E, \nu, K_{IC}$  分别为岩石的单轴抗压强度、弹性模量、泊松比和断裂韧度。

利用水压致裂法对 15 号煤顶板岩层进行地应力测量,结合文献[28]的测试结果,确定坚硬顶板岩层

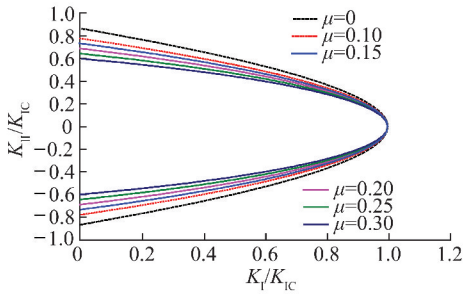


图 9 满足最大周向拉应变理论的 I - II 复合型断裂包络线  
Fig. 9 Fracture envelope for mixed mode I - II cracking in terms of the  $\varepsilon_{\theta_{max}}$ -criterion

地应力场见表 2,其中  $H, \sigma_v, \sigma_H, \sigma_h, \varphi$  分别为岩层埋深、垂直主应力、最大水平主应力、最小水平主应力和最大水平主应力方向。

表 1 岩石力学特性

Table 1 Mechanical properties of rock

岩性	$\sigma_c$ /MPa	$E$ /GPa	$\nu$	$K_{IC}/(\text{MPa} \cdot \text{m}^{-1/2})$
石灰岩	101 ~ 131	69.98	0.261	2.21

表 2 地应力场

Table 2 Magnitude and direction of in-situ stress

$H$ /m	$\sigma_v$ /MPa	$\sigma_H$ /MPa	$\sigma_h$ /MPa	$\varphi$
140	3.5	7.72	4.65	N44.6°W

根据最大周向拉应变理论,联立式(4),(9)及(12), $\beta$ 取  $80^\circ$ ,裂纹半长  $a$ 取 0.12 m,得计算结果:起裂压力  $P=10.87$  MPa,开裂角  $\theta_0=22.6^\circ$ 。

王台铺煤矿 15 号煤层直接顶水力压裂曲线如图 10 所示。

由现场压裂曲线看出,裂纹的起裂压力约为 10 MPa,与最大拉应变理论计算结果接近。

### 4 结 论

(1) 开裂角  $\theta_0$  由泊松比  $\mu$ 、裂纹尖端的应力强度因子  $K_I, K_{II}$  或  $K_{II}/K_I$  确定,且  $|\theta_0| \leq 70^\circ 32'$ ;  $\theta_0$  的正负取决于  $K_{II}$  的正负,当  $K_{II} > 0$  时,  $\theta_0 < 0$ , 当  $K_{II} < 0$  时,  $\theta_0 > 0$ 。

(2) 定义水力压裂裂纹扩展影响因子  $D = (P - \sigma_1) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ ,分析其对裂纹扩展的影响,地应力不变时,  $D$  随着  $P$  值的增加而增加;当裂纹起裂所需的压力  $P$  远大于地应力时,地应力对裂纹扩展的影响较小,裂纹扩展近似表现为自相似扩展;随着  $D$  的逐渐增大,  $K_{II}$  逐渐减小,  $K_I$  逐渐发挥主导作用,与数值计算结果一致。

(3) 裂纹角  $\beta$  值小于  $20^\circ$  或接近  $90^\circ$  时,泊松比  $\mu$

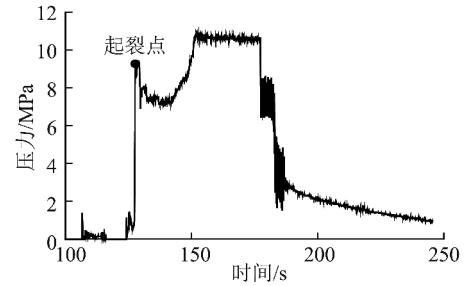
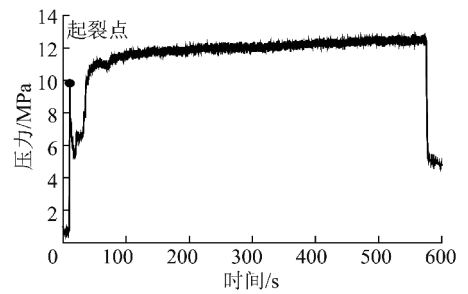


