文章编号: 1003- 207(2004) 04- 0089- 05

基于 Vague 集包含度的模糊多目标决策

刘华文

(山东大学数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘 要: 将 Vague 集的包含度应用于模糊条件下的多目标决策问题。首先, 定义 vague 集的包含度, 利用正常蕴涵算子给出 Vague 包含度的一系列具体公式, 并通过定义 Vague 集的基数将模糊集的部分包含度公式推广到 Vague 集。然后给出基于 Vague 集包含度的模糊多目标决策方法。最后, 通过例子阐明方法的有效性。

关键词: 模糊多目标决策; Vague 集; 包含度; 正常蕴涵; 基数

中图分类号: O159; O223 文献标识码: A

1 引言

Vague 集[1] 是 Zadeh 模糊集[2] 的一种推广形式, 它等同于 Zadeh 模糊集的另一推广形式 ——直觉模糊集[3, 4]。Vague 集由于其定义本身体现出元素对模糊概念的属于与不属于的程度或证据, 所以较传统的模糊集有更强的表达不确定性的能力。目前, Vague 集理论正逐渐渗透于人工智能、决策分析、模式识别及智能信息处理等领域, 该理论也因此引起国内外众多学者的关注[1, 3- 8]。

包含度[9] 刻划的是一集合被另一集合所包含的程度的量, 是包含关系的定量描述, 它包容了"关系"的不确定性。包含度理论同模糊集理论相辅相成, 成为研究不确定性的重要工具。Chen 和 Tan[5] 将 Vague 集应用于模糊条件下的多目标决策问题, 利用记分函数与加权记分函数给出决策。Hong 和 Choi[6] 以及国内学者李凡等[7, 8] 也分别对此问题进行了讨论。本文将包含度应用于上述问题。首先给出 Vague 集包含度的定义, 并借助于正常蕴涵算子和集合基数给出 Vague 集包含度的一系列具体公式。然后, 基于 Vague 集的包含度给出模糊环境下的多目标决策方法。最后通过例子阐明该方法的有效性, 本文为模糊多目标决策问题提供了一个新的解决方法, 同时也为包含度理论向应用领域的渗透提供了一条新思路。

收稿日期: 2003- 11- 05; 修稿日期: 2004- 05- 31

基金项目: 山东省自然科学基金资助项目(Y2001G07)

作者简介: 刘华文(1964-) , 女(汉族) , 山东东营人, 山东大学数学与系统科学学院副教授, 博士生, 研究方向: 模糊集合论, 模糊决策与识别.

2 Vague 集的概念与运算

定义 2. 1[1] 论域 X 上的 Vague 集 A 由真隶属函数 t_A 和假隶属函数 f_A 所描述:

$$t_A: X \to [0, 1], f_A: X \to [0, 1]$$

其中 $t_A(x)$ 是由支持 x 的证据所导出的肯定隶属度的下界, $f_A(x)$ 则是由反对 x 的证据所导出的否定隶属度的下界, 且 $t_A(x) + f_A(x) \leqslant 1$。元素 x 在 Vague 集 A 中的隶属度被 $[0, 1]$ 的子区间 $[t_A(x), 1 - fA(x)]$ 所界定, 称该区间为 x 在 A 中的 Vague 值, 记为 $v_A(x)$。

记 $a = \sum_X [t_A(x), 1 - f_A(x)/x$. 当 $t_A(x) + f_A(x) = 1 (\forall x \in X)$ 时, Vague 集 A 退化为 Zadeh 模糊集。论域 X 上所有 Vague 集的全体记作 $VS(X)$。

全集 X 与空集 ϕ 的 Vague 集表示为: $X = \sum_X [1, 1]/x$, $\phi = \sum_X [0, 0]/x$。

定义 2. 2 设 A, B 是 X 上的 Vague 集。以下定义 Vague 集的运算:

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow t_A(x) \leqslant t_B(x) \& f_A(x) \geqslant f_B(x), \forall x \in X$;

(2) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \& B \subseteq A$;

(3) $A \cup B = \sum_X [\max(t_A(x), t_B(x)), 1 - \min(f_A(x), f_B(x))]/x$;

(4) $A \cap B = \sum_X [\min(t_A(x), t_B(x)), 1 - \max(f_A(x), f_B(x))]/x$;

(5) $A^c = \sum_{i=1}^{n} [f_A(x), 1 - t_A(x)]/x$.

