

文章编号:1003-207(2012)04-0037-08

# 基于随机便利收益的不完全市场商品期货定价研究

危慧惠, 樊承林, 朱新蓉

(中南财经政法大学金融学院, 湖北 武汉 430073)

**摘要:**商品的弱流动性导致了商品期货市场的 incompleteness。本文在现有商品便利收益期货定价模型的基础上, 考虑了商品期货市场的 incompleteness 及现货价格的 Poisson 跳跃过程, 运用随机贴现因子与随机便利收益将商品现货价格与期货价格连接, 提出了随机便利收益下期货市场 incompleteness 的期货定价模型。为检验模型的适用性, 利用上海期货交易所五只铜期货合约的交易数据对模型进行实证, 并估计不完全参数, 结果表明由于 incompleteness 而导致的期货市场部分波动应主要归因于商品的随机便利收益。

**关键词:**随机便利收益; 不完全市场; 随机贴现

**中图分类号:**F224; **文献标识码:**A

## 1 引言

完全市场下商品期货定价可分为单因素、双因素和多因素模型。单因素模型以 Black<sup>[1]</sup>, Brennan 等<sup>[2]</sup>的几何布朗运动及 Bjerksund 等<sup>[3]</sup>的均值回复模型为代表。Bessembinder 等<sup>[4]</sup>指出期货收益波动率的期限结构是斜率为负且向下倾斜, 单因素模型不能拟合商品期货收益波动率的这种特征。Gibson 等<sup>[5]</sup>提出基于现货价格和随机便利收益的双因素定价模型, 假定现货价格服从一个扩散过程, 与实证表明**的强均值回复现象不相吻合**。Schwartz<sup>[6]</sup>的改进假定现货结果符合均值回复与几何布朗运动特征, 使得该模型成为商品期货双因素定价的基准模型。Yan<sup>[7]</sup>运用黄金与原油数据验证了商品期货收益分布情况, 发现商品期货收益分布呈峰态分布并呈随机波动, 价格与波动率存在跳跃行为并存在“波动率微笑”现象。Yan 提出了基于随机便利收益、随机利率、现货价格与波动率的随机跳跃和波动的多因素模型。Eydeland 等<sup>[8]</sup>和 Casassus 等<sup>[9]</sup>研究发现三因素模型能较好地描述商品期货价格的动态变化。Juan 等<sup>[10]</sup>提出的高斯完全市场模型假定商品的随机便利收益是商品历史现货价格变化的加权平

均的仿射函数, 等价鞅测度下该模型展示出弱均值回复特征, 能更好地拟合商品期货收益波动率向下倾斜的负的期限结构。

上述完全市场假设下, 或有权价值可通过标的资产组合复制, 等价鞅测度和风险价格唯一, 衍生证券价值被唯一确定。然而真实世界存在多个等价鞅测度, 尤其是处理不可交易变量, 如随机波动率、跳及天气等变量时, 完全市场假设完全失效。不完全市场不存在唯一的等价鞅测度, 对特定的金融衍生证券, 有无数无套利过程存在, 只能推导一个无套利边界, 得到金融资产价格区间。Cochrane<sup>[11]</sup>等提出了一般意义的不完全市场理论, 核心思想是利用均衡原理, 引入随机贴现因子并施以适当限制性条件, 在风险资产未来支付不确定情形下计算风险资产价格, 得到一个区间 (good deal), 该区间边界在很大程度上收窄了风险资产的价格边界。Bjork 等<sup>[12]</sup>引入 Merton 跳扩散 (Merton - jump diffusion model), 推导了拓展的 Hansen Jagannathan 边界。Bondarenko<sup>[13]</sup>以金融期权为研究对象, 对随机波动率下不完全区间边界进行了验证。一直以来, 不完全性研究偏重对金融衍生资产的边界约束、最优区间及定价等问题。

与金融衍生品相比, 商品期货市场的 incompleteness 来源于商品的弱流动性, 与商品便利收益的有直接的关系。Working<sup>[14]</sup>发现便利收益存在于美国小麦期货市场, 并提出库存理论。Carter<sup>[15]</sup>认为便利收益是由于大量存货带来的便利而引起的预期收益溢价的现值。Brennan<sup>[16]</sup>把便利收益界定为实物商品

收稿日期:2011-05-17; 修订日期:2012-06-26

基金项目:国家社会科学基金资助项目(12BJY154)

作者简介:危慧惠 (1971-), 女(汉族), 湖北安陆人, 中南财经政法大学金融学院副教授, 研究方向:金融工程、公司金融。

自然产生的增值收益流。Canteking<sup>[17]</sup> 得出了便利收益与商品存货量负相关的结论,量化了存货量对便利收益的影响。传统便利收益被设定为存储成本或现货价格的固定比例,然而真实便利收益是一个随机变量,正是便利收益的随机性导致了商品期货市场的不完全性。Schwartz<sup>[18]</sup> 和 Sami<sup>[19]</sup> 研究了外生变量导致的随机便利收益的一般特征。

