文章编号:1003－207(2012)06－0154－06

灰色 Verhulst 模型背景值优化的建模方法研究

熊萍萍[1,2],党耀国[2],姚天祥[3],崔　杰[2]

(1. 南京信息工程大学数学与统计学院，江苏 南京　210044;
2. 南京航空航天大学经济与管理学院，江苏 南京　210016;
3. 南京信息工程大学经济管理学院，江苏 南京　210044)

摘　要:本文对传统灰色 Verhulst 模型背景值的误差来源进行分析,对模型的背景值进行优化,以期提高模型的模拟预测精度。基于灰色 Verhulst 模型时间响应式的 Logistic 函数形式,文章利用 Logistic 函数拟合模型中的一阶累加生成序列,经过一系列的数学推导,借助反向累加生成的思想,解出了 Logistic 函数中的三个参数,得到了灰色 Verhulst 模型背景值的优化公式,并建立了优化的灰色 Verhulst 模型。最后分别通过算例和应用实例验证本文的优化效果,结果表明,利用优化的背景值公式可以有效地提高传统灰色 Verhulst 模型的模拟预测精度。

关键词:灰色 Verhulst 模型;Logistic 函数;背景值;优化

中图分类号:N491.5　　　**文献标识码:**A

1　引言

自邓聚龙教授提出灰色系统理论近 30 年以来,灰色预测模型已广泛应用于经济社会系统中,解决了生产、生活以及工程技术等领域中的许多实际问题[1]。GM(1,1)模型是灰色预测模型中最核心的模型。对于具有 s 形序列,则不适宜用 GM(1,1)模型预测,而适合用灰色 Verhulst 模型等进行预测[2]。近几年来,灰色 Verhulst 模型得到了较广泛的应用[3－6]。罗战友等[3]将灰色 Verhulst 模型用于建筑物沉降的预测。毛承雄等[4]充分利用了灰色预测模型近期预测精度高的特点,预测了电力期货价格。刘玉成[5]研究了非等间距灰色 Verhulst 模型,并对建筑物的沉降量进行预测。李秀珍等[6]构建加权组合模型对滑坡变形中的实际问题进行预测。Peleg 等[7]利用逻辑斯克（Verhulst）模型对 S 型微生物生长曲线进行修正,使得修正后的模型更加适合 S 型微生物生长路径。基于 Tsallis 定义的 q — 对数和 q — 指数,Strzalka 对[8] Malthus 和 Verhulst 增长模型的 q — 生成函数的可能性进行了数学分析。Gross 等[9]利用连续 Verhulst 动态模型合成一种新的分布式功率控制算法,并将该算法用于直接序列码分多址系统,取得了较好的效果。

目前,一些学者对灰色 Verhulst 模型进行了优化研究。党耀国[10]提出以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的灰色 Verhulst 模型,使得新信息得到充分利用,提高了原有模型的预测精度。何文章等[11]利用线性规划方法求解灰色 Verhulst 模型中的参数,进而优化该模型。王正新等[12]构造了无偏灰色 Verhulst 模型,取得了较好的模拟预测效果。Xiong 等[13]建立了时间响应函数优化的非等间距 Verhulst 模型,并取得了较原模型更高的模拟预测精度。

根据 GM(1,1)模型和灰色 Verhulst 模型的时间响应式可知,模型的模拟预测精度取决于参数 a 和 b,而参数 a 和 b 的值又直接受到背景值的影响,因此,构造更加合理的背景值计算公式具有一定的理论价值和实际意义。王正新等[14]主要针对一阶累加生成序列近似为非齐次指数函数 $x^{(1)}(t)=p+$

收稿日期:2011－02－14;**修订日期:**2012－08－30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(71171116);江苏省博士后科研资助计划项目(1101094C);江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CXZZ11_0226);中央高校基本科研业务费专项资金资助;教育部人文社会科学基金项目(09YJC630129)

作者简介:熊萍萍(1981－),女(汉族),湖北咸宁人,南京信息工程大学数学与统计学院讲师,博士研究生,研究方向:灰色系统理论研究.