容易验证, $(VS(X), \subseteq)$ 为一偏序集。

3 Vague 集的包含度

3.1 基于正常蕴涵的包含度

以下约定: X 是一非空集。

定义 **3.1** 若映射 $I: VS(X)\times VS(X)[0,1]$ 满足条件:

$(I1)\ A\subseteq B\Rightarrow I(A,B)=1$;

$(I2)\ I(X,\Phi)=0$;

$(I3)\ A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow I(C,A)\leqslant \min(I(B,A), I(C,B))$

则称 $I(A,B)$ 为 A 在 B 中的包含度, 称映射 I 为包含度函数。

定义 **3.2**[10] 若映射 $\theta: [0,1]^2\rightarrow[0,1]$, 满足条件:

(1) $\theta(1,0)=0$;

(2) $\theta(0,0)=\theta(0,1)=\theta(1,1)=1$

则称 θ 是模糊正常蕴涵算子, 简称正常蕴涵。

定义 **3.3**[11] 设 $(K,\leqslant)$ 为一予序集, 即 K 上的关系"$\leqslant$"满足自反性和传递性, 且设 $(K,\leqslant)$ 上有唯一的最小元素 0 和最大元素 1。称映射 $K\times K\rightarrow K$ 为 T 模, 若 T 满足:

(1) $T(0,0)=0,\ T(1,1)=1$;

(2) $T(a,b)=T(b,a)$;

(3) $a\leqslant c,\ b\leqslant d\Rightarrow T(a,b)\leqslant T(c,d)$;

(4) $T(T(a,b)c)=T(a,T(b,c))$;

(5) $T(a,1)=a$。

定理 **3.1** 设 $A,B\in VS(X)$, θ 是一正常蕴涵。若 θ 满足

(1) $\forall u,v\in[0,1]$, 且 $u\leqslant v\Rightarrow\theta(uv,)=1$;

(2) $\theta(u,v)$ 关于 v 为非减函数, $\theta(u,v)$ 关于 u 为非增函数。则以下 I_1, I_2 均为 *Vague* 集的包含度函数:

$$I_1(A,B)=\inf_{x\in X}[\lambda\theta(t_A(x),t_B(x))+(1-\lambda)\theta(f_B(x),f_A(x))],\ \lambda\in[0,1];$$

$$I_2(A,B)=\inf_{x\in X}T\{\theta(t_A(x),t_B(x)),\theta(f_B(x),f_A(x))\}。$$

其中 $T:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 为 $-T$ 模。

证明: 以下仅证 I_2, I_1 的证明类似。

$(I1)\ A\subseteq B\Rightarrow t_A(x)\leqslant t_B(x), f_A(x)\geqslant f_B(x),\ \forall x\in X$

$\Rightarrow\theta(t_A(x),t_B(x))=1,\ \theta(f_B(x),f_A(x))=1$

$\Rightarrow I_2(A,B)=\inf_{x\in X}T(1,1)=1$。

$(I2)\ I_2(X,\Phi)=\inf_{x\in X}T(\theta(1,0),\theta(1,0))=\inf_{x\in X}T(0,0)=0$。

$(I3)\ A\subseteq B\subseteq C\Rightarrow t_A(x)\leqslant t_B(x)\leqslant t_C(x), f_A(x)\geqslant f_B(x)\geqslant f_C(x),\ \forall x\in X$。