随机便利收益可以描述为一种交易策略期权,其值为两种相反交易策略所获收益之差。假定交易者处于现货或期货市场多头,具有完全的市场择机和价格预测能力,交易策略存续期为当前日至合约到期日,交易利润可近似为一份美式期权的价值,该期权使持有者在现货价格在持有期间上升到足够高时卖出现货,并在期货合约到期日时买回现货。假定现货价格和期货价格均服从维纳过程,Longstaff<sup>[20]</sup> 给出了该期权的定价公式。Heaney<sup>[21]</sup> 以 Longstaff 的研究为基础,采用一个简单交易策略近似地估计了便利收益的影响,该方法采用标的资产价格波动率,期货合约价格波动率及合约到期时间等变量,利用伦敦金属交易所铜、石墨和锌的价格对 1975 年到 2000 年的价格进行了估计,结果表明无论是统计上还是经济上,便利收益都对解释现货和期货之间的关系十分重要。安宁等<sup>[22]</sup> 根据便利收益的期权性质及其定价,表明中国商品期货便利收益表现出与传统理论相异的特性,呈周期性变化。邹绍辉(2008)<sup>[23]</sup> 认为煤炭资源采矿权可被看做一个多期和多阶段的复合看涨期权,随机便利收益在解释煤炭期货价格和现货价格联系方面具有显著的经济价值。以上学者对于随机便利收益特性的探讨为商品期货市场的不完全性研究打下了很好的基础。

与 Longstaff<sup>[20]</sup> 和 Heaney<sup>[21]</sup> 等的研究有所不同,本文重点在于考察随机便利收益带来的期货市场的不完全程度,没有采用交易策略期权来度量便利收益,而是以便利收益所满足的随机微分方程为切入点,将便利收益导致的波动率拆分为完全和不完全部分,通过状态空间转移,进而估计得到随机便利收益所导致的期货市场不完全参数。

本文第一部分以 Schwartz<sup>[18]</sup> 的商品现货价格的双因素模型为切入点,基于商品市场的不完全性,引入了随机贴现因子和现货价格的跳跃特征,推导了基于随机便利收益的商品期货定价模型。第二部分是对模型参数的设定。运用状态空间转移方程处理不可观测但服从马尔科夫过程(即无后效性过程)

的状态变量,建立了状态空间转移方程。第三部分运用上海期货交易所铜期货数据,采用卡尔曼滤波(Kalman filter algorithm)对参数进行了估计。第四部分的结果表明中国商品期货市场的不完全性较大程度上来源于商品的便利收益。文中变量符号说明如下:

- $S_t$  : 商品的现货价格;
- $\mu_s$  : 基于商品现货价格瞬时预期收益总和;
- $\delta_t$  : 随机便利收益;
- $\sigma_s$  : 基于商品现货价格的瞬时收益波动率;
- $dW_s, dW_\delta$  : 标准的布朗运动增量;
- $\Lambda_t$  : 随机贴现因子;
- $dq_j$  : 发生跳的点过程;
- $k$  : 商品随机便利收益的均值回复速率;
- $\mu_\delta$  : 商品便利收益的长期均值;
- $\sigma_\delta$  : 商品便利收益的瞬时波动率;
- $\rho$  :  $dW_s, dW_\delta$  的相关系数。

## 2 随机便利收益下商品期货的价值确定

Schwartz<sup>[18]</sup> 提出的商品现货价格的双因素模型是商品衍生产品定价的基准,被众多学者进行引用,该模型较好地捕捉到了商品价格的各种特征,能够模拟商品价格的实际动态变化过程。现货价格及便利收益服从如下随机微分方程:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_s - \delta_t - \lambda\mu_j)dt + \sigma_s dW_s + Jdq_j \quad (1)$$

$$Prob(dq_j = 1) = \lambda dt$$

$$\ln(1 + J) \sim N(\ln(1 + \mu_j) - \frac{1}{2}\delta_j^2, \delta_j^2)$$

$$\mu_j = E(J), d\delta_t = k(\mu_\delta - \delta_t)dt + \sigma_\delta dW_\delta$$

这里没有利用 Brown 运动来描述商品现货价格,是因为 Brown 运动刻画的是连续变化过程,本文为了反映商品现货价格的不连续性,采用跳跃—扩散模型,即在 Brown 运动的基础上加上一个 Poisson 过程。其中  $\lambda dt$  是现货价格发生跳跃的概率,  $\lambda$  为跳跃强度,  $J$  为跳跃幅度的独立的同分布随机变量。

Schwartz<sup>[18]</sup> 利用风险中性原理为商品期货定价,但对概率测度空间(等价鞅)的确定还存在分歧。根据 Cochrane<sup>[24]</sup> 对不完全市场的描述,由于商品有不同于普通金融产品的弱流动性特点,商品期货市场是不完全的,而风险中性假设是针对完全市场的,运用风险中性原理为商品期货进行定价存在一定偏差。

