

基于CS曲线的最优航迹光顺方法研究*

韩庆, 魏贤智, 陈中起

(空军工程大学工程学院, 西安 710038)

摘要:航迹光顺是保证无人机航迹规划可飞性的关键。给出了基于V图的规划空间生成策略,运用动态规划法,获得了初始最优航迹;研究分析了CS曲线的变化特性,提出了一种基于CS曲线的航迹光顺算法;通过引入无人机飞行性能约束到CS曲线,建立基于CS曲线的最优航迹光顺模型;仿真结果表明所提航迹光顺方法既保证了航迹的可飞性,又保证了无人机的安全性。

关键词:航迹光顺;动态规划;航迹规划;CS曲线

中图分类号: V249.1 **文献标志码:** A

The Research on Optimal Path Faring Algorithm Based on CS Curve

HAN Qing, WEI Xianzhi, CHEN Zhongqi

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China)

Abstract: The path fairing technology will ensure a flyable path for UAVs. Firstly, planning space was given by using Voronoi graph and the dynamic programming search algorithm was used to get an initial path; Secondly, the properties of CS curve were studied, based on which, a path fairing method was put forward; Thirdly, through combining the flying constraints into CS curve, the optimal path fairing model was built based on CS curve; Lastly, the simulation was presented and the results show that the path fairing algorithm can not only ensure the path is flyable, but also ensure UAVs' safety.

Keywords: path fairing; dynamic programming; flight path planning; CS curve

0 引言

随着战场环境复杂度的提高,作为实现飞行器自主导航和飞行的关键技术,航迹规划^[1-2]已深受国内外研究人员的关注。航迹规划过程常分两步:初始航迹生成和航迹光顺。生成初始航迹的方法很多,有V图法、概略图法、A*法等。航迹光顺,即在初始最优航迹基础上通过合适算法,获得保证航迹最优的同时,满足飞行性能的光滑航迹。目前常用的方法只有B样条曲线^[3-4],然而B样条曲线虽能满足航迹飞行性能约束,却很难保证光顺后航迹的安全性。

为此,已研究并设计出许多光滑曲线。例如Dubins曲线,首次是在机器人路径规划中运用,这种圆-线-圆的曲线最大的缺陷是在线与圆的连接点处有一跳跃式间断,这将使机器人停止在这些点处无法前行,其它如Reeds-Shepp曲线^[5],在连接点处同样存在不连续性问题。而角螺旋曲线(CS)^[6],又称为回旋曲线或者欧拉曲线,通过将连接点处曲率设计为零^[7-8],使其能实现高速公路进出口平稳的过渡,目

前已广泛应用于铁路和高速公路建设中,Kelly和Nagy^[9]使用一种带参数的CS模型为机器人生成了一条实时的轨迹,用于减小终点误差。

基于此,文中将带参数的CS模型应用于无人机的航迹规划中,并在不同约束条件下,对CS曲线的有效性进行了研究。首先介绍了V图和动态规划搜索算法,其次分析了CS曲线表达方式和特性,并构建了相应的约束模型,第三,通过将航迹约束引入CS曲线,建立了最优航迹光顺模型,最后进行了仿真验证。

1 基于V图法的初始航迹生成

用于生成初始航迹的图表搜索方法很多,其目的均是最大限度的保证无人机的飞行安全。比较常用的两种方法是启发式搜索法和概略图搜索法,这里采用V图法。

1.1 V图搜索

V图将规划空间分解为许多分散的单元,每个单元包含一个威胁点,各单元之间紧密相连又不重叠。

* 收稿日期:2011-05-24

基金项目:航空科学基金(20085196011)资助

作者简介:韩庆(1983-),男,重庆人,硕士研究生,研究方向:航空指挥控制与战术引导。

分解的过程是以预先获得的威胁位置和数据信息为依据,这里假设均是雷达威胁。如图 1 所示,星点代表雷达,圆点为 V 图节点,它是三个相邻雷达威胁点

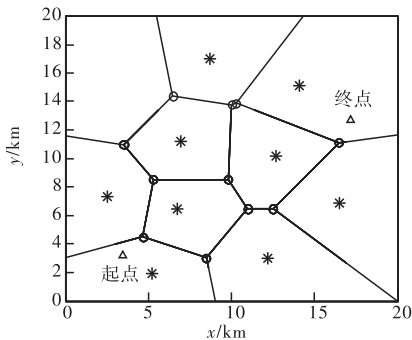


图 1 V 图生成示意图

构成的三角形各边中垂线的交点,而该三角形中不包含其它威胁点。这些三角形被称作 Delaunay 三角形,显然所有节点到相邻两个威胁源距离相等。把这些节点连接起来,即形成许多多边形,这些多边形就组成 V 图。