$qe^{m(t-1)}$ 的原始序列，对 GM(1,1)模型的传统背景值进行优化，建立背景值优化的 GM(1,1)模型，并取得较好的模拟预测效果。王叶梅等[15]在此基础上，讨论了非等间距 GM(1,1)模型背景值的优化问题[15]。

然而，上述研究只是对 GM(1,1)模型的背景值进行优化，对灰色 Verhulst 模型已有的研究也只是从初始条件、参数优化和无偏性等方面进行研究，并没有对灰色 Verhulst 模型的背景值进行优化研究。本文将从灰色 Verhulst 模型传统背景值的误差来源入手，针对一阶累加生成序列近似为 Logistic 函数 $x^{(1)}(t)=1/(p+qe^{m(t-1)})$ 的原始序列，对该模型的背景值进行重构，建立背景值优化的灰色 Verhulst 模型。而 Logistic 函数中的参数 m,p,q 是无法利用王正新等[14]中的方法来求解，必须寻找新的求解方法，这将是本文研究的重点和关键问题，也是本文的特色之处。最后，利用文中优化模型进行算例分析，并利用该优化模型对江苏省工业用水重复利用率进行模拟预测，验证了该模型的有效性和可行性。

2 灰色 Verhulst 模型传统背景值的误差分析

定义 1[2] 设 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$ 为非负数据序列，$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$

为 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列，$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n)\}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列，其中 $z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$，$k=2,3,\cdots,n$，则称：

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b(z^{(1)}(k))^2 \tag{1}$$

为灰色 Verhulst 模型；称：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^2 \tag{2}$$

为灰色 Verhulst 模型的白化方程。

利用最小二乘法，根据式(1)可以估计出参数 a 和 b，再将 a 和 b 的估计值代入式(2)，在初始条件 $x^{(1)}(t)|_{t=1}=x^{(1)}(1)$ 下，解得灰色 Verhulst 模型的时间响应式：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1)+(a-bx^{(1)}(1))e^{ak}} \tag{3}$$

将式(3)做进一步化简，可以化为：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\frac{1}{\frac{b}{a}+(\frac{1}{x^{(1)}(1)}-\frac{b}{a})e^{ak}} \tag{4}$$

从式(4)可看出灰色 Verhulst 模型微分方程的时间响应函数为 Logistic 函数形式 $x^{(1)}(t)=\frac{1}{p+qe^{m(t-1)}}$。因此，对于近似为 Logistic 函数的一阶累加生成序列，传统背景值的计算公式 $z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$ 将带来一定的误差，它实质上是用梯形的面积近似代替曲线 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1,k]$ 上与 t 轴所围成的面积。图 1 中的阴影部分面积即为误差部分。

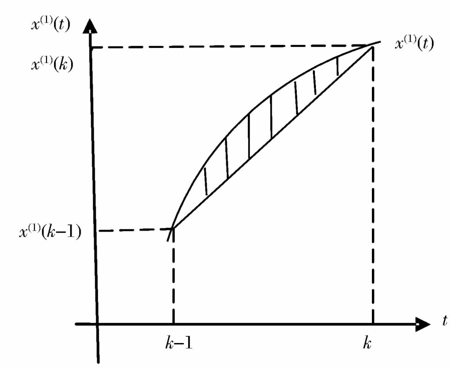

图 1 灰色 Verhulst 模型传统背景值的误差来源

3 背景值优化的灰色 Verhulst 模型的建立

将灰色 Verhulst 模型的白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^2$ 两边同时在区间 $[k-1,k]$ 上积分，可得：

$$\int_{k-1}^{k}\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}dt+a\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)dt=b\int_{k-1}^{k}(x^{(1)}(t))^2dt$$