利用随机便利收益和随机贴现因子为商品期货定价基于两点考虑。第一,因为便利收益可解释商品期货曲线由于现货溢价和期货溢价而造成的向上或者是向下倾斜,是解释商品现货价格与期货价格关系的有力解释变量,便利收益还可以解释市场不完全性带来的波动性。第二,采用随机贴现因子资产定价理论计算商品期货价格有一定的研究基础,如 Jimmy<sup>[25]</sup> 和 Cochrane<sup>[11]</sup> 的研究。基于以上分析,本文引入随机贴现因子描述商品期货价格与现货价格之间的关系,期货价格  $F_t^T$  可表示为如下形式:

$$F_t^T = E_t \left[ \frac{\Delta_T}{\Delta_t} S_T \right] \quad (2)$$

其中  $F_t^T$  表示时刻  $T$  到期的在时刻  $t$  的价格,  $\Delta_t$  表示时刻  $t$  的随机贴现因子,  $S_T$  表示商品在  $T$  时刻的现货价格。随机贴现因子  $\Delta_t$  可表示为如下形式:

$$\frac{d\Delta_t}{\Delta_t} = -rdt - \rho dW_s - \nu dZ \quad (3)$$

$\rho$  代表完全市场的风险价格参数, Cochrane<sup>[24]</sup> 的研究中所得数据是 0.814,  $\nu$  表示不完全市场风险价格参数,  $dZ$  代表商品期货市场的风险冲击。

基于 Cochrane<sup>[11]</sup> 关于不完全市场“Good - Deal”边界中市场不完全性的描述,相关系数  $\rho$  表示商品现货的波动率与商品便利收益波动率之间的相关性,可将商品便利收益的波动率分为完全和不完全部分,即:

$$dW_\delta = \rho dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} dZ \quad (4)$$

式(4)等号右边的第一项  $\rho dW_s$  代表商品现货市场,第二项  $\sqrt{1 - \rho^2} dZ$  是商品期货市场。运用 Itô 定理将式子(1)展开,可得到:

$$\begin{aligned} & (\mu_S - \mu_\delta - \lambda \mu_J - \frac{1}{2} \sigma_S^2) (T-t) + \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}) (\delta_t - \mu_\delta) \\ & + \int_t^T (\sigma_S + \frac{\sigma_S \rho}{k} (1 - e^{-k(T-s)})) dW_s \\ & + \int_t^T \left( \frac{\sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2}}{k} (1 - e^{-k(T-s)}) \right) dZ_s \end{aligned} \quad (5)$$

$$S_T = S_t e^{-\lambda \int_t^T (1 - e^{-k(T-s)}) \ln(1+J) dq_J}$$

同样运用 Itô 引理将式(3)展开得到:

$$\frac{\Delta_T}{\Delta_t} = e^{-(r + \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \nu^2) (T-t) - \int_t^T \nu dW_\nu} \quad (6)$$

将式(5)和式(6)代入式(2),化简可得:

$$F_t^T = S_t e^{\hat{r}(t, T) - \zeta(t, T) \delta_t} \quad (7)$$

其中:

$$\hat{r}(t, T) =$$

$$\left( -\mu_\delta - \lambda \mu_J + \frac{\sigma_\delta^2}{2k^2} - \frac{\sigma_S \sigma_\delta \rho}{k} + \psi \frac{\sigma_\delta}{k} + \frac{\nu \sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2}}{k} \right)$$

$$(T-t) + \frac{\sigma_\delta^2}{4k^3} (1 - e^{-2k(T-t)}) + \left( \mu_\delta k + \rho \sigma_S \sigma_\delta - \frac{\sigma_\delta^2}{k} - \nu \sigma_\delta \rho - \nu \sigma_\delta \sqrt{1 - \rho^2} \right) \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k^2} \zeta(t, T) = \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k}$$

式(7)就是基于商品便利收益为基础的商品期货定价模型,该模型将市场不完全因素引入到现货与期货价格的关系中。模型没有采用风险中性假设,而是以便利收益的市场不完全因素以及商品现货价格随时可能发生的跳跃因素为基础,采用随机贴现定价方法推演得到。此外,对于该模型的建立有两点说明:第一是由于 Schwartz(1997)指出由于商品现货价格的易变性以及不确定性,商品的现货价格较难得到。考虑到数据的可用性,本文运用商品期货临近到期日的期货价格来代替该时刻商品的现货价格,这种数据处理方法在 Gibson<sup>[5]</sup> 及 Schwartz<sup>[18]</sup> 的研究中都得到运用。第二是因为同种商品的随机便利收益这一变量也是不可观测的,本文用不同到期日的商品期货价格的对数差异作为商品随机便利收益。

### 3 模型参数的确定

由于状态变量商品现货价格和随机便利收益的不可观测性,且两个变量都满足马尔科夫过程(无后效过程),本文运用了状态空间转移方程,该方法可用于处理状态变量不可观测但服从马尔科夫过程(即无后效性过程)的变量。在建立状态空间转移方程后,就可以运用期货数据,采用卡尔曼滤波(Kalman Filter)方法和极大似然估计对模型的参数进行估计。

