文章编号: 1000-5641(2013)01-0017-07

极体的体积确定凸体

吴力荣

(浙江工业职业技术学院, 浙江 绍兴 312000)

摘要: 利用球面调和函数和 Hamburger 矩方法, 证明了, $\mathbb{R}^n$ 中一个包含半径为 δ 的球的原点对称凸体, 能被其在此球附近的所有点的极体的体积所唯一确定.

关键词: 凸体; 体积; 极体

中图分类号: O186.5 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.01.004

Determination of a convex body by the volume of its polar bodies

WU Li-rong

(*Zhejiang Industry Polytechnic College, Shaoxing Zhejiang* 312000, *China*)

Abstract: Using tools of spherical harmonics and Hamburger's moment, we proved that an origin-symmetric convex body containing a sphere of radius δ in its interior is determined in $\mathbb{R}^n$ by the volume of its polar bodies with respect to all the points near the sphere.

Key words: convex body; volume; polar body

0 引 言

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 凸体 K 关于一个内点 z 的极体 K^{*z} 被定义为

$$K^{*z} = \{y \in \mathbb{R}^n | \langle y, x - z\rangle \leqslant 1, \forall x \in K\}.$$

自上个世纪以来, 关于极体的研究得到了很多有意义结果. 如一个凸体存在唯一的点, 使得 $\mathrm{Vol}_n(K)\mathrm{Vol}_n(K^{*z})$ 取最小值, 人们把此点称之为 Santaló 点. 关于 Santaló 域的研究见文献 [1]. 一个原点对称的凸体 K 的体积积 $\mathcal{P}(K)$ 是一个 $GL(n)$ 不变泛函, 定义为

$$\mathcal{P}(K) = \mathrm{Vol}_n(K)\mathrm{Vol}_n(K^{*0}).$$

$\mathcal{P}(K)$ 的上界是著名的 Blaschke-Santaló 不等式[2,3], 文献 [2] 给出了简短证明. 关于 $\mathcal{P}(K)$ 的下界, Mahler 在文献 [4] 中猜测, $\mathcal{P}(K) \geqslant \mathcal{P}(C^n)$, 其中 C^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中原点对称的仿射立方体. 对

收稿日期: 2012-03

基金项目: 国家自然科学基金(11071156)

作者简介: 吴力荣, 男, 硕士, 讲师, 研究方向为凸几何分析. E-mail: wulirong@gmail.com.

一般的凸体, Mahler 在文献 [5] 中猜测并证明了当 $n=2$ 时, 在非原点对称的情况, 对每一个 $z\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Vol}_n(K)\mathrm{Vol}_n(K^{*z})\geqslant \mathrm{Vol}_n(\triangle_n)\mathrm{Vol}_n(\triangle_n^{*0}),$$

其中 $\triangle_n$ 表示 n 维单形. 在对称的情况下, Reisner 在文献 [6,7] 中研究了 zonoids 情况, 在文献 [8] 中研究了 1-无条件体的情况. Gordon 等在文献 [9] 中给出了关于 zonoids 的一个新的证明. Bourgain 和 Milman 在文献 [10] 中证明了 $\mathcal{P}(K)\geqslant c^n\mathcal{P}(B_2^n)$, 其中 c 是一个通用常数, B_2^n 为单位欧氏球. 在文献 [11] 中, Ball 刻画了该猜想与小波方程的关系. Lopez 和 Reisner 在文献 [12] 中验证了当 $n\leqslant 8$ 且最多有 $2n+2$ 个顶点的多面体时的猜想是对的. 在文献 [13] 中, Böröczky 和 Hug 证明了关于 zonoids 不等式的稳定性. Barthe 等在文献 [14] 中研究了有许多对称性的凸体的情况. 其他关于极体的不等式的泛函版本可见文献 [15-20].

本文考虑了关于原点对称凸体的确定问题. 我们得出, 在 $\mathbb{R}^n$ 中一个包含半径为 δ 的球其内部的原点对称凸体, 可由其关于此球附近点的极体的体积所唯一确定, 即下面的定理:

定理 0.1 设 K,L 是 $\mathbb{R}^n$ 中原点对称的凸体. 如果存在 $0<a<b$, 使得对每个 $\delta\in(a,b), y\in\delta S^{n-1}$, 有

$$\mathrm{Vol}_n(K^{*y})=\mathrm{Vol}_n(L^{*y}),$$

则 $K=L$.

