



CSTAM 2011-2773

## 一般流体的准一维定常流方程组及其在超 临界碳氢燃料可压缩流动中的应用

程迪，范学军

中国科学院高超声速科技中心  
中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室

第四届高超声速科技学术会议

2011年12月6-8日 海南·三亚

# 一般流体的准一维定常流方程组及其在超临界碳氢燃料可压缩流动中的应用

程迪<sup>1</sup>, 范学军<sup>1,2</sup>

(1 中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京海淀区 100190)

(2 中国科学院高超声速科技中心, 北京海淀区 100190)

**摘要** 本文基于平衡态热力学理论推导了一般流体的单相准一维定常流动微分方程组, 讨论了一般流体的可压缩流动特性, 并证明了在给定滞止参数的情况下, 任何流体出口动量最大时的马赫数为 $\sqrt{2}$ , 给出了激波后总温升降与滞止状态焦汤系数的关系。最后本文构造了准一维定常流动和激波的计算方法, 并结合 Supertrapp 碳氢燃料热物性计算软件, 以正十二烷为例计算了超临界碳氢燃料在 Laval 喷管中的流动, 说明了离临界点较远的超临界碳氢燃料等熵流动特性和理想气体动力学理论预测的趋势相符合。

**关键词** 非理想气体动力学, 准一维可压缩定常流, 超临界, 碳氢燃料, Laval 喷管

## 符号表

$\rho$	密度	$A(x)$	截面积
$v$	比体积	$D$	水力直径
$T$	温度	$u$	速度
$x$	轴向距离	$\mu_j$	焦汤系数
$M$	马赫数	$f$	摩擦系数
$p$	压力	$s$	比熵
$c$	声速	$h$	比焓
$C_p$	定压比热	$C_v$	定容比热
$\delta q$	比加热量		
$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$			等压热膨胀系数
$\kappa = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$			等温体积压缩系数
$\Gamma = \frac{v^3}{2c^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s$			气动基本导数
$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$			比热比
$K = \frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{1}{\rho \mu_j C_p + 1} + 1$			等效比热比

## 下标

$c$	热力学临界参数
$0$	等熵滞止参数
$r$	折合参数 (reduced parameter)

## 上标

*	喉道参数	'	矩阵转置
---	------	---	------

## 引言

理想气体动力学受限于理想气体假设, 只适用于高温低压冻结流情形。而对于一般流体在任意温度压力下的可压缩流动特性, 理想气体动力学理论是否适用, 在多大程度上适用, 是一个有趣而实际的问题。

与此同时, 超临界态流体在工业界中有着广泛的应用, 比如作为核反应堆的冷却介质或者高压锅炉的工作介质, 超临界萃取在生物化学中的应用以及碳氢燃料在超燃发动机主动冷却[1]和高压燃烧领域中的应用等。但是超临界流体的流动特性是非常特殊的, 既不同于理想气体, 因为其可压缩性很难简单描述, 又不同于一般的低可压缩性液体, 因为临界区附近声速很小 (见图 1), 极易产生明显的可压缩性流动特性。所以在处理超临界流体时不能简单地套用基于理想气体假设的气动理论, 也不能过度简化为不可压缩流体的流动, 而需要基于一般状态方程用非理想气体动力学理论对其进行处理。

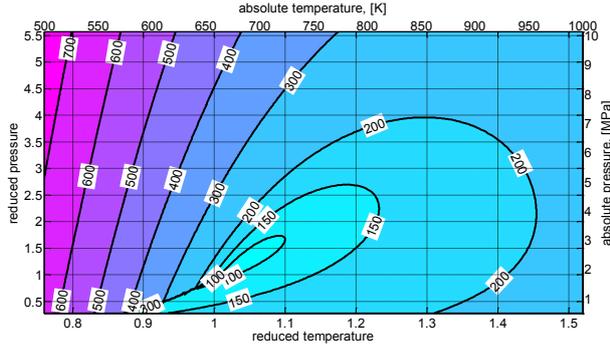


图 1 正十二烷声速等值线, [m/s]