第一步是采用卡尔曼滤波定义参数。为了将上述的动态系统方程转化为状态空间形式,可引用卡尔曼滤波来确定该模型中的参数,如  $k, \mu_S, \sigma_S, \mu_\delta, \sigma_\delta, \rho, \nu, \lambda$  等。状态空间形式可将不可测的变量(即状态变量)并入可观测模型并与其一起得到估计结果。这里需要说明的是,一般状态空间的形式适用于不可观测的多变量时间序列,即商品的现货价格和商品的随机便利收益,可用量测方程表示。本文中的量测方程是由对式(7)进行一次变量替换之后得到。与式(7)相比,量测方程多一项干扰项  $\xi_t, \xi_t$ , 满足  $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = C, C$  为常数。干扰项是考虑买卖价差、价格限制、观测结果的非同时性及数据的误差等因素影响或不可观测变量(商品现货价格和随机便利收益)的变动。状态变量通过状态转移方程产生,也就是式(5)和(6)的离散化形式。具体

方法是采用信号与噪声的状态空间模型,利用前一时刻的估计值和现在时刻的观测值来更新对状态变量的估计,以求出现在时刻的估计值。

第二步是利用最大似然法估计参数。定义  $\Theta$  如下形式:

$$\Theta = (k, \mu_S, \sigma_S, \mu_\delta, \sigma_\delta, \rho, \nu, \lambda, \sigma_\epsilon, \sigma_\gamma, \sigma_\zeta) \quad (8)$$

式(13)括号中的最后三个变量  $(\sigma_\epsilon, \sigma_\gamma, \sigma_\zeta)$  为估计误差。 $\Theta$  可以利用估计误差和协方差矩阵用极大似然估计得出,并得到未知参数。参数定义和估计步骤详见附录。

#### 4 模型应用及验证

本文选取上海期货交易所沪铜 Cu1001、Cu1002、Cu1003、Cu1004 和 Cu1005 五只期货合约交易数据,共计 1163 个数据。Cu1001 作为样本外数据用来检验模型,Cu1002、Cu1003、Cu1004 和 Cu1005 四只合约作为样本内数据来估计模型中的参数。如前所述,由于商品现货价格的易变性及不确定性,商品的现货价格极难得到,考虑到数据的可用性,本文运用商品期货临近到期日的期货价格来代替该时刻商品的现货价格;同样,商品的随机便利收益这一变量也是不可观测的,本文借鉴 Schwartz<sup>[18]</sup> 的处理方法,即用不同到期日的商品期货价格的对数差作为商品的随机便利收益。对于瞬时利率的不可观测性,应用 SHIBOR 同期的数据作为瞬时利率的代理变量。从铜期货价格变化趋势可知,铜期货价格的时间序列是非平稳的,表现出很强的趋势性,波动率很小(相对于其数值),服从随机过程,这与初始假设符合。但是当取过一阶差分后该序列是平稳序列,对铜期货数据进行一阶差分之后,在 1%,5%,10% 的显著水平下均通过检验,表明该时间序列为单整序列,检验结果见表 1。

结合上海期货交易所 Cu1002、Cu1003、Cu1004 和 Cu1005 四只期货合约的交易数据,利用极大似然估计法,用 Matlab 数据处理软件设计程序,实现参数估计结果,得到所有需要估计的参数,见表 2。

从表 2 可以看出,除了商品价格  $\mu_S$  和商品价格波动率  $\sigma_S$ ,其他参数在 5% 的显著水平下都通过检验。 $\mu_S$  和  $\sigma_S$  的不显著主要是模型中商品的现货价格是利用临近期货合约到期日的标的资产的价格来代替,存在一定误差。

表 1 上海期货交易所期货交易所数据基本统计值

期货合约	Cu1001	Cu1002	Cu1003	Cu1004	Cu1005
均值	43001.35	46136.04	47489.88	49395.19	50709.07
最大值	61660.00	62000.00	62130.00	62170.00	62420.00
最小值	25450.00	26660.00	30240.00	33860.00	35680.00
峰度值	1.96	2.02	1.84	1.83	1.99
偏斜度	-0.08	-0.09	-0.15	-0.22	-0.29
中值	42910.00	48045.00	48785.00	49850.00	50865.00
标准差	9722.99	8674.40	8624.91	8060.45	7353.36
样本容量	244	229	243	234	213

参数  $\kappa$  表示商品随机便利收益的均值回复速率,该值为 0.64 说明商品的随机便利收益表现了出较强的均值回复现象,与式(4)假设相吻合;便利收益的期望均值  $\mu_\delta$  和便利收益的瞬时波动率  $\sigma_\delta$  均是显著的;商品现货价格的变动及便利收益变动之间的瞬时相关性系数  $\rho$  为 0.95,比 Schwartz<sup>[18]</sup> 的 0.832 以及 Casassus 等<sup>[9]</sup> 的 0.800 略大,说明我国沪铜商品的现货价格与商品的便利收益显著相关;不完全市场的风险价格参数  $\nu$  为 -0.834,商品现货价格发生跳跃的强度  $\lambda$  为 0.971,与 Schwartz<sup>[18]</sup> 的 1 相比,均通过检验。估计误差  $\sigma_\epsilon, \sigma_\gamma, \sigma_\zeta$  在 0.003 和 0.023 之间浮动,基本趋近于零,按 Schwartz<sup>[18]</sup> 及 Juan<sup>[10]</sup> 的论述,样本的容量足够大的情况下,该估计误差将很小,由此证明了 Kalman 滤波的可行性。