即：

$$x^{(0)}(k)+a\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)dt=b\int_{k-1}^{k}(x^{(1)}(t))^2dt \tag{5}$$

将式(5)与式(1)对比发现，当一阶累加生成序列近似为 Logistic 函数形式时，用 $\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)dt$ 代替传统背景值 $z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$，同时，用 $\int_{k-1}^{k}(x^{(1)}(t))^2dt$ 代替 $z^{(1)}(k)^2$ 得到参数 a 和 b 的值更适合白化方程。在此，为了消除传统背景值带来的误差，不妨设 $x^{(1)}(t)$ 为 Logistic 函数形式，即设：

$$x^{(1)}(t)=\frac{1}{p+qe^{m(t-1)}}$$

为了方便起见，记 $\bar{z}^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)dt$，$u(k)=\int_{k-1}^{k}(x^{(1)}(t))^2dt$，则背景值优化后的灰色 Verhulst 模型为：

$$x^{(0)}(k)+a\bar{z}^{(1)}(k)=bu(k) \tag{6}$$

为估计出式(6)中的参数 a 和 b 值，首先必须对参数 m,p,q 进行求解，然后推导出 $\bar{z}^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)dt$ 和 $u(k)=\int_{k-1}^{k}(x^{(1)}(t))^2dt$ 的计算公式。

3.1 参数 m,p,q 的求解

设 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots x^{(1)}(n)\}$ 为原始序列 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots x^{(0)}(n)\}$ 的一阶累加生成序列，其中 $x^{(1)}(k)=\dfrac{1}{p+qe^{m(k-1)}}$，$k=1,2,\cdots,n$。为求得参数 m,p,q，首先将序列 $X^{(1)}$ 作倒数变换，得倒数变换序列：

$$Y^{(1)}=\{y^{(1)}(1),y^{(1)}(2),\cdots y^{(1)}(n)\}$$

其中 $y^{(1)}(k)=\dfrac{1}{x^{(1)}(k)}=p+qe^{m(k-1)}$，$k=1,2,\cdots,n$。

由于序列 $X^{(1)}$ 是递增的，故序列 $Y^{(1)}$ 是递减的。此时，对序列 $Y^{(1)}$ 作一次反向累减生成[16]，得到一次反向累减生成序列：

$$Y^{(0)}=\{y^{(0)}(1),y^{(0)}(2),\cdots y^{(0)}(n)\}$$

其中：

$$y^{(0)}(k)=y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k+1)=qe^{m(k-1)}(1-e^{m}),k=1,2,\cdots,n-1$$

$$y^{(0)}(n)=y^{(1)}(n)=p+qe^{m(n-1)}$$

则 $Y^{(1)}$ 为 $Y^{(0)}$ 的一次反向累加生成序列，且根据一次反向累加生成序列的定义可得：

$$y^{(1)}(k)=\sum_{i=k}^{n}y^{(0)}(i),k=1,2,\cdots,n。$$

由于：

$$\frac{y^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k-1)}=\frac{qe^{m(k-1)}(1-e^{m})}{qe^{m(k-2)}(1-e^{m})}=e^{m},k=2,3,\cdots,n-1$$

从而可得：

$$m=\ln\frac{y^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k-1)} \tag{7}$$

另一方面，由 $y^{(0)}(k)=qe^{m(k-1)}(1-e^{m})$ 可得：

$$\begin{aligned}q&=\frac{y^{(0)}(k)e^{m(1-k)}}{1-e^{m}}\\&=\frac{y^{(0)}(k)}{1-\dfrac{y^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k-1)}}\cdot\left(\frac{y^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k-1)}\right)^{1-k}\\&=\frac{y^{(0)}(k)^{2-k}\cdot y^{(0)}(k-1)^{k}}{y^{(0)}(k-1)-y^{(0)}(k)}\end{aligned} \tag{8}$$