从目前发表的文献来看, 对于真实流体的非理想等熵流动现象的理论研究主要文献有[2][3], 另外有针对加热管流[4]和摩擦管流的研究[5], 还没有同时针对变截面, 带传热和摩擦的准一维定常流动方程, 而且他们的研究结果往往直接带入热力学导数而未进行充分简化, 形式上比较复杂, 工程上也不便于应用或者过分简化为某种特定的状态方程, 不具有通用性。同时这些研究大多局限于多方范德瓦尔斯状态方程(Polytropic Van der Waals Equation of State)或者针对具有负气动基本导数(fundamental derivative of gas dynamics) [2]的 BZT 流体, 其应用背景主要是有机兰金循环(Organic Rankine Cycle) [6, 7]。所得到的结论不完全适用于超临界碳氢燃料, 而在主动冷却超燃发动机的研制中, 超临界碳氢燃料的流动和传热特性非常重要, 所以需要针对碳氢燃料开展非理想气体动力学的理论、计算和实验研究。

本文基于一般平衡态热力学推导了一般流体的准一维定常流动微分方程, 并利用 Bridgmann 表[8, 9]对其中涉及到的热力学一阶导数进行了充分的化简。利用所得结论, 本文证明了任何流体出口动量最大时的马赫数为 $\sqrt{2}$ 。同时以正十二烷(n-dodecane,  $C_{12}H_{26}$ )为例, 结合 Supertrapp[10]碳氢燃料热物性软件包, 计算了超临界正十二烷通过缩放喷管的等熵流动和激波, 计算并讨论了不同工况下的 Laval 喷管的流动, 同时从热力学角度证明了波后总温变化与

为简化表达式, 令  $K \equiv \frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{v}{\mu_j C_p + v} + 1 = (\gamma - 1) \frac{1}{\rho \mu_j C_p + 1} + 1 = \frac{v\beta}{\kappa C_v} + 1$ , 则有

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{(K-1)}{1-M^2} \cdot \frac{\delta q}{c^2} + \frac{KM^2}{2(1-M^2)} \frac{4fdx}{D} \quad (1.10)$$

$$-\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dv}{v} = \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = -\frac{M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{K-1}{1-M^2} \frac{\delta q}{c^2} + \frac{KM^2}{2(1-M^2)} \frac{4fdx}{D} \quad (1.11)$$

Joule-Thomson 系数的关系。

## 1 理论分析

### 1.1 准一维定常等熵流动基本方程式

质量守恒

$$\rho u A = const \implies -\frac{dv}{v} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (1.1)$$

能量方程

$$u du + v dp + T ds = u du + dh = \delta q \quad (1.2)$$

熵方程

$$T ds = \delta q + \frac{2fu^2}{D} dx \quad (1.3)$$

状态方程 (微分形式)

$$dp = -\frac{c^2}{v^2} dv - \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s ds \quad (1.4)$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s dv + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v ds \quad (1.5)$$

其中, 声速的定义为:

$$c^2 = -v^2 \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s \quad (1.6)$$

这里没有列出动量方程, 因为动量方程、能量方程和熵方程三者中只有两个是独立的, 为了推导的方便, 本文没有显式使用动量方程。

根据 Bridgmann 表, 前式中出现的所有热力学导数都可以表示为三个独立的一阶热力学导数的组合。本文采用了工程上相对常用的三个一阶热力学导数  $\mu_j, C_p, C_v$ , 并将所用到的其他一阶热力学导数表示为:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = -\frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{\rho T}{\rho \mu_j C_p + 1} \quad (1.7)$$

$$= -(K-1) \frac{T}{v} \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_v = \frac{T}{C_v} \quad (1.8)$$

$$c^2 = \gamma(C_p - C_v)T \cdot \left(\frac{v}{\mu_j C_p + v}\right)^2 \quad (1.9)$$

最后本文通过 Maple® 数学推导软件, 将以上所有式子代入求解并简化得出一般流体准一维定常流动的微分方程:

$$\frac{dp}{p} = \frac{c^2}{pv} \cdot \frac{M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} - \frac{c^2}{pv} \cdot \frac{(K-1)M^2}{1-M^2} \frac{\delta q}{c^2} - \frac{c^2}{pv} \cdot \frac{M^2}{2} \cdot \frac{(K-1)M^2+1}{1-M^2} \cdot \frac{4fdx}{D} \quad (1.12)$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{(K-1)M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{(K-1)^2}{\gamma-1} \frac{1-\gamma M^2}{1-M^2} \frac{\delta q}{c^2} + \frac{M^2}{2} \frac{(K-1)(K-\gamma-\gamma(K-1)M^2)}{(\gamma-1)(1-M^2)} \frac{4fdx}{D} \quad (1.13)$$