由于衡量商品价格波动和随机便利收益之间相关程度的变量(相关系数)  $\rho$  为 0.95,比较接近完全相关系数 1,表明由于市场的不完全性而造成的波动的大部分是由于便利收益的波动造成的。此外,由于不完全市场的风险价格参数  $\nu$  值是负数,为计算需要,可将式(4)改写为:

$$\frac{d\Delta_t}{\Delta_t} = -rdt - \phi dW_S - (-\nu) dW_v \quad (9)$$

表 2 上海期货交易所沪铜期货数据估计的模型参数

参数	$\kappa$	$\mu_S$	$\sigma_S$	$\mu_\delta$	$\sigma_\delta$	$\rho$
估计值	0.64	0.698	0.994	-0.375	0.994	0.95
概率值	(0.000)	(0.054)	(0.137)	(0.000)	(0.000)	(0.000)
参数	$\nu$	$\lambda$	$\sigma_\epsilon$	$\sigma_\gamma$	$\sigma_\zeta$	最大似然估计量
估计值	-0.834	0.987	0.023	0.020	0.010	4.298 × 10 <sup>4</sup>
概率值	(0.003)	(0.002)	(0.000)	(0.000)	(0.000)	

定义  $dW_v = -dW_v$ , 这样  $v$  的绝对值可用来表示不完全市场的不完全程度, 即不完全市场风险的价格, 这样本文运用沪铜数据计算出该市场的不完全度为 0.834, 将该数据与完全市场比较, 可计算沪铜期货市场的不完全度。

如前所述,  $\psi$  代表完全市场的风险价格的参数, 参照 Cochrane<sup>[24]</sup> 的研究数据 0.814, 该数值代表完全市场金融资产市场的风险价格的参数, 被许多学者引用并作为对不完全市场和完全市场进行比较的基准。本文的不完全市场风险价格参数  $v$  是 0.834。  $A = \sqrt{\psi^2 + v^2}$  代表不完全市场的夏普比率。由计算结果可知, 投资者为商品铜的沪铜期货定价时需要引用的夏普比率为完全市场风险价格的约 1.4 倍(不完全市场为 1.165, 完全市场为 0.814), 见表 3。

由上述分析可知, 根据沪铜数据样本计算, 得到沪铜期货市场的不完全度  $v$  为 0.834, 同时, 沪铜期货市场的夏普比率  $A$  为完全市场的 1.4 倍。该结果表明, 在为商品类衍生产品定价时, 要考虑到市场的不完全度以及风险补偿问题。由于其标的商品的特殊性(具有便利收益且不可对冲), 致使一般适合完全市场中的金融类衍生产品的定价模型不再适合为商品类衍生产品定价。

表 3 沪铜期货市场的不完全参数与完全市场参数

完全市场风险 价格 $\psi$	沪铜期货 不完全参数 $v$	沪铜期货市场 夏普比率 $A$
0.814	0.834	1.165

为验证基于上述四只期货合约估计出的模型参数的适用性, 可采用 Cu1001 期货合约的 244 个数据进行样本外验证。结果见图一, 图中实线为模型估算的期货理论价值, 虚线为期货实际观测价格, 均为对数值。

从图 1 中可以看出, 期货合约签订之时到合约中期, 模型适应较好, 基本测算误差保持在 0.2 以内, 随着时间的推移, 模型不再能很好地与实际观测值吻合。这是因为随着中途信息的释放量以及投资者对于市场的预期变化, 该模型表现出模型的不确定性也即模型风险。临近到期日时, 模型表现又是适应的, 原因在于关于本期期货合约市场信息已经释放完毕, 投资者对与该合约未来变化的预期也基本上趋于一致。此外, 由于临近到期日的期货合约的期货价格将趋向于商品现货价格, 故模型的不确定性逐渐减少。

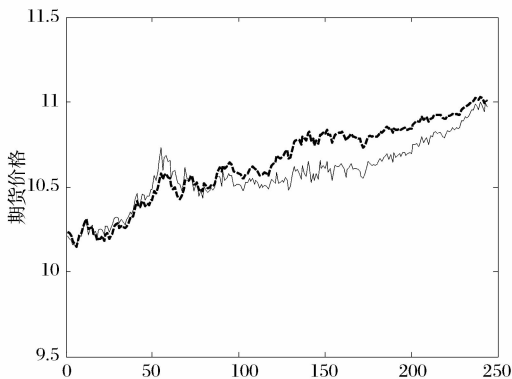


图 1 采用 Cu1001 期货合约数据检验模型

## 5 结语

本文从商品现货价格双因素模型出发, 提出了考虑便利收益的商品期货随机贴现的定价模型并进行了检验, 重点估计了由于便利收益的存在而导致的中国商品期货市场不完全参数。模型考虑了商品期货市场的不完全性及现货价格的 Poisson 跳跃过程, 运用随机贴现因子与便利收益将商品的现货价格与期货价格连接, 并采用卡尔曼滤波和极大似然估计法对模型中的参数进行了估计, 利用 Matlab 数据处理软件进行了程序设计实现参数估计。为检验模型的适用性, 利用上海期货交易所的 Cu1002、Cu1003、Cu1004 和 Cu1005 铜期货数据作为样本数据来估计模型中的参数, 并利用 Cu1001 铜期货合约数据来验证模型的适应性, 结果表明由于商品期货市场的不完全性而导致的期货市场的部分波动应归因于商品的随机便利收益。不完全市场的夏普比率约为完全市场的风险价格的 1.4 倍, 投资者在为商品类衍生产品的定价中需要谨慎考虑。另外, 由于期货合约有效生命期内信息的释放及投资者对于市场的预期使得模型的适应性有一定偏差。