图 10 水力压裂压力-时间曲线

Fig. 10 Pressure versus time curve from the hydraulic fracturing

对  $\theta_0 - \beta$  的变化几乎无影响。

(4) I - II 复合型断裂包络线随着泊松比  $\mu$  的增大而趋于保守。

(5) 运用最大周向拉应变理论对王台铺煤矿 15 号煤层顶板进行水力压裂计算,所得结果与现场水力压裂结果接近。

### 参考文献:

[1] 李贺,尹光志,许江,等.岩石断裂力学[M].重庆:重庆大学出版社,1988.  
Li He, Yin Guangzhi, Xu Jiang, et al. Rock fracture mechanics[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1988.

[2] Barry N W, Raghu N S, Gexin S. Rock fracture mechanics (principles, design and applications) [M]. Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V, 1992.

[3] Hoek E. Brittle fracture of rock [M]. London: J. Wiley, 1968: 99-124.

[4] Hoek E, Bieniawski Z T. Brittle rock fracture propagation in rock under compression [J]. International Journal of Fracture Mechanics, 1965, 1(3): 137-155.

[5] 谢和平,朱哲明,范天佑.脆性岩石断裂破坏机理的边界配位法分析[J].力学学报,1998,30(2):238-246.  
Xie Heping, Zhu Zheming, Fan Tianyou. The analysis of fracture of brittle rock material by using the boundary collocation method [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 30(2): 238-246.

[6] 黎立云,刘大安,史孝群,等.多裂纹类岩体的双压实验与正交各向异性本构关系[J].中国有色金属学报,2002,12(1):165-170.  
Li Liyun, Liu Da'an, Shi Xiaogun, et al. Biaxial compression experiments and orthotropic constitutive relationship for regular cracks in replicated rock mass [J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals,

