

# 矩形通道内层流脉动流动相位差分析

王 畅,高璞珍,许 超,谭思超

(哈尔滨工程大学 核安全与仿真技术国防重点学科实验室,黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:**通过建立数学模型,对大宽高比矩形通道单相低频脉动层流流动特性进行了分析。研究结果表明:低频率流量脉动未引起流体的速度分布变化,压降与流量间存在相位差,相位差仅与通道窄边尺寸、流体粘性及脉动周期相关。脉动周期及流体粘性越大,相位差越小;窄边尺寸越大,相位差越大。通过建立模型对上述现象进行了分析。

**关键词:**矩形通道;脉动层流;相位差;低频率

中图分类号:TL33 文献标志码:A 文章编号:1000-6931(2013)02-0218-05

doi:10.7538/yzk.2013.47.02.0218

## Analysis of Phase Lag in Pulsating Laminar Flow of Rectangular Channels

WANG Chang, GAO Pu-zhen, XU Chao, TAN Si-chao

(National Key Discipline Laboratory of Nuclear Safety and Simulation Technology,  
Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** The phase lags in pulsating single-phase laminar flow of rectangular channels with big aspect ratio were studied. The results show that the low frequency flow rate pulsation does not arouse the distortion of velocity profile. There is a phase lag between the pressure drop and flow rate, and the phase lag is related to the narrow edge length of the channel, fluid viscosity and the pulsating period. The bigger the pulsating period or the viscosity is, the smaller the phase lag is. The longer the narrow edge is, the larger the phase lag is. In addition, the pulsation amplitude is not related to the phase lag. The phenomena are discussed based on the mathematical model.

**Key words:** rectangular channel; pulsating laminar flow; phase lag; low frequency

反应堆在受到周期性变化的外力场作用而处于起伏、摇摆等状态时,由于运动引起的附加加速度会导致冷却剂出现周期性的脉动<sup>[1]</sup>,对反应堆内的热工水力特性产生影响。近年来国内外对不同驱动力造成的脉动流流动特性进行了大量的理论及实验研究<sup>[2]</sup>,研究发现脉动流

动状态的阻力特性与定常流动时存在差别<sup>[3-6]</sup>;摩擦压降随流量脉动而脉动,且二者之间存在相位差<sup>[7-9]</sup>,在相同流速时,加速区的摩擦压降大于减速区的<sup>[9]</sup>。但迄今为止,所有研究均是基于圆管内的流动进行的,未对相位差的形成机理及影响因素进行分析。

收稿日期:2011-07-13;修回日期:2011-09-13

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(HEUCFZ1008)

作者简介:王 畅(1985—),男,湖南益阳人,博士研究生,核能科学与工程专业

本工作通过建立数学模型,对大宽高比矩形通道内层流区脉动流动流速与压降间的相位差进行研究。

## 1 相位差分析模型

根据文献[7-9]可知,当流速发生脉动时,如图1所示,压降也随之以相同周期脉动,但两者之间存在相位差,且相位差随脉动参数改变而发生变化。

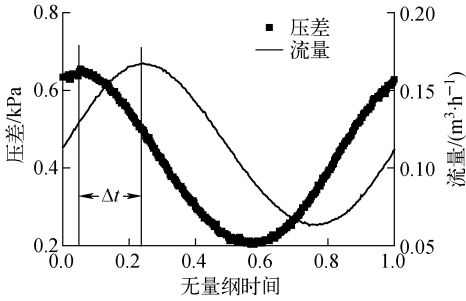


图1 相位差示意图<sup>[8]</sup>

Fig.1 Schematic of phase lag<sup>[8]</sup>

### 1.1 基于变量分离法分析

如图2所示,对于宽为 $W$ 、高为 $H$ 的窄矩形通道,当其宽高比较大时,可视其为平板通道,假定流道内单相不可压缩流体流动已进入充分发展状态,其控制方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

边界条件: $y = \pm H/2, u = 0; y = 0, \partial u / \partial y = 0$ 。

式中: $p$ 为流体受到的静压,Pa; $\nu$ 为流体运动粘性系数, $\text{m}^2/\text{s}$ ; $\rho$ 为流体密度, $\text{kg}/\text{m}^3$ ; $u$ 为瞬时截面平均速度, $\text{m}/\text{s}$ 。