在理想气体极限的情况下  $\mu_j = 0, K = \gamma, \frac{c^2}{pv} = \gamma$ , 可得到理想气体的准一维定常流关系[11]。

从以上公式可以观察得出以下几点结论:

- 绝热无摩擦情况下, 当地密度变化和速度变化仅与马赫数有关, 与物性无关;
- 绝热无摩擦情况下, 亚声速时, 截面积减小, 速度增加, 密度减小, 超声速时, 截面积增加, 速度增加, 密度减小, 和理想气体动力学结论一致;
- 绝热无摩擦条件下, 压力变化趋势与理想气动理论一致;
- 在  $\beta > 0$  的情况下, 压力在加热管流中的变化趋势与理想气动一致, 否则相反;
- 绝热无摩擦条件下, 若  $\beta > 0$ , 温度变化与理想气动理论预测相一致, 否则相反; 不过  $\beta < 0$  的情况多见于低温液相, 可压缩流动中较少遇到。

## 1.2 马赫数变化关系式

以上各式都没有讨论马赫数随流动如何变化的问题, 因为以上推导仅需要一阶热力学导数, 而讨论马赫数变化必须引入更复杂的二阶热力学导数, 所以将其分开来讨论。

对 (1.6) 式取全微分可得:

$$2cdc = -v^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s dv + \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \right)_v ds - \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \cdot 2v dv \quad (1.14)$$

引入气动基本导数的定义:

$$\Gamma = \frac{v^3}{2c^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s = 1 + \frac{\rho}{c} \left( \frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.15)$$

化简可得:

$$\frac{dc}{c} = (1-\Gamma) \frac{dv}{v} + \frac{1}{2C_v} \left( \frac{\partial c^2}{\partial T} \right)_v \cdot \frac{Tds}{c^2} \quad (1.16)$$

再将  $dv/v$  和  $Tds$  表达式代入, 可得:

$$\frac{dc}{c} = \frac{M^2(\Gamma-1)}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \left( \frac{(K-1)(1-\Gamma)}{1-M^2} + \frac{(\frac{\partial c^2}{\partial T})_v}{2C_v} \right) \frac{\delta q}{c^2} + \frac{M^2}{2} \left( \frac{K(1-\Gamma)}{(1-M^2)} + \frac{(\frac{\partial c^2}{\partial T})_v}{2C_v} \right) \frac{4fdx}{D} \quad (1.17)$$

再由马赫数定义式:

$$M = \frac{u}{c} \implies \frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{dc}{c} \quad (1.18)$$

可得马赫数变化关系式:

$$\frac{dM}{M} = -\frac{1+M^2(\Gamma-1)}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \left( \frac{(K-1)\Gamma}{1-M^2} - \frac{(\frac{\partial c^2}{\partial T})_v}{2C_v} \right) \frac{\delta q}{c^2} + \frac{M^2}{2} \left( \frac{K\Gamma}{(1-M^2)} - \frac{(\frac{\partial c^2}{\partial T})_v}{2C_v} \right) \frac{4fdx}{D} \quad (1.19)$$

由于包含传热和摩擦的项太过复杂, 不妨只看截面积变化项中  $\Gamma$  的影响:

- 当  $\Gamma < 1$  时, 声速变化与理想气体动力学理论不一致, 因为在满足量热完全气体状态方程的情况下,  $\Gamma = (1+\gamma)/2 > 1$  恒成立;
- 当  $\Gamma < 1 - 1/M^2$  时, 马赫数变化与理想气动理论不一致, 例如在超声速情况下, 随着喷管扩张, 速度增加, 马赫数反而减小, 见算例 3。

实际上, 气动基本导数  $\Gamma$  是决定等熵流动特性的最关键物性参数, 在  $\Gamma < 0$  的时候还会出现更多反常的气动现象, 一般将其划分为非经典气动现象, 详见文献[2]。

综上所述, 在大多数情况下, 理想气体动力学理论的结论趋势上基本正确, 但在  $\Gamma < 1$  及  $\beta < 0$  时, 可能出现反常, 需要进一步考虑非理想的气动效应。而对于大多数流体,  $\Gamma < 1$  的区域只在临界点附近出现 (见图 5), 而  $\beta < 0$  通常出现在声速较大的液相区, 可压缩流动中较少遇到。