1 Funk-Hecke 公式

首先罗列一些关于球面调和函数的事实, 更多的细节可参考文献 [21-23]. 用 P_m 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 S^{n-1} 上的 m 次球面调和函数空间. 注意到单位球面上 m 次球面调和函数是 m 次调和齐次多项式. 把 P_m 作为 $L_2(S^{n-1})$ 的子空间. 任意 2 个不同次数的球面调和函数在 $L_2(S^{n-1})$ 中是正交的. 不难算得空间 P_m 的维数 $N(n,m)$:

$$N(n,m)=\frac{(2m+n-2)\Gamma(n+m-2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(n-1)}.$$

设 $\{Y_{mj}: j=1,\cdots,N(n,m)\}$ 是 P_m 空间的一组正交基, 则函数 $Y_{mj}, m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, j=1,\cdots,N(n,m)$ 形成 $L_2(S^{n-1})$ 空间的一组正交基. 因此, 如果 $F,G\in L_2(S^{n-1})$, 则

$$\langle F,G\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N(m,n)}\langle F,Y_{mj}\rangle\langle G,Y_{mj}\rangle,$$

其中 $\langle F,G\rangle$ 表示 $L_2(S^{n-1})$ 中的内积. 同时也有

$$\|F\|^2_{L_2(S^{n-1})}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{N(m,n)}\langle F,Y_{mj}\rangle^2.$$

定理 1.1(Funk-Hecke公式[21]) $\forall Y_m\in P_m$, $[-1,1]$ 上的每一个连续函数 f 和 $x\in S^{n-1}$, 成立

$$\int_{S^{n-1}}f(\langle x,\xi\rangle)Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi=\lambda_mY_m(x),$$

其中

$$\lambda_m=\frac{(-1)^m\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{m-1}\Gamma(m+\frac{n-1}{2})}\int_{-1}^{1}f(t)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}(1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

在文献 [21,22] 中已给出了一些特殊函数的系数, 在此考虑

$$f(t) = \mid 1 - st \mid^{-n-1}, \tag{2}$$

其中 $t \in [-1,1]$, 且 $st \in [-1,1]$. 记函数 $f(t)$ 关于 Funk-Hecke 公式的系数为 $\lambda_m(s)$.

引理 1.1　设 $f \in C^1[-1,1], s \in \mathbb{R}$, 使得对每个 $t \in [-1,1], st \in [-1,1]$, 则 $f(t) = \mid 1 - st \mid^{-n-1}$ 在 Funk-Hecke 公式中的系数可由下式得到,

$$\lambda_m(s) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n!} \sum_{k=m}^{\infty} (-s)^k \frac{2^{2-k}(n+k)!}{(k-m)\Gamma(\frac{k-m}{2})\Gamma(\frac{n+m+k}{2})}.$$

证　明　首先处理表达式 (1) 的积分. m 次分部积分后, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mid 1 - st \mid^{-n-1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}(1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}} \mathrm{d}t \\
=\ & (n+1)\cdots(n+m)s^m \int_{-1}^{1} \mid 1 - st \mid^{-n-m-1} (1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由于 $st \in [-1,1]$, 我们关于 st 展开 $\mid 1 - st \mid^{-n-1}$ 后, 再应用 B 函数[22,24], 有

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_{-1}^{1} \mid t \mid^{2a-1} (1-t^2)^{b-1} \mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mid 1 - st \mid^{-n-m-1} (1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-s)^k \frac{(n+m+k)!}{k!(n+m)!} \int_{-1}^{1} \mid t \mid^{k} (1-t^2)^{m+\frac{n-3}{2}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\Gamma(m+\frac{n-1}{2})}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{\infty} (-s)^k \frac{(n+m+k)!}{\Gamma(m+\frac{n+k}{2})} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(K+1)}.
\end{aligned}$$

进一步应用 Γ 函数的一个公式[22],

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x)\Gamma\Big(x+\frac{1}{2}\Big),$$

其中 x 和 $x+\frac{1}{2}$ 是不属于 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 的复数, 即可得到引理的结论.

2　主要结论的证明

注意极体的体积具有引理 1.1 中函数 f 的形式, 我们利用引理 1.1 来展开极体的体积成球面调和函数.