又由公式 $y^{(1)}(k)=\sum_{i=k}^{n}y^{(0)}(i)$ 可得：

$$\begin{aligned}p+qe^{m(k-1)}&=y^{(0)}(k)+y^{(0)}(k+1)+\cdots+y^{(0)}(n)\\&=qe^{m(k-1)}(1-e^{m})+qe^{mk}(1-e^{m})+\cdots+qe^{m(n-1)}(1-e^{m})+y^{(0)}(n)\\&=y^{(0)}(n)+qe^{m(k-1)}-qe^{mn}\end{aligned}$$

从而解得：

$$\begin{aligned}p&=y^{(0)}(n)-qe^{mn}\\&=y^{(0)}(n)-\frac{y^{(0)}(k-1)^{k-n}\cdot y^{(0)}(k)^{n-k+2}}{y^{(0)}(k)-y^{(0)}(k-1)}\end{aligned} \tag{9}$$

3.2 $\bar{z}^{(1)}(k)$ 及 $u(k)$ 计算公式的推导

$$\bar{z}^{(1)}(k)=\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)dt=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{p+qe^{m(t-1)}}dt=\int_{k-1}^{k}\frac{e^{-m(t-1)}}{q+pe^{-m(t-1)}}dt\overline{\overline{令\ y=e^{-m(t-1)}}}\int_{e^{-m(k-2)}}^{e^{-m(k-1)}}\frac{y}{py+q}\left(-\frac{1}{my}\right)dy=\int_{e^{-m(k-2)}}^{e^{-m(k-1)}}-\frac{1}{(py+q)mp}d(py)=-\frac{1}{mp}\ln|py+q|\Big|_{e^{-m(k-2)}}^{e^{-m(k-1)}}=-\frac{1}{mp}\ln\left|\frac{pe^{-m(k-1)}+q}{pe^{-m(k-2)}+q}\right| \tag{10}$$

$$u(k)=\int_{k-1}^{k}(x^{(1)}(t))^2dt=\int_{k-1}^{k}\frac{1}{(p+qe^{m(t-1)})^2}dt\overline{\overline{令\ y=p+qe^{m(t-1)}}}\int_{p+qe^{m(k-2)}}^{p+qe^{m(k-1)}}\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{mq}\cdot\frac{q}{y-p}dy=\frac{1}{m}\int_{p+qe^{m(k-2)}}^{p+qe^{m(k-1)}}\frac{1}{y^2(y-p)}dy=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{py}+\frac{1}{p^2}\ln\left|\frac{y-p}{y}\right|\right)\Big|_{p+qe^{m(k-2)}}^{p+qe^{m(k-1)}}=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{p}\cdot\frac{q[e^{m(k-2)}-e^{m(k-1)}]}{(p+qe^{m(k-1)})(p+qe^{m(k-2)})}+\frac{1}{p^2}\ln\left|\frac{e^{m}(p+qe^{m(k-2)})}{p+qe^{m(k-1)}}\right|\right] \tag{11}$$

3.3 背景值优化的灰色 Verhulst 模型的建模步骤

第一步，将非负原始数据序列 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots x^{(1)}(n)\}$ 作倒数变换，得到倒数变换序列 $Y^{(1)}=\{y^{(1)}(1),y^{(1)}(2),\cdots,y^{(1)}(n)\}$，其中 $y^{(1)}(k)=\dfrac{1}{x^{(1)}(k)}$，$k=1,2,\cdots,n$。

第二步，将倒数变换序列 $Y^{(1)}$ 作一次反向累减生成，得到一次反向累减生成序列：$Y^{(0)}=\{y^{(0)}(1),y^{(0)}(2),\cdots y^{(0)}(n)\}$，其中：

$$y^{(0)}(k)=y^{(1)}(k)-y^{(1)}(k+1)=qe^{m(k-1)}(1-e^{m}),k=1,2,\cdots,n-1$$

$$y^{(0)}(n)=y^{(1)}(n)=p+qe^{m(n-1)}$$

第三步，将求解出来的参数 m,p,q 代入 $\bar{z}^{(1)}(k)$ 及 $u(k)$ 的计算公式中，然后根据最小二乘法则，求出背景值优化的灰色 Verhulst 模型 $x^{(0)}(k)+a\bar{z}^{(1)}(k)=bu(k)$ 中的参数 a 和 b 值，即可得：