假设不可压缩流体在驱动力的作用下按正弦规律脉动,根据 Moschandreou 等<sup>[10]</sup>的方法,

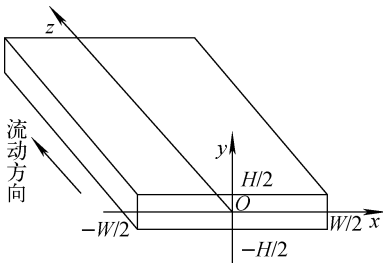


图2 坐标示意图

Fig.2 Schematic of coordinates

压力梯度可分解为稳态压力梯度 $\partial p_s / \partial z$ 与瞬态振荡压力梯度 $\partial p_t / \partial z$ 的叠加,因此有:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{\partial p_t}{\partial z} = \frac{\partial p_s}{\partial z} (1 + A^* \sin \omega t) \quad (2)$$

式中: $A^*$ 为相对振幅; $\omega$ 为脉动频率, $\text{rad}/\text{s}$ 。

同样,速度分布也可分解为稳态速度 $u_s(y)$ 与瞬态振荡速度 $u_t(y,t)$ 的叠加,即:

$$u(y,t) = u_s(y) + u_t(y,t) \quad (3)$$

将式(2)、(3)代入式(1),得:

$$\frac{\partial(u_s + u_t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_s}{\partial z} + \frac{\partial p_t}{\partial z} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

对式(4)进行变量分离,得:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_t}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2} \quad (6)$$

边界条件: $y = \pm H/2, u_s = 0, u_t = 0; y = 0, \partial u_s / \partial y = 0, \partial u_t / \partial y = 0$ 。

对式(5)、(6)分别求解可得稳态速度及瞬态振荡速度在 $y$ 轴方向的分布。式(5)的解为:

$$u_s(y) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d p_s}{d z} \cdot \frac{y^2 - (H/2)^2}{2} \quad (7)$$

对式(7)进行积分,解得的截面平均速度为:

$$u_{s,m} = -\frac{H^2}{12\mu} \cdot \frac{d p_s}{d z} \quad (8)$$

对于瞬态振荡速度,所受到的压力梯度变化规律为:

$$\frac{\partial p_t}{\partial z} = -\frac{12\mu A^* u_{s,m}}{H^2} \sin \omega t \quad (9)$$

由于式(4)为线性微分方程,为便于计算,将式(9)写成复数形式:

$$\frac{\partial p_t}{\partial z} = i \frac{12\mu A^* u_{s,m}}{H^2} e^{i\omega t} \quad (10)$$

式中, $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ ,其中只有实部具有物理意义。

假设速度分布函数的形式为:

$$u_t(y,t) = f(y) e^{i\omega t} \quad (11)$$

将式(10)、(11)代入式(6),得:

$$f'' - \frac{i\omega}{\nu} f = i \frac{12\mu A^* u_{s,m} / H^2}{\mu} \quad (12)$$

解式(12)<sup>[11]</sup>可得:

$$u_t(y,t) = \Re \left( -\frac{12\mu A^* u_{s,m}}{\omega H^2} \cdot \left( 1 - \frac{2 \cosh((1+i)Ny)}{\cosh((1+i)NH)} \right) e^{i\omega t} \right) \quad (13)$$

式中:  $\Re(\ )$  表示取变量的实部;  $N = \sqrt{\omega/2\nu}$ 。

由文献[12]可知, 在船舶摇摆或起伏引起的流量脉动频率范围内,  $NH/2 < 1$ , 因此有:

$$\cosh(NH/2) \approx 1 + (NH/2)^2/2 \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 取其实部并简化得:

$$u_1(y, t) = \frac{6A^* u_{s,m}}{H^2} [(H/2)^2 - y^2] \sin(\omega t - \phi) \quad (15)$$

式中,  $\phi = \arctan \sqrt{\pi H^2/4\nu T}$ 。

由式(15)可见, 瞬态振荡速度与驱动压头之间存在相位差, 相位差只受流体粘性、窄边尺寸及脉动周期的影响。以 20 °C 的水为工质, 不考虑流道宽边的影响, 相位差随脉动周期及窄边尺寸的变化规律如图 3 所示, 脉动周期越大, 相位差越小; 窄边尺寸越大, 相位差越大。