由 $\theta(u,.)$ 非减, $\theta(.,v)$ 非增, 得

$\theta(t_C(x),t_A(x))\leqslant\theta(t_C(x),t_B(x)),\ \theta(f_A(x),f_C(x))\leqslant\theta(f_B(x),f_C(x))$

$\Rightarrow T(\theta(t_C(x),t_A(x)),\theta(f_A(x),f_C(x)))\leqslant T(\theta(t_C(x),t_B(x)),\theta(f_B(x),f_C(x)))$

$\Rightarrow\inf_{x\in X}T(\theta(t_C(x),t_A(x)),\theta(f_A(x),f_C(x)))\leqslant\inf_{x\in X}T(\theta(t_C(x),t_B(x)),\theta(f_B(x),f_C(x)))$

$\Rightarrow I_2(C,A)\leqslant I_2(C,B)$. 同理可证, $I_2(C,A)\leqslant I_2(B,A)$

定理 **3.2** 设 X 是一有限论域, θ 是一正常蕴涵。若 θ 满足

(1) $\forall u,v\in[0,1]$, 且 $u\leqslant v\Rightarrow\theta(u,v)=1$;

(2) $\theta(u,v)$ 关于 v 为非减函数, $\theta(u,v)$ 关于 u 为非增函数。则以下 I_3, I_4 均为 Vague 集的包含度函数:

$$I_3(A,B)=\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}[\lambda\theta(t_A(x),t_B(x))+(1-\lambda)\theta(f_B(x),f_A(x))],\ \lambda\in[0,1];$$

$$I_4(A,B)=\frac{1}{|X|}\sum_{e\in X}T\{\theta(t_A(x),t_B(x)),\theta(f_B(x),f_A(x))\}。$$

其中 $|X|$ 表示 X 的基数, $T:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 为一 T 模。

证明: 类似定理 3.1 的证明。

满足上述定理条件的正常蕴涵, 常见的有: $\forall a,b\in[0,1]$

(1) Lukasiewica 蕴涵: $a\theta_1 b=\min\{1-a+b,1\}$;

(2) Goguen 蕴涵: $a\theta_2 b=\begin{cases}1, & a=0\\ \min(\frac{b}{a},1), & a\neq 0\end{cases}$;

(3) Gödel 蕴涵: $a\theta_3 b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ b, & a>b\end{cases}$;

(4) Gaines - Recher 蕴涵: $a\theta_4 b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ 0, & a>b\end{cases}$。

3.2 基于集合基数的包含度

定义 **3.4** 设 X 为一有限集, $A\in VS(X)$, 定义 A 的基数为

$$|A|=\sum_{x\in X}=\frac{1+t_A(x)-f_A(x)}{2}\tag{1}$$

容易验证, 以下模糊集的包含度函数 $I_5 \sim I_{10}$[12] 对 Vague 集也是成立的。

定理 3.3　设 X 为有限论域, $A, B \in VS(X)$, 则以下 $I_5 \sim I_{10}$ 均为 Vague 集的包含度函数:

$$(1)\ I_5(A,B)=\begin{cases}1, & A=\phi\\ \dfrac{|A\cap B|}{|A|}, & A\neq\phi\end{cases};$$

$$(2)\ I_6(A,B)=\begin{cases}1, & A=B=\phi\\ \dfrac{|B|}{|A\cup B|}, & \text{其它}\end{cases};$$

$$(3)\ I_7(A,B)=\begin{cases}1, & B=x\\ \dfrac{|A^c\cap B^c|}{|B^c|}, & B\neq X\end{cases};$$

$$(4)\ I_8(A,B)=\begin{cases}1, & A=B=X\\ \dfrac{|A^c|}{\{A^c\cup B^c|}, & \text{其它}\end{cases};$$

$$(5)\ I_9(A,B)=\frac{|A^c\cup B|}{|A^c\cup A\cup B\cup B^c|};$$

$$(6)\ I_{10}(A,B)=\begin{cases}1, & A=\phi\text{或}B=X\\ \dfrac{|A^c\cap A\cap B\cap B^c|}{|A\cap B^c|}, & \text{其它}\end{cases}。$$