本文仅运用上海期货交易所所有有色金属板块的期货数据对模型参数进行估值, 对其他商品的期货定价及不完全性有待进一步验证。对便利收益的处理还可进一步完善, 如可采用等价鞅测度下的高斯完全市场模型, 该模型假定商品随机便利收益是商品历史现货价格变化的加权平均的仿射函数。模型的应用方面, 针对商品的特殊属性导致的市场不完全性, 后续研究将着重于不完全市场条件下商品衍生产品的定价与设计, 应用于公司融资、外债风险防范等方面, 有助于有效规避金融机构系统性风险, 拓展上市公司债券直接融资渠道, 优化上市公司资本结

构。

附录

1. 采用卡尔曼滤波定义参数

为简化计算,此处将商品的现货价格作以下形式的变换,令  $x_t = \log S_t$ , 对式(1)利用在  $Ito$  引理可转化为:

$$dx_t = \left( \mu_s - \lambda \mu_J - \frac{\sigma_s^2}{2} - \delta_t \right) dt + \sigma_s dW_s \quad (1)$$

Kalman filter (KF) 由量测方程和状态转移方程构成,一方面,式(4)和(1)中的商品现货价格以及便利收益都是随时间而变化的,因此这些方程在 Kalman filter 系统中都属于状态转移方程。现将连续时间模型(1)离散化为如下形式,也就是状态转移方程:

$$x_t = x_{t-1} - \Delta t \delta_t + \left( \mu_s - \lambda \mu_J - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_s \epsilon_{t-1} \\ \equiv f_1(x_{t-1}, \delta_{t-1}, \epsilon_{t-1}) \quad (2)$$

其中干扰项  $\epsilon_t$  满足  $E(\epsilon_t) = 0, D(\epsilon_t) = \sigma^2 \Delta t$ 。

同样将连续时间模型(4)转化为如下形式:

$$\delta_t = (1 - k\Delta t) \delta_{t-1} + k\mu_\delta \Delta t + \sigma_\delta \eta_{t-1} \\ \equiv f_2(x_{t-1}, \delta_{t-1}, \eta_{t-1}) \quad (3)$$

其中干扰项  $\eta_t$  满足  $E(\eta_t) = 0, D(\eta_t) = \sigma^2 \Delta t$ 。

另一方面,在 Kalman 滤波系统的量测方程是从商品现货一期货价格关系中推导出来的。现作简单的变量代换  $y_t = \log F_t^T$ , 然后将式(10)离散化为如下形式:

$$y_t = x_t - \zeta(t, T) \delta_t + \hat{r}(t, T) + \xi_t \equiv h_1(x_t, \delta_t, \xi_t) \quad (4)$$

其中干扰项  $\xi_t$  满足  $E(\xi_t) = 0, D(\xi_t) = C, C$  为常数。

状态转移方程和量测方程可用矩阵形式表示:

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \delta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{\delta}_t \end{pmatrix} + A_t \begin{pmatrix} x_{t-1} - \tilde{x}_{t-1} \\ \delta_{t-1} - \tilde{\delta}_{t-1} \end{pmatrix} + W_t \begin{pmatrix} \epsilon_{t-1} \\ \eta_{t-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$y_t = h_1(\tilde{x}_t, \tilde{\delta}_t, 0) + B_t \begin{pmatrix} x_t - \tilde{x}_t \\ \delta_t - \tilde{\delta}_t \end{pmatrix} + V_t \xi_t \quad (6)$$

其中:

$$\tilde{x}_t = f_1(\tilde{x}_{t-1}, \tilde{\delta}_{t-1}, 0), \tilde{\delta}_t = f_2(\tilde{x}_{t-1}, \tilde{\delta}_{t-1}, 0)$$

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta t \\ 0 & 1 - k\Delta t \end{pmatrix},$$

$$W_t = \begin{pmatrix} \sigma_s & 0 \\ 0 & \sigma_\delta \end{pmatrix}, B_t = \left( 1 - \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}) \right),$$

$$V_t = 1, Q_t = \begin{pmatrix} \Delta t & \zeta \Delta t \\ \zeta \Delta t & \Delta t \end{pmatrix},$$

$\tilde{x}_t$  代表当干扰项  $\epsilon_t$  为 0 时,式(2)所得出的数值,  $\tilde{\delta}_t$  代表当干扰项  $\eta_t$  为 0 时附式(3)所得出的数值。

接着计算先验估计误差协方差矩阵和后验估计误差协方差矩阵。状态更新(转移)方程如下:

$$\hat{x}_t^- = f_1(\hat{x}_{t-1}^-, \hat{\delta}_{t-1}^-, 0), \hat{\delta}_t^- \\ = f_2(\hat{x}_{t-1}^-, \hat{\delta}_{t-1}^-, 0), \Phi_t^- \\ = A_t \Phi_{t-1}^- A_t^T + W_t \Phi_{t-1}^- W_t^T \quad (7)$$