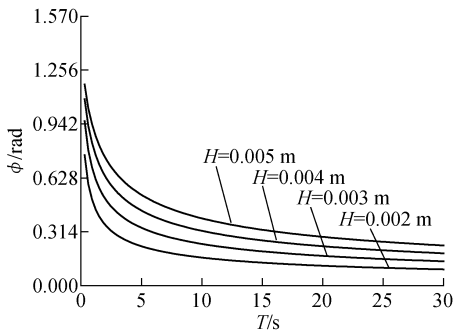


图 3 基于变量分离法的相位差分析

Fig. 3 Analysis of phase lag based on method of separation of variables

## 1.2 基于受力平衡分析

由上节分析可知, 在低频率脉动流动时, 矩形通道内的速度分布并不发生变化。如图 4 所示, 取长边为  $\Delta z$ 、窄边为  $H$  及宽度为  $W$  的矩形流体微团作为分析对象, 假设流体微团在驱动力及壁面切应力的共同作用下, 速度随时间发生周期性的脉动, 流动速度变化规律为:

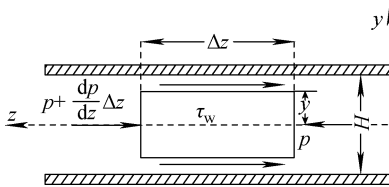


图 4 受力分析图

Fig. 4 Schematic of force analysis

$$u(t) = u_{s,m} + u_{t,m} \sin \omega t \quad (16)$$

式中:  $u(t)$  为瞬时截面平均速度, m/s;  $u_{t,m}$  为速度脉动幅度, m/s;  $t$  为时间, s。

建立受力平衡方程为:

$$2yW\Delta z\rho \frac{du(t)}{dt} = 2yWp - 2yW\left(p + \frac{dp}{dz}\Delta z\right) - 2(2y)\Delta z\tau_{w,x} - 2W\Delta z\tau_{w,y} \quad (17)$$

式中,  $\tau_w$  为壁面切应力, Pa。

根据牛顿切应力公式:

$$\tau_{w,x} = -\mu \frac{du(x)}{dx}, \tau_{w,y} = -\mu \frac{du(y)}{dy} \quad (18)$$

式中:  $u(x)$  为流体在距流道窄边中心  $x$  处的速度, m/s;  $u(y)$  为流体在距流道宽边中心  $y$  处的速度, m/s。

将式(18)代入式(17), 得:

$$yW \frac{dp}{dz} - 2y\mu \frac{du(x)}{dx} - W\mu \frac{du(y)}{dy} + \rho yW \frac{du(t)}{dt} = 0 \quad (19)$$

根据 Ohmi 等<sup>[13]</sup>的研究可知, 当前脉动频率范围内的流动仍处于“准稳态区”, 脉动流动的速度分布与相同驱动力时的定常流动完全相同, 此外, 由式(8)、(13)计算得到的速度分布也证实了这一点。因此, 低频率脉动流动的壁面切应力计算方式与定常流动相同, 由文献[8]可知, 牛顿流体在矩形通道内的定常层流流动速度分布为:

$$u(x, y) = \frac{16}{\mu\pi^2} \left(-\frac{dp}{dz}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sin \frac{(2m+1)\pi x}{W} \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi y}{H} \right) / \left( (2m+1)(2n+1)\pi^2 \cdot \left( \frac{(2m+1)^2}{W^2} + \frac{(2n+1)^2}{H^2} \right) \right) \quad (20)$$

宽边、窄边受到的壁面切应力分别为:

$$\tau_{w,x} = -\mu \left( \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-W/2} dy + \int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=W/2} dy \right) \quad (21)$$

$$\tau_{w,y} = -\mu \left( \int_0^W \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-H/2} dx + \int_0^W \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=H/2} dx \right) \quad (22)$$

$$\frac{\tau_{w,x}}{\tau_{w,y}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H}{W} \cdot \frac{2m+1}{2n+1} \quad (23)$$

对于大宽高比矩形通道, 由于其宽边远大于窄边, 由式(23)可知, 窄边受到的壁面切应力完全可忽略, 因此式(19)可简化为:

$$du(y) = \frac{\gamma\rho \frac{du(t)}{dt} + \gamma \frac{dp}{dz}}{\mu} dy \quad (24)$$

整理式(24),得:

$$du(y) = \left( \rho \frac{du(t)}{dt} + \frac{dp}{dz} \right) \frac{\gamma dy}{\mu} \quad (25)$$

对式(25)积分,得:

$$u(y) = \left( \rho \frac{du(t)}{dt} + \frac{dp}{dz} \right) \frac{\gamma^2}{2\mu} + C \quad (26)$$