4　模糊多目标决策问题与方法

模糊多目标决策问题[5]: 设 $A=\{A_1, A_2, \cdots A_m\}$ 为决策目标集, $C=\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为约束条件集, 并假设决策目标 A_i 在约束条件 C 下的特征由以下 Vague 集表示:

$$A_i=\{(C_1,[t_{i1},1-f_{i1}]),(C_2,[t_{i2},1-f_{i2}]),\cdots,(C_n,[t_{in},1-f_{in}])\}$$

其中 t_{ij} 表示决策目标 A_i 满足约束条件 C_j 的程度, f_{ij} 表示决策目标 A_i 不满足约束条件 C_j 的程度。假设决策者要在决策目标集 A 中选择一个目标同时满足约束条件 $C_j, C_k, \cdots, C_p$ 或者满足约束条件 C_s, 即决策者的要求为: C_j and C_k and $\cdots$and C_p or C_s。

对上述问题, 现利用 Vague 集的包含度给出目标选择方法。其基本思想类似于 TOPSIS 方法: 首先构造理想目标和负理想目标, 其中理想目标是决策目标集中并不存在的虚拟的最佳目标, 而负理想目标则是虚拟的最差目标。比较理想目标在目标 A_i 中的包含度及目标 A_i 在负理想目标中的包含度, 既最大程度地包含理想目标又最小程度地被负理想目标所包含的决策目标是最佳选择目标。为此, 首先引入如下构造性定义:

定 4.1　设 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 与 $C_j(j=1,2,\cdots,n)$ 如上模糊多目标决策问题中所述。

(i) 满足约束条件 $C_j, C_k, \cdots, C_p$ 的理想目标与负理想目标分别定义为:

$$G_1=\{(C_j,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{ij},1-f_{ij}]),(C_k,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{ik},1-f_{ik}]),\cdots,(C_p,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{ip},1-f_{ip}])\}$$
$$=\{(C_j,[t_{gi},1-f_{gi}]),(C_k,[t_{gk},1-f_{gk}]),\cdots,(C_p,[t_{gp},1-f_{gp}])\}, \tag{2}$$

$$B_1=\{(C_j,\bigwedge_{i=1}^{m}[t_{ij},1-f_{ij}]),(C_k,\bigwedge_{i=1}^{m}[t_{ik},1-f_{ik}]),\cdots,(C_p,\bigwedge_{i=1}^{m}[t_{ip},1-f_{ip}])\}$$
$$=\{(C_j,[t_{bi},1-f_{bj}]),(C_k,[t_{bk},1-f_{bk}]),\cdots,(C_p,[t_{bp},1-f_{bp}])\}。 \tag{3}$$

(ii) 满足约束条件 C_s 的理想目标与负理想目标分别定义为:

$$G_2=\{(C_s,\bigvee_{i=1}^{m}[t_{is},1-f_{is}])\}=\{(C_s,[t_{gs},1-f_{gs}\})\}, \tag{4}$$

$$B_2=\{(C_s,\sum_{i=1}^{m}[t_{is},1-f_{is}])\}=\{(C_s,[t_{bs},1-f_{bs}])\} \tag{5}$$

其中, $t_{gl}=\bigvee_{i=1}^{m}t_{il}$, $1-f_{gl}=\bigvee_{i=1}^{m}(1-f_{il})$; $t_{bl}=\bigwedge_{i=1}^{m}t_{il}$, $1=f_{bl}=\bigwedge_{i=1}^{m}(1-f_{il})$, $l=j,k,\cdots,p,s$.