假设无人机沿 V 图中的边穿过威胁区域,其暴露概率可由无人机与各部雷达的距离确定。假设每部雷达向各个方向辐射出相同能量,雷达的威胁大小与距离的四次方成反比。边界上总的威胁可由从边界起点到终点积分获得^[10],于是有:

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{[(p_x - x)^2 + (p_y - y)^2]^2} \quad (1)$$

(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是边界上起点和终点坐标, (p_x, p_y) 是雷达坐标。边界上任意点坐标可用起点和终点表示为:

$$y = y_1 + \alpha(x - x_1) \quad \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

于是式(1)可简化为:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{[(p_x - x)^2 + (p_y - y_1 - \alpha(x - x_1))]^2} dx \quad (3)$$

通过解算每条边界上的威胁,便可搜索出一条穿越威胁区的被探测概率最低的最优航迹,而动态规划方法就是用来解决最优航迹搜索问题的。

1.2 动态规划法

动态规划算法是一类多阶段决策过程的最优化搜索算法。动态规划过程是把一个问题分成许多层面的子问题,然后单独的解决这些子问题以达成总体最优。在每一层面上都保留了最优的解决问题方法,这样当重新回到这个层面时,能重新获得保留的结果并避免重复计算。

文中采用逆推法,从终点向前开始计算,对每个 V 点,计算并保存从该点到终点的最小威胁代价,对于所有 V 点重复该过程,当到达一个点时就可以得到它到终点的威胁代价值,该算法正是通过保存从该点

到终点预先计算好的最优航迹而避免重复计算,进而极大提高了搜索效率。

2 基于 CS 曲线的航迹光顺算法

通过 V 图搜索到的初始航迹由不光滑的折线组成,对于无人机来说是不可飞的。为此需对初始航迹作光顺处理。同时又要求光顺航迹尽量接近初始航迹,以保证无人机在飞行中最大的安全性。而曲率是决定曲线光顺的关键因素,问题就转变为根据曲率限制条件和其它限制因素选择合适的曲线的问题。文中采用 CS 曲线来完成航迹光顺。

2.1 角螺旋曲线(CS)

CS 曲线是一种著名的曲线,它的曲率由弧长 s 为参变量的多项式函数表示:

$$\kappa(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i \quad (4)$$

曲率也可以由曲线角度 θ 给出:

$$\kappa(s) = \frac{d\theta}{ds} \quad (5)$$

在笛卡尔坐标系中,曲线上的点由菲涅耳积分计算得到:

$$x(s) = \int_0^s \cos(\theta(s)) ds, y(s) = \int_0^s \sin(\theta(s)) ds \quad (6)$$

用这种曲线解决航迹光顺问题的一个优点就是简化了对弧度的计算:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_0^t 1 dt = t \quad (7)$$

上述表达式是通用的,它适用于所有形式的 CS 曲线,包括特殊的直线 ($n = 0$ 和 $\alpha_0 = 0$) 和圆 ($n = 0$ 和 $\alpha_1 = 0$)。在 CS 曲线中,曲率等于弧的长度,于是曲率的大小随着长度的增加而增