根据无滑移边界条件, $y = \pm H/2$ 时, $u(y) = 0$ ,

因此有:

$$u(y) = \frac{(\gamma^2 - H^2/4)}{2\mu} \left( \rho \frac{du(t)}{dt} + \frac{dp}{dz} \right) \quad (27)$$

截面平均速度为:

$$u(t) = -\frac{H^2}{12\mu} \left( \rho \frac{du(t)}{dt} + \frac{dp}{dz} \right) \quad (28)$$

令  $\frac{dp}{dz} \approx -\frac{\Delta p}{L}$ , 则式(28)可变为:

$$\frac{\Delta p}{L} = \rho \frac{du(t)}{dt} + \frac{12\mu u(t)}{H^2} \quad (29)$$

将式(16)代入式(29)并简化,得:

$$\Delta p/L = A \sin(\omega t + \phi) + B \quad (30)$$

$$\phi = \arctan(\pi H^2 / 6\nu T) \quad (31)$$

式中: $A = \sqrt{(\rho u_{s,m} \omega)^2 + (12\mu u_{s,m} / H^2)^2}$ ;  $\omega = 2\pi / T$ ;  $B = 12\mu u_{s,m} / H^2$ 。

由式(27)可知,当不考虑宽边尺寸的影响时,矩形通道内脉动流动流量与压降之间的相位差只与脉动周期、流体粘性及通道窄边尺寸相关,与脉动振幅无关。由式(31)计算得到的相位差变化规律如图5所示,相位差随矩形通道窄边尺寸增加而增加,随脉动周期增加而减小,随粘性增大而减小。

## 2 影响因素分析

脉动流与定常流动的主要区别有两点:1)由

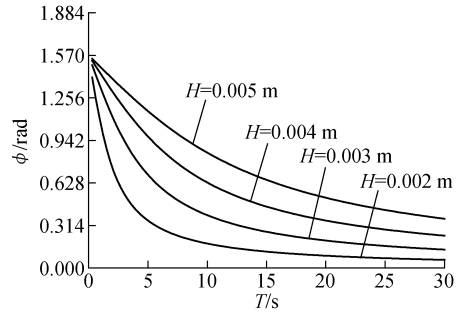
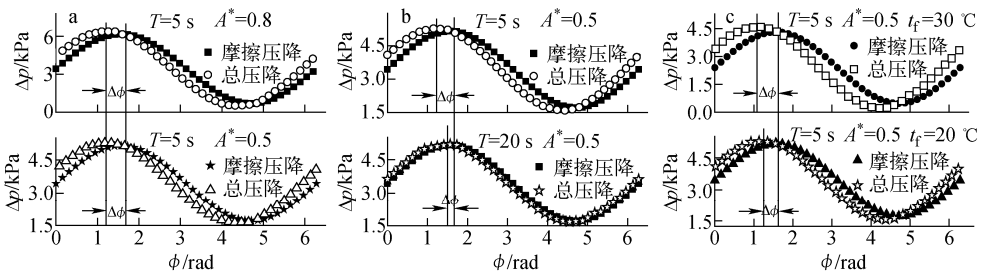


图5 基于受力分析模型的相位差分析  
Fig. 5 Analysis of phase lag based on force analyses model

于速度连续变化导致存在加速度;2)速度周期性变化可能导致速度分布发生变化<sup>[8]</sup>。而根据式(7)、(15)可知,在当前较低脉动频率范围内,速度分布未出现“环状效应<sup>[7,14]</sup>”,即流量脉动未引起速度分布发生改变,阻力特性主要受加速度的影响。

由式(29)可知,脉动流的压降由摩擦压降及加速度引起的加速压降组成,且摩擦压降始终与速度同相,而加速压降与速度反相,因此,摩擦压降与总压降间的相位差即为速度与压降之间的相位差。以窄边间隙为0.002 m的大宽高比矩形通道为例(图6),对于温度为20℃的水,由图6a可知,当脉动周期相同、脉动振幅发生变化时,振幅越大,即流动最大速度越大,因此流体所受的加速度越大,相应的摩擦压降也越大,两者的综合作用导致振幅对相位差无影响;如图6b所示,当振幅相同、脉动周期发生改变时,流体受到的摩擦压降不发生变化,而加速度随脉动周期增大而减小,相位差也相应减小。此外,由于水的温度越高,其粘性越小,在相同脉动参数条件下,当水温发生变化时,如



a——脉动振幅;b——脉动频率;c——流体粘性

图6 相位差的影响因素

Fig. 6 Effect of parameters on phase lag

图 6c 所示, 流体粘性越大, 相位差越小。当流体平均速度、脉动参数相同时, 由于水的密度变化极小, 因此其受到的加速压降变化极小。而流体粘性越大, 所受到的摩擦压降也越大, 其在总压降中占的份额也越大, 而摩擦压降始终与速度同相, 因此相位差越小。