引理 2.1[1,2]　设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中原点对称的凸体, $y \in \operatorname{int} K$, 则

$$\mathrm{Vol}_n(K^{*y}) = \int_{K^{*0}} \frac{1}{(1-\langle x,y\rangle)^{n+1}} \mathrm{d}x. \tag{3}$$

注　表达式 (3) 恰好是一个平行截面函数分数阶导数的特例. 对 $\xi \in S^{n-1}$, 凸体 K 在 ξ 方向的平行截面函数[22]是 $\mathbb{R}$ 上的一个函数

$$A_{k,\xi}(t) = \mathrm{Vol}_{n-1}(K \cap \{\xi^{\perp} + t\xi\}),$$

其中$\xi^{\perp}+t\xi$是垂直于ξ方向距原点t的超平面. 一个测试函数$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$的$q$阶分数阶导数, 通过$\phi$和$t_{+}^{-1-q}/\Gamma(-q)$[22]的卷积定义为

$$\phi^{(q)}(x)=\Big\langle\frac{t_{+}^{-1-q}}{\Gamma(-q)},\phi(x-t)\Big\rangle.$$

对$-1<q<0$,

$$\begin{aligned}A_{K,\xi}^{(q)}(t) &= \Big\langle\frac{z_{+}^{-1-q}}{\Gamma(-q)},A_{k,\xi}(t-z)\Big\rangle=\frac{1}{\Gamma(-q)}\int_0^{\infty}|z|^{-1-q}A_{k,\xi}(t-z)\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\Gamma(-q)}\int_{\mathbb{R}}|z|^{-1-q}\int_{<x,\xi>=t-z}\chi(\|x\|_K)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\Gamma(-q)}\int_{\mathbb{R}}|t-y|^{-1-q}\int_{<x,\xi>=y}\chi(\|x\|_K)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2\Gamma(-q)}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,\xi\rangle-t|^{-1-q}\chi(\|x\|_K)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

引理 2.2 设K是$\mathbb{R}^n$中原点对称的凸体, r是包含在K内部的球的半径, 对$t\in(0,r),y\in tS^{n-1}$, 每一个非负整数m, 有

$$\langle\mathrm{Vol}_n(K^{*y}),Y_m\rangle=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n!}\sum_{k=m}^{\infty}c(n,m,k)(-t)^k\int_{S^{n-1}}h_K^{-n-k}(\xi)Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{4}$$

其中

$$c(n,m,k)=\frac{2^{2-k}\Gamma(n+k)}{(k-m)\Gamma(\frac{k-m}{2})\Gamma(\frac{n+m+k}{2})}. \tag{5}$$

证 明 由$y\in\mathrm{int}\,K$, 可以记$y=t\xi$, $\xi\in S^{n-1}$. 根据式 (3), 我们有

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{Vol}_n(K^{*y}),Y_m\rangle &= \int_{S^{n-1}}\mathrm{Vol}_n(K^{*y})Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{K^{*0}}\Big(\int_{S^{n-1}}|1-t\|x\|_2\langle x/\|x\|_2,\xi\rangle|^{-1-n}Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi\Big)\mathrm{d}x. \end{aligned}\tag{6}$$

注意到极体的定义和K是原点对称的, 内层积分可以转化为引理 1.1 的情形. 这样, 表达式 (6) 等于

$$\begin{aligned}&\int_{K^{*0}}\lambda_m(t\|x\|_2)Y_m(x/\|x\|_2)\mathrm{d}x\\ &=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-t)^k2^{2-k}(n+k)!}{(k-m)\Gamma(\frac{k-m}{2})\Gamma(\frac{n+m+k}{2})}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2^kY_m(x/\|x\|_2)\chi(h_K(x))\mathrm{d}x\\ &=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{n!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-t)^k2^{2-k}(n+k)!}{(k-m)\Gamma(\frac{k-m}{2})\Gamma(\frac{n+m+k}{2})}\int_{S^{n-1}}Y_m(\theta)\int_0^{\frac{1}{h_k(\theta)}}r^{n+k-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

计算内积之后便可得到式 (4) 和式 (5).