$$\hat{a}=(a,b)^T=(D^TD)^{-1}D^TP$$

其中：

$$D=\begin{pmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n-1) \end{pmatrix},P=\begin{pmatrix} -\bar{z}^{(1)}(2) & u(2) \\ -\bar{z}^{(1)}(3) & u(3) \\ \vdots & \vdots \\ -\bar{z}^{(1)}(n-1) & u(n-1) \end{pmatrix}$$

注 1：由式(7)可知，$m=\ln\dfrac{y^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k-1)},k=2,3,\cdots,n-1$，因此 $\bar{z}^{(1)}(n)$ 和 $u(n)$ 没有意义。

第四步，将前面求出的参数 a 和 b 值代入公式 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=\dfrac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1)+(a-bx^{(1)}(1))e^{ak}}$ 中对序列 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots x^{(1)}(n)\}$ 进行模拟预测，从而对原始数据序列 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$ 进行模拟预测。

4　算例

设一序列为{4.1299，5.2597，5.9244，6.2484，6.3918，6.4525，6.4777，6.4881}，通过拟合可知该序列近似为 Logistic 函数形式 $x(t)\approx\dfrac{1}{0.153955+0.088181e^{-0.891142t}}$。由于该序列本身已具有饱和状态过程，因此可以直接取该序列为一阶累加生成序列 $X^{(1)}$，下面分别对其建立传统的灰色 Verhulst 模型和背景值优化的灰色 Verhulst 模型。

在建模中，文中采用序列 $X^{(1)}$ 的前 6 个数据来建模，后 2 个数据用来预测，以检验预测的效果。为方便起见，记传统的灰色 Verhulst 模型和文中背景值优化的灰色 Verhulst 模型分别为模型 1 和模型 2。

传统的灰色 Verhulst 模型即模型 1 的时间响应函数为：

$$\hat{x}(k+1)=\frac{3.58303}{0.55222+0.31536e^{-0.86758k}}$$

文中背景值优化的灰色 Verhulst 模型即模型 2 的时间响应函数为：

$$\hat{x}(k+1)=\frac{3.72347}{0.57291+0.32868e^{-0.90159k}}$$

两种模型对序列 $X^{(1)}$ 的模拟值和相对误差见表 1，对序列 $X^{(1)}$ 的预测值和相对误差见表 2。

从表 1 和表 2 可见，传统的灰色 Verhulst 模型和背景值优化的灰色 Verhulst 模型的平均模拟相对误差分别为：0.3039％和 0.1393％，且优化模型的一步、二步预测误差均小于传统模型的预测误差，由此可见背景值优化后的灰色 Verhulst 模型具有更高的模拟预测精度。这主要是由于对传统背景值的构造方法进行了重构，建立了更符合原始数据发展规律的模型。

表 1　两种模型对序列 $X^{(1)}$ 的模拟值及相对误差

k	实际值	模型 1		模型 2	
	$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(％)	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(％)
1	4.1299	4.1299	0.0000	4.1299	0.0000
2	5.2597	5.2333	0.5019	5.2716	0.2262
3	5.9244	5.8947	0.5013	5.9379	0.2279
4	6.2484	6.2251	0.3729	6.2590	0.1696
5	6.3918	6.3752	0.2597	6.3995	0.1205
6	6.4525	6.4404	0.1875	6.4584	0.0914
平均相对误差(％)	0.3039	0.1393			

表 2　两种模型对序列 $X^{(1)}$ 的预测值及相对误差

k	实际值	模型 1		模型 2	
	$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(％)	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(％)
7	6.4777	6.4681	0.1482	6.4826	0.0756
8	6.4881	6.4799	0.1264	6.4925	0.0678