定义 4.2　理想目标在目标方案 A_i 中的包含度 $D(A_i)$ 及目标方案 A_i 在负理想目标中的包含度 $d(A_i)$ 分别定义为:

$$D(A_i)=\max(I(G_1,A_{il}),I(G_2,A_{i2})) \tag{6}$$
$$d(A_i)=\min(I(A_{i1},B_1),I(A_{i2},B_2)) \tag{7}$$

$i=1,2,\cdots,m$, 其中, $A_{i1}=\{(C_j,[t_{ij},1-f_{ij}]),(C_k,[t_{ik},1-f_{ik}]),\cdots,(C_p,[t_{ip},1-f_{ip}])\}$, $A_{i2}=\{(C_s,[T_{is},1-f_{is}]), i=1,2,\cdots,m$.

定义 4.3　目标 A_i 的排序指标值定义为:

$$C_i=D(A_i)/[d(A_i)+D(A_i)] \tag{8}$$

$i=1,2,\cdots,m$.

解决上述模糊多目标决策问题的具体算法步骤为:

(i) 计算满足约束条件 $C_j, C_k, \cdots, C_p$ 的理想目标 G_1 与负理想目标 B_1; 满足约束条件 C_s 的理想目标 G_2 与负理想目标 B_2;

(ii) 计算 G_j 在 A_{ij} 中的包含度 $(I(G_j,A_{ij})$, A_{ij} 在 B_j 中的包含度 $I(A_{ij},B_j)$, $j=1,2$; $i=1,2,\cdots,m$.

(iii) 计算理想目标在目标方案 A_i 中的包含度

$D(A_i)$ 及目标方案 A_i 在负理想目标中的包含度 $d(A_i)$;

(iv) 算出目标 A_i 的排序指标值 $C_i(i=1,2,\cdots,m)$;

(v) 若存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使得 $c_{i0}=\max(C_1,C_2,\cdots,C_m)$, 则方案 A_{i0} 是最佳选择。

上述方法中同时引入理想目标和负理想目标。其原因为: 两个备选目标以相同的包含度包含理想目标时, 为区分这两个目标的优劣引入负理想目标, 以较小的包含度被负理想目标所包含的目标为段。

例 **4.1** 设决策目标集 $A=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$, 约束条件集 $C=\{C_1,C_2,C_3\}$, 决策目标 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 在约束条件 C 下的特征由以下 Vague 集表示:

$A_1=\{(C_1,[0.2,0.8]),(C_2,[0.3,0.9]),(C_3,[0.21])\}$,

$A_2=\{(C_1,[0.3,0.7]),(C_2,[0.2,0.8]),(C_3,[0.3,0.9])\}$,

$A_3=\{(C_1,[0.4,0.6]),(C_2,[0.5,0.6]),(C_3,[0.3,0.8])\}$,

$A_4=\{(C_1,[0.5,0.7]),(C_2,[0.4,0.6]),(C_3,[0.5,0.7])\}$,

$A_5=\{(C_1,[0.4,0.6]),(C_2,[0.6,0.7]),(C_3,[0.6,0.6])\}$,

决策者要在目标集中选择一个目标同时满足条件 C_1, C_2 或者满足条件 C_3, 即决策者的要求为 C_1 *and* C_2 *or* C_3.

首先, 构造满足条件 C_1,C_2 以及满足条件 C_3 的理想目标和负理想目标:

$G_1=\{(C_1,[0.5,0.8]),(C_2,[0.6,0.9]),$

$G_2=\{C_3,[0.6,1])\}$

$B_1=\{(C_1,[0.2,0.6]),(C_2,[0.2,0.6]),(B_2=\{(C_3,[0.2\ 0.6])\}$,

包含度函数 I 取定理3.2中的 I_3, 取 $\lambda=\frac{1}{2}$, 即

$$I(A,B)=\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}\frac{\theta(t_A)(x),t_B(x))+\theta(f_B(x),f_A(x))}{2}$$

其中, 正常蕴涵 θ 取 Lukasiewica 蕴涵 θ_1, 即 $a\theta b=\min\{1-a+b,1\}$, $\forall a,b\in[0,1]$. 算得 G_j 在 A_{ij} 中的包含度 $I(G_j,A_{ij})$ 及 A_{ij} 在 B_j 中的包含度 $I(A_{ij},B_j),(J=1,2;i=1,2,\cdots,m)$ 分别列于下列表:

表 1 G_1 在 A_{i1} 及 A_{i1} 在 B_1 中的包含度

	A_{11}	A_{21}	A_{31}	A_{41}	A_{51}
$I(G_1,A_{i1})$	0.85	0.8	0.825	0.85	0.875
$I(A_{i1},B_1)$	0.8	0.9	0.875	0.85	0.825

表 2 G_2 在 A_{i2} 及 A_{i2} 在 B_2 中的包含度

	A_{12}	A_{22}	A_{32}	A_{42}	A_{52}
$I(G_2,A_{i2})$	0.8	0.8	0.75	0.8	0.8
$I(A_{i2},B_2)$	0.8	0.80.85	0.8	0.8	

利用公式(6)(7) 算得理想目标在目标方案 A_i 中的包含度 $D(A_i)$ 及目标方案 A_i 在负理想目标中的包含度 $d(A_i)$ 为:

表 3 $D(A_i)$ 和 $d(A_i)$ 的值

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$D(A_i)$	0.85	0.8	0.825	0.85	0.875
$d(A_i)$	0.8	0.8	0.85	0.8	0.8

再由(8) 式算得各目标的排序指标值:

$C_1=0.515$, $C_2=0.5$, $C_3=0.4925$, $C_4=0.515$, $C_5=0.5224$. 故目标 A_5 是最佳选择。

5 结束语

本文对 Vague 集的包含度进行了讨论, 并将其运用到模糊条件下的多目标决策问题。本文的结论为 Vague 环境下的信息处理提供了有效手段, 本文的方法为包含度理论的进一步应用提供了一条新思路。

参考文献:

[1] Gau W L, Buehrer DJ. Vague sets[J]. IEEE Trans. Syst. Man, Cybern., 1993, 23(2): 610- 614.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Inform. And Control, 1965, 8: 338- 356.

[3] Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87- 96.

[4] Bustince H, Burillo P. Vague sets are Intuitionistic Fffuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79: 403- 405.

[5] Chen S M, Tan J M. Handling multi- criteria fuzzy decision- making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163- 172.

[6] Hong D H, Choi C H. Multi- criteria fuzzy decision- making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114: 103- 113.

[7] 李凡, 卢安, 蔡立晶. 基于 Vague 集的多目标模糊决策方法[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(7): 1- 3.

[8] 李凡, 饶勇. 基于 Vague 集的加权多目标模糊决策方法[J]. 计算机科学, 2001, 28(7): 60- 65.

[9] 张文修, 徐宗本, 梁怡, 等. 包含度理论[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(4): 1- 9.

[10] 吴望名. 模糊推理的原理与方法[M]. 贵阳: 贵州科技出版社. 1994, 34- 52.

[11] 张文修, 王国俊, 刘旺金, 方锦暄. 模糊数学引论[M]. 西安: 西安交通大学出版社 1991, 45- 65.

[12] Fan J L, Xie W X, Pei J H. Subsethood measure: new definitions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 106: 201- 209.

Multi- Criteria Fuzzy Decision Making Based on Inclusion Degree of Vague Sets

LIU Hua- wen

(School of Mathematics and System Seiences, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: The concept of inclusion degree of vague sets is applied to multi- criteria decision making in fuzzy environment. First, inclusion degree of vague sets is defined and a series of specific formulas of inclusion degree are presented by means of the norml implication operators. Some formulas of inclusion degree of fuzzy sets are generalized to vague sets by defining the cardinal number of vague sets. Then, we give multi- criteria fuzzy decision-making method based on inclusion degree of vague sets. Finally, we illustrate the effectiveness of the method proposed in this paper by an example.

Key words: multi- criteria fuzzy decision- making; vague sets; inclusion degree; normal implication; cardinal number