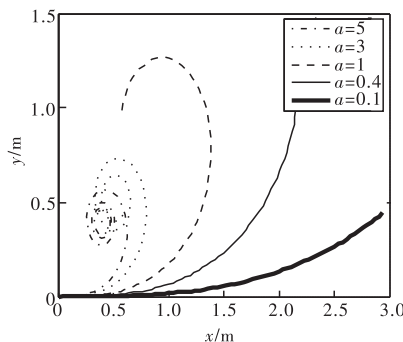


图 2 最高幂次 $n = 1$ 且 $\alpha_0 = 0$ 时, α_1 由 0.1 改变到 5 时的 CS 曲线变化情况

大。因此这种曲线越长,曲率就越大,这就是螺旋曲线的由来。CS 曲线的增长速率受系数 α_1 的影响如图 2 所示。由图 2 可知,当变化相同弧长时, α_1 的值越大,曲率增加得越快。此外,曲率公式的幂次数同样会影响它的形状。图 3 给出了不同幂次数的曲率多项式对应的 CS 曲线。最高幂次项的系数 $\alpha_n = 1$,其它都取 0,

可以看出幂次数越高,曲线卷曲的越快。

以上两种因素决定了 CS 曲线的形状,由此可推出一种与曲率有关的多项式。定义任意形状的 CS 曲线,通过定义自由变量的幂次数,可满足任何限制约束。如上

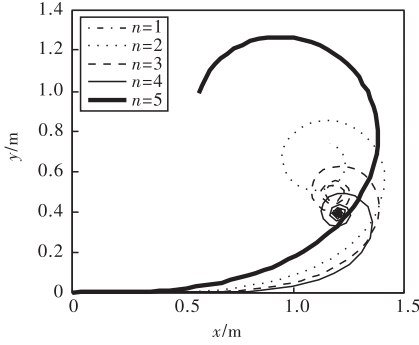


图 3 $\alpha_n = 1$ 且其余系数均为 0 时,最高幂次 n 从 1 变到 5 时的情况

所述,重点要考虑初始和终止约束,该约束可归为等式约束。在 CS 曲线中,如果要满足初始状态 $P_0 = (x_0, y_0)$,则至少需要两个参数才能满足边界条件。此外,还需增加一参数来满足其它不等式约束,并通过协调所有参数使问题达到最优。若使用过多的参数,虽然增加了 CS 曲线灵活性,但同时也会加大计算负担。所以为综合考虑问题的最优化和计算时间,这里采用 5 个参数的 CS 曲线,其中 3 个参数 (a, b, c) 所组成的三次多项式用来表示曲线的角度, θ_0 是初始航向角,最后一个参数表示终点弧长 s_f ,具体表达式如下:

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta_0 + as + bs^2 + cs^3 \\ \kappa(s) &= \dot{\theta}(s) = a + 2bs + 3cs^2 \\ x(s) &= x_0 + \int_0^{s_f} \cos(\theta_0 + as + bs^2 + cs^3) ds \quad (8) \\ y(s) &= y_0 + \int_0^{s_f} \sin(\theta_0 + as + bs^2 + cs^3) ds \end{aligned}$$

2.2 基于 CS 曲线的航迹光顺约束

1) 连续曲率约束

要设计出一条可飞的航迹,曲率的连续性是需考虑的重要因素,曲率的不连续性将会使角度控制输入指令产生跳变。平面上由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 定义的曲率可表示如下:

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \quad (9)$$

采用式(8)中 3 参数的多项式表达式为:

$$\kappa(s) = a + 2bs + 3cs^2 \quad (10)$$

曲率的一阶和二阶导数分别对应该点处的速度和加速度,因此,必须要求曲率是二阶可导的,而式(10)所示的 CS 曲线是二次多项式,满足条件。

2) 最大曲率约束

在式(8)中,曲率是决定 CS 曲线形状的唯一因素。通过限制曲线最大曲率,可对无人机的运动加速

度进行限制。由于曲率是弧长的抛物线函数,因此它的最大值点只可能是下面三种情况之一:起点、最高或最低点、终点。以上三点的曲率数学表达式如下:

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= a \\ \kappa_m &= a - \frac{b^2}{3c} \\ \kappa_f &= a + 2bs_f + 3cs_f^2 \end{aligned} \quad (11)$$