量测更新方程如下:

$$K_t = \Phi_t^- B_t^T (B_t \Phi_t^- B_t^T + V_t R_t V_t^T)^{-1}, \\ \hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t (y_t - h_1(\hat{x}_t^-, \hat{\delta}_t^-, 0)), \\ \hat{\delta}_t = \hat{\delta}_t^- + K_t (y_t - h_1(\hat{x}_t^-, \hat{\delta}_t^-, 0)) \\ \Phi_t = (I - K_t B_t) \Phi_t^- \quad (8)$$

$K_t$  为 Kalman 增益,  $R_t$  表示对角矩阵,即  $R_t = \text{diag} [\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2]$ 。

根据上述的量测方程和状态转移方程现在定义先验估计误差和协方差矩阵:

$$e_t^- \equiv \begin{pmatrix} x_t - \hat{x}_t^- \\ \delta_t - \hat{\delta}_t^- \end{pmatrix}, \Phi_t^- \equiv E[e_t^- e_t^{-T}] \quad (9)$$

同理,可定义后验估计误差以及协方差为如下形式:

$$e_t \equiv \begin{pmatrix} x_t - \hat{x}_t \\ \delta_t - \hat{\delta}_t \end{pmatrix}, \Phi_t \equiv E[e_t e_t^T] \quad (10)$$

利用附式(7)和附(8)状态转移方程可得到估计误差  $\tilde{e}_{y_t}$  及协方差矩阵  $\sum_t$ :

$$\tilde{e}_{y_t} = y_t - h_1(\tilde{x}_t^-, \tilde{\delta}_t^-, 0), \sum_t = B_t \Phi_t^- B_t^T + V_t R_t V_t^T \quad (11)$$

2. 利用最大似然法估计参数

最大似然法的原理通常用于观测值相互独立且具有同样分布的情形,联合概率函数被给定为:

$$L(y; \Theta) = \prod_{t=1}^T P(y_t) \quad (12)$$

其中  $P(y_t)$  是第  $t$  个观测值的概率密度函数,  $L(y; \Theta)$  是样本  $y_1, y_2, \dots, y_T$  的联合概率密度函数。一旦得到样本观测值,  $L(y; \Theta)$  就可被解释为似然函数,并可通过关于  $\Theta$  求偏导数,使函数  $L(y; \Theta)$  达到最大来求出  $\Theta$  的最大似然估计  $\hat{\Theta}$ 。

然而本文商品期货价格的时间序列的一个重要特征是变量间是不独立的,因此不能直接采用式(14),而是利用条件概率密度函数代替联合概率密度函数将似然函数表示为

$$L(y; \Theta) = \prod_{t=1}^T P(y_t | Y_{t-1}) \quad (13)$$

其中  $P(y_t | Y_{t-1})$  表示  $y_t$  以直到时刻  $t-1$  信息集为条件的条件分布,即:  $Y_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1\}, P(y_t | Y_{t-1}) = P(y_t | y_1, y_2, \dots, y_{t-1})$  总体正态假定(参见本文第四部分)下,可将附式(13)的对数似然函数直接写为:

$$L(y; \Theta) = \sum_{t=1}^N \ln | \sum_t | + \sum_{t=1}^N \frac{1}{\sigma_{y_t}} \tilde{e}_{y_t} \sum_{t=1}^{-1} \tilde{e}_{y_t}^T \quad (14)$$

其中  $\tilde{e}_{y_t} = y_t - \tilde{y}_{t|t-1}, t = 1, 2, \dots, T$ 。由前面分析可知条件均值  $\tilde{y}_{t|t-1}$  是  $y_t$  的最小均方误差意义的最优估计量(MMSE),所以  $k \times 1$  向量  $\tilde{e}_{y_t}$  可作为预测误差向量来解释。

$\Theta = (k, \mu_s, \sigma_s, \mu_\delta, \sigma_\delta, \rho, \nu, \lambda, \sigma_\epsilon, \sigma_\eta, \sigma_\xi)$  是待求的未知参数向量,首先求最大似然估计的迭代公式。为求最大似然估计,需要求解:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} L(y; \Theta) = 0 \quad (15)$$

$\hat{\Theta}$  是超参数向量的精确值,采用 Taylor 展开式,取一次

近似,并设  $\bar{\theta}$  表示参数空间上的任意一点,则可将

$\frac{\partial \ln L(y; \theta)}{\partial \theta}$  表示成:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \bar{\theta}} + \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \theta} \Big|_{\theta = \bar{\theta}} (\hat{\theta} - \bar{\theta}) \quad (16)$$

令式(16)等于0可得:

$$\hat{\theta} = \bar{\theta} - \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \theta} \Big|_{\theta = \bar{\theta}} \right]^{-1} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \bar{\theta}} \quad (17)$$

可得迭代公式

$$\theta^{l+1} = \theta^l - \left[ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta \partial \theta} \Big|_{\theta = \theta^l} \right]^{-1} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} \Big|_{\theta = \theta^l} \quad (18)$$