表达式 (4) 是有意义, 因为考虑了无限求和里面每一项的绝对值的 k 次根式.

$$\sum_{k=m}^{\infty} c(n,m,k)t^k \int_{S^{n-1}} h_K^{-n-k}(\xi) Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7}$$

根据 Stirling 渐近公式[25], 当 $\Re x \to \infty$ 时, $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}$, 我们有, 当 $\Re x \to \infty$ 时, $\Gamma(x)^{\frac{1}{x}} \sim \frac{x}{\mathrm{e}}$, 因此, 当 $k \to \infty$ 时,

$$c(n,m,k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{k-m}\Big)^{\frac{1}{k}} \Big(\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(\frac{k-m}{2})\Gamma(\frac{n+m+k}{2})}\Big)^{\frac{1}{k}} \sim \frac{2\mathrm{e}}{k}.$$

再利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\Big|\int_{S^{n-1}} h_K^{-n-k}(\xi)Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi\Big|^{\frac{1}{k}} \leqslant \Big(\int_{S^{n-1}} |h_K^{-n-k}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2k}} \Big(\int_{S^{n-1}} |Y_m(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2k}}. \tag{8}$$

令 D_t 表示半径为 t, 中心在原点的欧氏球. 适当选择 t, 使得对每一个 $\xi \in S^{n-1}$, 有

$$h_K(\xi) \geqslant h_{D_t}(\xi) = t.$$

因此, 当 $k \to \infty$ 时, 由于 $(t^{-n-k}\omega_n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{k}} \sim t^{-1}$, 所以表达式 (8) 右边第一项是有界的, 其中 ω_n 表示单位球面 S^{n-1} 的表面积, 又由于对每一个非负整数 m, Y_m 是正交基里面的一个元素, 因此表达式 (8) 右边第二项恰好是 1. 因此, 幂级数 (7) 关于 t 是收敛的. 所以, 当 $t \in (0, r)$, 表达式 (4) 是解析的.

有了上面的引理我们可以证明本文的主要定理.

定理 0.1 的证明　由于对每一个 $y \in \delta S^{n-1}$,

$$\mathrm{Vol}_n(K^{*y}) = \mathrm{Vol}_n(L^{*y}),$$

在球面上对 y 方向的半径 δ 求导, 即对 $j = 0, 1, 2, \cdots$, 有

$$\frac{\mathrm{d}^j \mathrm{Vol}_n(K^{*y})}{\mathrm{d}\delta^j} = \frac{\mathrm{d}^j \mathrm{Vol}_n(L^{*y})}{\mathrm{d}\delta^j}, \tag{9}$$

再根据引理 2.2,

$$\sum_{k=m}^{\infty} c(n,m,k)(-\delta)^k \int_{S^{n-1}} (h_K^{-n-k} - h_L^{-n-k})(\xi) Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi = 0. \tag{10}$$

把上式 (10) 看作关于 δ 的幂级数, 结合公式 (9), 对每一个整数 $m \geqslant 0$, $k \geqslant m$, 有

$$\langle h_K^{-n-k} - h_L^{-n-k}, Y_m\rangle = 0. \tag{11}$$

现在, 把确定问题和 Hamburger 矩[26]问题联系起来, 即是否存在着一些非减的测度 $\sigma(u), -\infty < u < +\infty$, 使得对给定的级数 $\{z_k\}_0^{\infty}$ 正好是矩的测度:

$$z_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k \mathrm{d}\sigma(u), \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{12}$$

不失一般性, 考虑级数

$$z_k = \Big|\int_{S^{n-1}} h_K^{-n-k}(\xi) Y_m(\xi)\mathrm{d}\xi\Big|.$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$z_k \leqslant \Big(\int_{S^{n-1}} |h_K^{-n-k}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{S^{n-1}} |Y_m(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

就像在证明引理 2.2 中所做的, 有

$$z_k \leqslant \delta^{-n-k}\omega_n^{\frac{1}{2}},$$

其中 ω_n 表示单位球面 S^{n-1} 的表面积, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_{2k})^{-\frac{1}{2k}} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\delta^{1+\frac{n}{2k}}\omega_n^{-\frac{1}{4k}}$$

发散. 根据卡尔曼准则[26], 矩问题 (12) 是确定的. 因此, 式 (11) 适用于任意的非负整数 k 和 m. 在球面调和函数的展开式的意义下, 对任意的非负整数 k, 在 S^{n-1} 上,

$$h_K^{-n-k} \equiv h_L^{-n-k}.$$

由解析延拓, 在 S^{n-1} 上, 有 $h_K \equiv h_L$, 即 $K = L$.

[参 考 文 献]

[1] MEYER M, WERNER E M. The Santaló-regions of a convex body[J]. Trans Amer Math Sci, 1998, 350(11): 4569-4591.

[2] MEYER M, PAJOR A. On the Blaschke-Santaló inequality[J]. Arch Math (Basel), 1990, 55: 82-93.