文中提出的灰色 Verhulst 模型的背景值优化公式适用于一次累加生成序列近似为 Logistic 函数形式的原始序列，同时也适用于一些一次累加生成序列不近似为 Logistic 函数形式的原始序列。下面将利用文中背景值优化模型对江苏省工业用水重复利用率进行模拟预测，进一步验证该优化模型的有效性和应用性。

5　应用实例

工业用水重复利用率是指工业用水中重复利用的水量与总用水量的比值。工业用水重复利用率越高，取用水量和耗水量也愈少，工业污水产生量也相应降低，从而可大大减少水环境的污染，减缓水资源供需紧张的压力。提高工业用水重复率，是节约用水、减少污染，合理利用水资源，大力发展循环经济的一项重要措施。为了提高工业用水重复率，必须建立和完善循环用水系统。江苏省 2001－2009 年工业用水重复利用率的数据如表 3 所示。

表 3 江苏省 2001—2009 年工业用水重复利用率(%)

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
工业用水重复利用率	69.6	71.5	72.5	74.2	75.1	80.6	82.0	83.8	85.1

从工业用水重复利用率的数据可看出,该指标的取值的总体趋势是逐步提高的,且上限值为100%。由此可见,这是一种典型的发展受阻滞的现象,其对应的数据序列本身已具有饱和状态过程,因此可以直接取该序列为一阶累加生成序列 $X^{(1)}$ 建立背景值优化的灰色 Verhulst 模型进行模拟预测。

在建模中,文中采用序列 $X^{(1)}$ 的前 6 个数据来建模,后 3 个数据用来预测,以检验预测的效果。为方便起见,记传统的灰色 Verhulst 模型为模型 1,优化的灰色 Verhulst 模型为模型 2。两种模型对序列 $X^{(1)}$ 的模拟值和相对误差见表 4,对序列 $X^{(1)}$ 的预测值和相对误差见表 5。

表 4 两种模型对序列 $X^{(1)}$ 的模拟值和相对误差

年份	k	实际值	模型 1		模型 2	
		$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(%)	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(%)
2001	1	69.6	69.6000	0.0000	69.6000	0.0000
2002	2	71.5	69.8473	2.3115	71.0602	0.6151
2003	3	72.5	70.23823	3.1197	72.5878	0.1211
2004	4	74.2	70.8598	4.5017	74.1877	0.0166
2005	5	75.1	71.8561	4.3194	75.8650	1.0186
2006	6	80.6	73.4749	8.8400	77.6255	3.6904
平均相对误差			3.8487		0.9103	

表 5 两种模型对序列 $X^{(1)}$ 的预测值和相对误差

年份	k	实际值	模型 1		模型 2	
		$x^{(0)}(k)$	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(%)	$\hat{x}^{(1)}(k)$	相对误差(%)
2007	7	82.0	76.1636	7.1175	79.4756	3.0785
2008	8	83.8	80.7964	3.5842	81.4223	2.8373
2009	9	85.1	89.3087	4.9456	83.4733	1.9115

从表 4 可见,优化的灰色 Verhulst 模型对序列 $X^{(1)}$ 模拟值的平均相对误差为 0.9103%,模拟精度高达 99%以上,模拟效果明显优于传统的灰色 Verhulst 模型;从表 5 可见,优化的灰色 Verhulst 模型对序列 $X^{(1)}$ 的预测相对误差均低于传统的灰色 Verhulst 模型。结果表明,优化的灰色 Verhulst 模型的模拟预测效果较传统模型更优,这主要是由于背景值优化的灰色 Verhulst 模型降低了传统背景值所带来的误差,从而提高了优化模型的模拟预测精度。

6 结语

本文首先从灰色 Verhulst 模型的传统背景值误差入手,分析误差来源,从而对模型的背景值进行了更加合理的构造,建立了背景值优化的灰色 Verhulst 模型,该优化模型是从背景值的角度来考虑的,它能有效的消除传统背景值所产生的误差。其次给出了背景值优化的灰色 Verhulst 模型的建模步骤。最后利用文中建立的优化模型分别进行了算例分析和实例分析,结果表明背景值优化的灰色 Verhulst 模型能够改善模型的模拟预测效果。由此可见,建立背景值优化的灰色 Verhulst 模型具有一定的理论价值和应用价值。

参考文献:

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉:华中理工大学出版社,2002.