- 2002,12(1):165-170.
- [7] Aliha M R M, Ayatollahi M R, Smith D J, et al. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010(77):2200-2212.
- [8] Clark J B. A hydraulic process for increasing the productivity of wells [J]. *Petrol. Trans. AIME.*, 1949,186:1-8.
- [9] 刘允芳. 水压致裂法三维地应力测量[J]. *岩石力学与工程学报*, 1991,10(3):246-256.
- Liu Yunfang. In-situ 3-dimensional stress measurements by hydraulic fracturing technique [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1991,10(3):246-256.
- [10] Legarth B, Huenges E, Zimmermann G. Hydraulic fracturing in a sedimentary geothermal reservoir: Results and implications [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2005, 42(7-8):1028-1041.
- [11] Weeren H O. Disposal of radioactive wastes by hydraulic fracturing Part III. Design of ORNL's shale-fracturing plant [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 1966,4(1):108-117.
- [12] Hubbert M K, Willis D G. Mechanics of hydraulic fracturing [J]. *Transactions of Society of Petroleum Engineers of AIME*, 1957, 210:153-168.
- [13] Kayupov M A, Muller P P, Kuhn G, et al. Hydraulic pressure induced crack orientations in strained rock specimens [J]. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 1998,35:434-435.
- [14] Ma Z. Experimental studies of rock fracture behavior related to hydraulic fracture. [D]. Chicago; University of Illinois, 2000:78-150.
- [15] 李术才, 李树忱, 朱维申, 等. 裂隙水对节理岩体裂隙扩展影响的 CT 实时扫描实验研究 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2004,23(21):3584-3590.
- Li Shucui, Li Shuchun, Zhu Weishen, et al. CT real-time testing study on effect of water on crack growth in fractured rock mass [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004,23(21):3584-3590.
- [16] 徐世煌, 王建敏. 水压作用下大坝混凝土裂隙扩展与双 K 断裂参数 [J]. *土木工程学报*, 2009,42(2):119-125.
- Xu Shilang, Wang Jianmin. Crack propagation in a concrete dam under water pressure and determination of the double-K fracture parameters [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009,42(2):119-125.
- [17] 张敦福, 朱维申, 李术才, 等. 围压和裂隙水压力对岩石中椭圆裂纹初始开裂的影响 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2004,23(S2):4721-4725.
- Zhang Dunfu, Zhu Weishen, Li Shucui, et al. Influence of confining pressure and fissure water pressure on initial opening for ellipse fracture [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004,23(S2):4721-4725.
- [18] Zhang G Q, Chen M. Dynamic fracture propagation in hydraulic fracturing [J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010(70):266-272.
- [19] 闫少宏, 宁宇, 康立军, 等. 用水力压裂处理坚硬顶板的机理及实验研究 [J]. *煤炭学报*, 2000,25(1):32-35.
- Yan Shaohong, Ning Yu, Kang Lijun, et al. The mechanism of hydrobreakage to control hard roof and its test study [J]. *Journal of China Coal Society*, 2000,25(1):32-35.
- [20] 邓广哲, 王世斌, 黄炳香. 煤岩水压裂缝扩展行为特性研究 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2004,23(20):3489-3493.
- Deng Guangzhe, Wang Shibin, Huang Bingxiang. Research on behavior character of crack development induced by hydraulic fracturing in coal-rockmass [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004,23(20):3489-3493.
- [21] 邓广哲, 黄炳香, 王广地, 等. 圆孔孔壁裂缝水压扩张的压力参数理论分析 [J]. *西安科技学院学报*, 2003,23(4):361-364.
- Deng Guangzhe, Huang Bingxiang, Wang Guangdi, et al. Theoretical analysis of crack expanding under pore hydraulic pressure [J]. *Journal of Xi'an University of Science and Technology*, 2003,23(4):361-364.
- [22] 邓广哲. 封闭型煤层裂隙地应力场控制水压致裂特性 [J]. *煤炭学报*, 2001,26(5):478-482.
- Deng Guangzhe. The cracked characteristic of occlude type of coal-bed crack under controlling hydraulic pressure in strata stress field [J]. *Journal of China Coal Society*, 2001,26(5):478-482.
- [23] 富向. 井下点式水力压裂增透技术研究 [J]. *煤炭学报*, 2011,36(8):1317-1321.
- Fu Xiang. Study of underground point hydraulic fracturing increased permeability technology [J]. *Journal of China Coal Society*, 2011,36(8):1317-1321.
- [24] Anderson T L. Fracture mechanics (Fundamentals and Applications) [M]. New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2005:12-85.
- [25] 李世恩, 和泰名, 尹祥础. 岩石断裂力学导论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010:99-114.
- Li Shiyu, He Taiming, Yin Xiangchu. Introduction of rock fracture mechanics [M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2010:99-114.
- [26] 中国航空研究院. 应力强度因子手册 [M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [27] 黎立云, 黎振兹, 孙宗顺. 岩石的复合型断裂实验及分析 [J]. *岩石力学与工程学报*, 1994,13(2):134-140.
- Li Liyun, Li Zhenzi, Sun Zongqi. Experiments research and theoretical analyses in brittle fracture of rock under mixed-mode loads [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1994,13(2):134-140.
- [28] 康红普, 姜铁明, 张晓, 等. 晋城矿区地应力场研究及应用 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2009,28(1):1-8.
- Kang Hongpu, Jiang Tiemin, Zhang Xiao, et al. Research on in-situ stress field in Jincheng mining area and its application [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009,28(1):1-8.