[3] SAINT RAYMOND J. Sur le volume des corps convexes symétriques[C]// Séminaire dinitiationá l'Analyse. Paris: Univ Pierre et Marie Curie, 1980.

[4] MAHLER K. Ein Übertragungsprinzip für Konvexe Körper[J]. Časopis Pěst Mat Fys, 1939, 68: 93-102.

[5] MAHLER K. Ein Minimalproblem für Konvexe Polygone[J]. Mathematica (Zutphen), 1939, 7: 118-127.

[6] REISNER S. Random polytopes and the volume-product of symmetric convex bodies[J]. Math Scand, 1985, 57: 386-392.

[7] REISNER S. Zonoids with minimal volume-product[J]. Math Z, 1986, 192: 339-346.

[8] REISNER S. Minimal volume product in Banach spaces with a 1-unconditional basis[J]. London Math Soc, 1987, 36: 126-136.

[9] GORDON Y, MEYER M, REISNER S. Zonoids with minimal volume product-a new proof[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 104: 273-276.

[10] BOURGAIN J, MILMAN V D. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in R^n[J]. Invent Math, 1987, 88: 319-340.

[11] BALL K. Mahler's conjecture and wavelets[J]. Discrete Comput Geom, 1995, 13: 271-277.

[12] LOPEZ M A, REISNER S. A special case of Mahler's conjecture[J]. Discrete Comput Geom, 1998, 20: 163-177.

[13] BÖRÖCZKY K J, HUG D. Stability of the reverse Blaschke-Santaló inequality for zonoids and applications[J]. Adv Appl Math, 2010, 44: 309-328.

[14] BARTHE F, FRADELIZI M. The volume product of convex bodies with many symmetries [EB/OL]: [2010-06-07]. http://perso-matl.univ-mlv.fr.

[15] ARTSTEIN S, KLARTAG B, MILMAN V D. On the Santaló point of a function and a functional Santaló inequality[J]. Mathematika, 2004, 54: 33-48.

[16] FRADELIZI M, GORDON Y, MEYER M, et al. The case of equality for an inverse Santaló functional inequality[J]. Adv Geom, 2010, 10: 621-630.

[17] FRADELIZI M, MEYER M. Some functional forms of Blaschke-Santaló inequality[J]. Math Z, 2007, 256: 379-395.

[18] FRADELIZI M, MEYER M. Increasing functions and inverse Santaló inequality for unconditional functions[J]. Positivity, 2008, 12: 407-420.

[19] FRADELIZI M, MEYER M. Some functional inverse Santaló inequalities[J]. Adv Math, 2008, 218: 1430-1452.

[20] FRADELIZI M, MEYER M. Functional inequalities related to Mahler's conjecture[J]. Monatsh Math, 2010, 159: 13-25.
[21] GROEMER H. Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics[M]. New York: Cambridge University Press, 1996.
[22] KOLDOBSKY A. Fourier Analysis in Convex Geometry[M]. Providence, RI: Amer Math Soc, 2005.
[23] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
[24] WANG Z, GUO D. Special Functions[M]. Singapore: World Scientific Publishing Co, 1989.
[25] ANDREWS G, ASKEY R, ROY R. Special Functions[M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000.
[26] AKHIEZER N I. The Classical Moment Problem, and Some Related Questions in Analysis[M]. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965.

(上接第 10 页)

[3] MOHAR B, THOMASSEN C. Graphs on Surfaces[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2001: 85-85
[4] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs III: Cyclic and acyclic invariants[J]. Math Slovaca, 1980, 30: 405-417.
[5] AÏ-DJAFER H. Linear arboricity for graphs with multiple edges[J]. J Graph Theory 1987, 11: 135-140.
[6] WU J L, WU Y W. The linear arboricity of planar graphs of maximum degree seven are four[J] J Graph Theory,
[7] WU J L. On the linear arboricity of planar graphs[J]. J Graph Theory, 1999, 31: 129-134.
[8] WU J L. Some path decompositions of Halin graphs[J]. J Shandong Mining Institute, 1998, 17: 92-96. (in Chinese).
[9] WU J L. The linear arboricity of series-parallel graphs[J]. Graph and Combinatorics, 2000, 16: 367-372.
[10] WU J L, LIU G Z, WU Y L. The linear arboricity of composition graphs[J]. Journal of System Science and Complexity, 2002, 15(4): 372-375.
[11] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs IV: Linear arboricity[J]. Networks, 1981, 11: 69-72.