如果曲率大小没有超过这三点中任一点,那么整条曲线都满足曲率限制条件。

3) V 点投影约束

为保证航迹的安全性,需尽量缩小 CS 曲线上 V 点与其投影点之间的距离。在定义 CS 曲线参数之前,很难计算其正交投影距离,显然,CS 曲线上点的法线投影即为该点处切线斜率的负倒数。假设有 n 个 V 点。V 点 i 在 CS 曲线上的投影将满足下式:

$$\frac{p_{y_i} - y(s_i)}{p_{x_i} - x(s_i)} \cdot \tan(\theta(s_i)) = -1 \quad (12)$$

(p_{x_i}, p_{y_i}) 是 V 点 i 的坐标, s_i 是 CS 曲线上从起点到相应的投影点 $(x(s_i), y(s_i))$ 之间的弧长。V 点 i 到它的投影点之间距离可按下面公式计算:

$$d_i = \sqrt{(p_{x_i} - x(s_i))^2 + (p_{y_i} - y(s_i))^2} \quad (13)$$

4) 边界约束

系统中初始点和终点边界限制条件均是等式约束。由于 CS 曲线生成的路径是从原点开始的,因此设置如下 CS 曲线参数,即满足初始条件:

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0 \quad (14)$$

而利用龙格 - 库塔数值积分法可得到满足终点的边界条件。

此时,已满足了所有的限制约束。其中一些约束,CS 曲线自身即可满足,其余的可通过相应的等式和不等式条件来描述。因此航路光顺问题就转变为一求 CS 曲线参数最优问题。

2.3 基于 CS 曲线的最优航迹光顺模型

文中用 SNOPT 工具来求解该非线性规划问题,它是一种基于序列二次规划算法的求解方法,可有效地求解大规模带约束的非线性规划问题。SNOPT 可以用来解决如下问题:

$$\min J(x) \quad (15)$$

$$x_L < x < x_U \quad (15)$$

$$b_L < Ax < b_U \quad (16)$$

$$c_L < c(x) < c_U \quad (17)$$

其中, $J(x)$ 为目标函数,式(15)为参变量约束;式(16)为线性不等式约束;式(17)为非线性不等式约束。

航迹光滑模型可转换为如下 NLP 问题:

$$J = \sum_{i=1}^n [(p_{x_i} - x(s_i))^2 + (p_{y_i} - y(s_i))^2] \quad (18)$$

CS 曲线中有关 NLP 的变量如下:

$$x = [\theta_0, a, b, c, s_1, \dots, s_i, \dots, s_n, s_f] \quad (19)$$

其中, $i = 1, \dots, n$ 为等式约束条件, 包括 V 点投影限制 P_0 和 P_f 边界条件。这些限制条件能确保 CS 曲线具有最小化投影偏差, 并且满足式 (8)。另外, 为了确保光滑后的航迹可飞, 还需增加如下不等式约束:

$$\begin{aligned} -|\kappa_{\max}| &\leq a \leq |\kappa_{\max}| \\ -|\kappa_{\max}| &\leq a - \frac{b^2}{3c} \leq |\kappa_{\max}| \\ -|\kappa_{\max}| &\leq a + 2bs_f + 3cs_f^2 \leq |\kappa_{\max}| \\ \text{if}(s_0 \leq -\frac{b}{3c} \leq s_f) \end{aligned} \quad (20)$$

3 仿真分析

为验证所提航迹光滑算法的正确性, 构造如图 1 所示的战场威胁环境, 起点坐标 (2.5, 2.5), 终点坐标 (17, 12.8)。为方便计算, 威胁均为雷达威胁, 且雷达各向威胁相同。

首先采用 V 图法构造规划空间; 然后运用动态规划方法获取初始最优航迹; 最后应用文中所提出的基于 CS 的最优航迹光滑算法平滑航迹。仿真结果如图 4 所示。

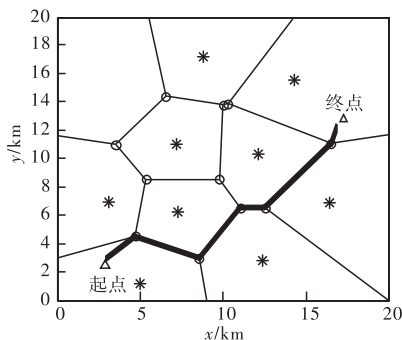


图 4 初始航迹生成

对于图 4 中的所有 V 点, 分别生成有最大曲率限制和没有最大曲率限制的 CS 曲线, 最大曲率限制条件为 $|\kappa_{\max}| = 1/3$ 。仿真结果分别如图 5 ~ 图 6 所示。