[2] 刘思峰,党耀国,方志耕. 灰色系统理论及其应用(第三版)[M]. 北京:科学出版社,2004.

[3] 罗战友,龚晓南,杨晓军. 全过程沉降量的灰色 verhulst 预测方法[J]水利学报,2003,(3):29—31.

[4] 毛承雄,高翔. 灰参数 Verhulst 模型在电力期货价格预测中的应用[J]. 水电能源科学,2005,23(3):80—82.

[5] 刘玉成. 改进的灰色 VerhulstGM(1,1)建筑物沉降模型[J]. 中国地质灾害与防治学报,2006,17(4):61—63.

[6] 李秀珍,孔纪名,王成华. 最优加权组合模型在滑坡变形预测中的应用[J]. 自然灾害学报,2008,17(2):53—57.

[7] Peleg M, Corradini M G, Normand M D. The logistic (Verhulst) model for sigmoid microbial growth curves revisited[J]. Food Research International, 2007, 40(7): 808—818.

[8] Strzalka D, Grabowski F. Towards possible q-generalizations of the Malthus and Verhulst growth models [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2008, 387(11): 2511—2518.

[9] Gross T J, Abrao T, Jeszensky P J E. Distributed power control algorithm for multiple access systems based on Verhulst model [J]. AEU-International Journal of Electronics and Communications, 2011, 65(4): 361—372.

[10] 党耀国,刘思峰. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J]. 中国管理科学,2005,13(1):132—135.

[11] 何文章,吴爱弟. 估计 Verhulst 模型中参数线性规划方法及其应用[J]. 系统工程理论与实践,2006,(8):141—144.

[12] 王正新,党耀国,刘思峰. 无偏灰色 Verhulst 模型及其

应用[J]. 系统工程理论与实践,2009,29(10):138－144.

[13] Xiong Pingping, Dang Yaoguo, Qian Wuyong. The optimization of time response function in non-equidistant Verhulst model [J]. The Journal of Grey System, 2010, 22(3): 249－256.

[14] 王正新, 党耀国,刘思峰. 基于离散指数函数优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与践,2008, 28(2): 61－67.

[15] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距 GM(1,1)模型背景值的优化[J]. 中国管理科学,2008,16(4):159－162.

[16] 宋中民,邓聚龙. 反向累加生成及灰色 GOM(1,1)模型[J]. 系统工程, 2001, 19(1): 66－69.

The Research on the Modeling Method of Background Value Optimization in Grey Verhulst Model

XIONG Ping-ping[1,2], DANG Yao-guo[2], YAO Tianxiang[3], CUI Jie[2]

(1. College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China;

2. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

3. College of Economics and Management, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: In this study, the error sources of background value of traditional grey Verhulst model and optimizes the background value of the model are analyzed, in order to improve the simulation and prediction accuracy of the model. Based on the Logistic function structure of the time response formula in the grey Verhulst model, the Logistic function is used to fit the accumulated sequence, three parameters in Logistic function are solved through a series of mathematical derivation and the idea of accumulated generating operation in opposite direction, and then the optimal formula of background value of grey Verhulst model is got and the optimal grey Verhulst model is constructed. Finally, the optimization effect in this paper is verified by an example and an application example respectively. The result shows that it can effectively improve the simulation and prediction accuracy of the traditional grey Verhulst model to use the optimization background value.

Key words: grey Verhulst model; logistic function; background value; optimization