其中  $l = 1, 2, \dots$ 。求  $\theta^{(l)}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) 的收敛值  $\lim_{l \rightarrow \infty} \theta^{(l)}$

$= \hat{\theta}$ , 即:

$$\hat{\theta} = \sum_i \frac{N_i}{N} \ln | \Sigma_i | + \sum_i \frac{N_i}{N} \tilde{e}_{y_i} \Sigma_i^{-1} \tilde{e}_{y_i}^T \quad (19)$$

## 参考文献:

- [1] Black F. The pricing of commodity contracts [J]. Journal of financial economics, 1976, (3): 167-179.
- [2] Brennan M J, Schwartz E S. Evaluating natural resource investments [J]. Journal of Business, 1985, (58): 133-155.
- [3] Bjerksund P, Ekern S. Contingent claims evaluation of mean-reverting cash flows in shipping [M]// Trigeorgis, L. Real Options in Capital Investment. London: Greenwood publishing group, 1995: 207-219.
- [4] Bessembinder H, Coughenour J F, Seguin P J, Smoller M. Is there a term structure futures volatilities? reevaluating the Samuelson hypothesis [J]. Journal of Derivatives, 1996, Winter: 45-58.
- [5] Gibson R, Schwartz E S. Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims [J]. Journal of finance, 1990 (45): 959-76.
- [6] Brennan M J, Crew N I. Hedging long maturity commodity commitments with short-dated futures contracts [M]// Dempster M A H, Pliska S R. Mathematics of derivative securities. Cambridge: Cambridge University Press, 1997: 165-190.
- [7] Yan Xuemin. Valuation of commodity derivatives in a new multi-factor model [J]. Review of Derivatives Research, 2002, (5): 251-271.
- [8] Eydeland A, Wolyniec K. Energy and power risk management: new developments in modeling, pricing, and hedging [M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2003.
- [9] Casassus J, Collin D P. Stochastic convenience yield implied from commodity futures and interest rates [J]. The Journal of Finance 2005, (60): 2283-2331.
- [10] Rodriguez J C. A preference-free formula to value commodity derivatives [C]. Discussion Paper, Center for Economic Research, Tilburg University, 2007.
- [11] Cochrane J H, Saa-Requejo J. Beyond arbitrage: good-deal asset price bounds in incomplete markets [J]. Journal of Political Economy, 2000, (108): 79-119.
- [12] Bjork T, Slinko I. Towards a general theory of good-deal bounds [J]. Review of Finance, 2006, (10): 221-260.
- [13] Bondarenko O, Longarela I R. A general framework for the derivation of asset price bounds: an application to stochastic volatility option models [J]. Review of Derivatives Research, 2009, (12): 81-107.
- [14] Working H. The theory of the price of storage [J]. American Economic Review, 1949, (39): 1254-1262.
- [15] Brennan M J. The price of convenience and the valuation of commodity contingent claims, Stochastic models and option values [M]. Elsevier Science Publishers, 1991.
- [16] Dincerler C, Khoker Z, Simin T T. The convenience yield and risk premia of storage [R]. Working Paper Series, 2004.
- [17] Carter C. Commodity futures markets: a survey [J]. Australian Journal of Agricultural & Resource Economics, 1990, (43): 209-248.
- [18] Schwartz E S, Smith J E. Short-term variations and longterm dynamics in commodity prices [J]. Management Science, 2000, (46): 893-911.
- [19] Sami S, Attaoui P. Commodity derivatives pricing with an endogenous convenience yield market price of risk [R]. Working paper, 2008.
- [20] Longstaff F A. How much can marketability affect security values? [J]. The Journal of Finance, 1995, (50): 1767-1774.
- [21] Heaney R. Approximation for convenience yield in commodity futures pricing [J]. Journal of Futures Markets, 2002, (22): 1005-1017.
- [22] 安宁, 刘志新. 商品期货便利收益的期权定价及实证检验 [J]. 中国管理科学, 2006, 14(6): 119-123.
- [23] 邹绍辉. 便利收益对煤炭资源采矿权价值的影响分析 [J]. 管理学报, 2008, 5(5): 4-8.
- [24] Cochrane J H. Asset Pricing [M]. Princeton: Princeton University Press, 2001.
- [25] Jimmy E, Jorge R. Valuation of commodity futures and options under stochastic convenience yields, interest rates, and jump diffusions in the spot [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1998, (33): 61-87.

## Research on the Incompletely Commodity Future Pricing Based on the Random Convenience Yield

WEI Hui-hui, FAN Chen-lin, ZHU Xin-rong

(School of Finance, Zhongnan University of Economics & Law, Wuhan 430073, China)

**Abstract:** Based on the convenience yield a commodity futures pricing model is proposed, by which the imperfection and the Poisson jump of the spot price by the linking of the random discount rate and the convenience yield are discussed. The parameters are estimated by the Kalman filter and maximum likelihood estimator. To test the practicability, the sample of the copper futures of Shanghai Futures Exchange is used and the empirical evidence is given. The results indicate that the volatility on the futures market caused by the incompleteness should be attributed to the random convenience yield.

**Key words:** convenience yield; incomplete parameter; random discount factor