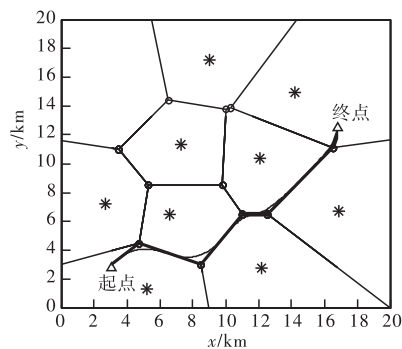


图 5 无曲率限制的 CS 曲线

由图 5 ~ 图 6

可知, 不带曲率限制的 CS 曲线能更好地逼近 V 点, 而带曲率限制的曲线要增加横向加速度来跟踪初始航迹。带曲率约束和不带曲率约束的 CS 曲线的累积威胁分别为 0.495 和 0.512, 而由 V 图生成初始航迹的累

积威胁为 0.439, 可见, 通过 CS 曲线生成了一条不仅可飞而且威胁代价相当的新航迹。

4 结论

航迹光滑是对初始航迹的进一步处理的过程, 其目的是生成可供无人机飞行的最优航迹。

文中首先应用 V 图法构造了初始规划空间, 并通过动态规划法对空间搜索获得初始最优航迹; 其次, 通过分析 CS 曲线特性, 提出了一种基于 CS 的航迹光滑算法; 通过引入无人机飞行性能约束, 建立了最优航迹光滑模型, 以此作为航迹光滑的评价指标, 将航迹光滑问题转化为带约束的 NLP 问题; 运用 SNOPT 工具对模型进行解算, 结果表明该算法较好的解决了无人机的航迹光滑问题, 光滑结果既保证了最终航迹的安全性又保证了可飞性。

参考文献:

- [1] 马培蓓, 纪军. 3 种多导弹航迹规划算法的比较[J]. 电光与控制, 2010, 17(10): 28 - 32.
- [2] 李季, 孙秀霞. 基于改进 A-Star 算法的无人机航迹规划算法研究[J]. 兵工学报, 2008, 29(7): 788 - 792.
- [3] 马云红, 周德云. 基于 B 样条曲线的无人机航路规划算法[J]. 飞行力学, 2004, 22(2): 74 - 77.
- [4] 冯琦, 周德云. 基于 B 样条曲线及遗传算法求解 TA/TA 问题[J]. 电光与控制, 2001, 4(84): 28 - 32.
- [5] Stoer J. Curving fitting with clothoidal splines[J]. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 1982, 87(4): 317 - 346.
- [6] Davis T G. Total least-squares spiral curve fitting[J]. Journal of Surveying Engineering, 1999, 125(4): 159 - 175.
- [7] Shanmugavel M Tsourdos, A Zbikowski R. 3D path planning for multiple UAVs using Pythagorean hodograph curves [C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2007; 2007 - 6455.
- [8] Shanmugavel M. Path planning of multiple autonomous vehicles[D]. USA: Ph. D. Dissertation of Department of Aerospace, Power and Sensors, 2007.
- [9] Kelly A, Nagy B. Reactive nonholonomic trajectory generation via parametric optimal control[J]. International Journal of Robotics Research, 2003, 22(7): 583 - 601.
- [10] McLain T W, Beard R W. Trajectory planning for coordinated rendezvous of unmanned air vehicles [C]// AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2000; 430 - 436.

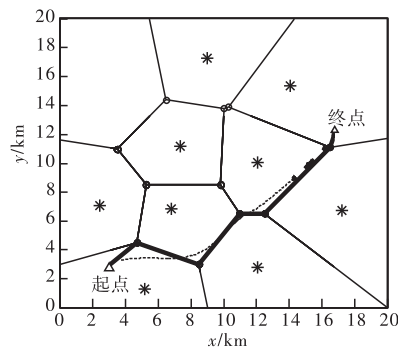


图 6 有曲率限制的 CS 曲线