### 3 结论

通过对大宽高比矩形窄通道内层流区低频率脉动流相位差进行分析, 得到以下结论。

1) 脉动流动时速度与摩擦压降之间的相位差真实存在, 该相位差与脉动周期、流体粘性及流道尺寸相关, 脉动周期或流体粘性越大, 相位差越小; 流道窄边尺寸越大, 相位差越大; 脉动振幅的变化对相位差无影响。

2) 在低频率脉动流动区域, 脉动并未导致速度分布发生改变, 加速度导致流速与压差之间出现相位差。

### 参考文献:

- [1] PENDYALA R, JAYANTI S, BALAKRISHNAN A R. Flow and pressure drop fluctuations in a vertical tube subject to low frequency oscillations [J]. Nuclear Engineering and Design, 2008, 238: 178-187.
- [2] CARPINLIOGLU M O, GUNDOGDU M Y. A critical review on pulsatile pipe flow studies directing towards future research topics[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2001, 12: 163-174.
- [3] 曹夏昕, 阎昌琪, 孙立成. 摇摆状态下竖管内单相水阻力特性实验研究[J]. 核动力工程, 2007, 28(3): 51-55.  
CAO Xiaxin, YAN Changqi, SUN Licheng. Pressure drop characteristics of single-phase flow in vertical rolling pipes[J]. Nuclear Power Engineering, 2007, 28(3): 51-55(in Chinese).
- [4] 谭思超, 高璞珍, 苏光辉. 摇摆运动条件下自然循环流动的实验和理论研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2007, 28(11): 1 213-1 217.  
TAN Sichao, GAO Puzhen, SU Guanghui. Experimental and theoretical study on natural circulation flow under rolling motion condition[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2007, 28(11): 1 213-1 217(in Chinese).
- [5] 张金红, 阎昌琪, 曹夏昕. 摇摆状态下水平管中单相水的摩擦阻力实验研究[J]. 核动力工程, 2008, 29(4): 44-49.  
ZHANG Jinhong, YAN Changqi, CAO Xiaxin. Experimental study on single-phase liquid friction factor in rolling horizontal pipe[J]. Nuclear Power Engineering, 2008, 29(4): 44-49 (in Chinese).
- [6] ZHAO T S, CHENG P. The friction coefficient of a fully developed laminar reciprocating flow in a circular pipe[J]. Int J Heat Fluid Flow, 1996, 17: 167-172.
- [7] WOMERSLEY J R. Method for the calculation of velocity rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known[J]. J Physiol, 1955, 127: 553-563.
- [8] QI X G, SCOTT D M, WILSON D I. Modelling laminar pulsed flow in rectangular microchannels [J]. Chemical Engineering Science, 2007, 63: 2 682-2 689.
- [9] 贾辉, 谭思超, 高璞珍. 不稳定条件下水平管单相水流动阻力特性实验研究[J]. 原子能科学技术, 2011, 45(2): 168-173.  
JIA Hui, TAN Sichao, GAO Puzhen. Experimental study on horizontal single phase water flow resistance characteristics under unsteady flow condition [J]. Atomic Energy Science and Technology, 2011, 45(2): 168-173(in Chinese).
- [10] MOSCHANDREOU T, ZAMIR M. Heat transfer in a tube with pulsating flow and constant heat flux[J]. Int J Heat Mass Transfer, 1997, 40(10): 2 461-2 466.
- [11] SCHLICHTING H, GERSTEN K. Boundary-layer theory[G]. New York: Springer, 1999.
- [12] ISHIDA T, YORITSUNE T. Effects of ship motions on natural circulation of deep sea research reactor DRX[J]. Nuclear Engineering and Design, 2002, 215: 51-67.
- [13] OHMI M, IGUCHI M, USUI T. Flow pattern and frictional losses in pulsating pipe flow: Part 5. Wall shear stress and flow pattern in a laminar flow[J]. Bulletin of the JSME, 1981, 24: 75-81.
- [14] RICHARDSON E G, TYLER E. The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established[J]. Proceedings of the Physical Society, 1929, 42: 1-15.