## 1.3 定常等熵流最大喷射动量

在超声速燃烧研究中, 超临界碳氢燃料一般都需要作为射流喷射进入燃烧室, 而在其他条件相同的垂直喷射情况下, 决定混合效率的最关键因素在于射流穿透深度, 而文献[12]研究发现, 决定射流穿透深度的最关键因素在于射流出口的动量密度  $\rho u^2 = u^2/v$ 。而在定常等熵流假设下, 我们可以简单分析出最大喷射动量对应的马赫数为  $\sqrt{2}$ 。

假设等熵定常流动:

$$\frac{d(\rho u^2)}{\rho u^2} = \frac{d\rho}{\rho} + 2\frac{du}{u} = \frac{M^2 - 2}{1 - M^2} \cdot \frac{dA}{A} \quad (1.20)$$

对于大多数超声速喷管流动, 可以分为三个区域来讨论:

$$\begin{cases} M < 1, dA < 0 & \implies d(\rho u^2) > 0 \\ \sqrt{2} > M > 1, dA > 0 & \implies d(\rho u^2) > 0 \\ M > \sqrt{2}, dA > 0 & \implies d(\rho u^2) < 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

显然, 等熵流的出口动量密度只能在马赫数等于 $\sqrt{2}$ 的情况下取得极值, 通常也是最大值。计算结果也显示如此, 而且此结论没有对状态方程作任何假设, 所以是适用于任意平衡态单相流体等熵流的结论。

从计算结果可以看出, 在给定工况下, 出口马赫数从 1 变化到 $\sqrt{2}$ , 出口动量密度增大了约 15%, 按[12]所给公式, 穿透深度大约能增加 8.2%。

## 2 计算

现有的理论方法还只能处理简单的理想气体或者多方范德瓦尔斯气体等满足简单状态方程的流体, 不能满足工程需要。所以本文构造了基于守恒量的等熵流和激波计算方法, 并结合 Supertrapp 软件编写了计算程序, 计算了正十二烷通过缩放喷管时的压力、温度和比流量变化。

### 2.1 算例 1: 等熵流

本文首先尝试了使用 ODE 求解器进行求解, 但是发现其累计数值误差会导致熵不守恒, 因此采用下述守恒方法进行计算。

取流动参数向量和守恒量向量:

$$\begin{cases} \vec{x} = [u, p, T]' \\ \vec{y} = [uA/v, s, h + u^2/2]' \end{cases} \quad (2.1)$$

利用守恒关系式:

$$\vec{y}(\vec{x}_{in}; A_{in}) = \vec{y}(\vec{x}_{out}; A_{out}) \quad (2.2)$$

依次求解下一截面的流动参数向量 $\vec{x}$ 。

本文采用 Newton-Ralphson 法求解该非线性方程, 其 Jacobian 矩阵为:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{A}{v} & -\frac{uA}{v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T & -\frac{uA}{v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \\ 0 & \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_T & \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \\ u & \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T & \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

而 Supertrapp 配合 Bridgmann 表可以在给定  $p, T$  的条件下计算任意的一阶热力学导数, 因而此问题封闭。

不过这种方法在流动马赫数 1 附近会遇到收敛困难的问题, 而且无法进行跨声速计算, 究其原因在于 Jacobian 矩阵的行列式在马赫数 1 附近有奇异性:

$$|\mathbf{J}| = -\frac{AC_p(1 - M^2)}{T} \quad (2.4)$$

不过这种方法可以计算至马赫数非常接近 1 的区域, 不论超声速还是亚声速。而跨声速区域的值可以用插值的办法取得。

本文用这种算法计算了总温为 805K, 总压为 5.2MPa 的正十二烷定常等熵地通过形线为  $A(x)/A^* = (x/10)^2 + 1$  的 Laval 喷管的情形, 正十二烷基本物性见表 1, 结果如图 2 实线所示。

本文中因为涉及到一般流体, 所以滞止参数必须通过等熵关系来定义, 即:

$$T_0 = T_0(h_0, s_0) = T(h + u^2/2, s) \quad (2.5)$$

$$p_0 = p_0(h_0, s_0) = p(h + u^2/2, s) \quad (2.6)$$

表 1 正十二烷基本物性

临界压力	1.817MPa
临界温度	658.1K
临界密度	226.5kg/m <sup>3</sup>
偏心因子	0.574

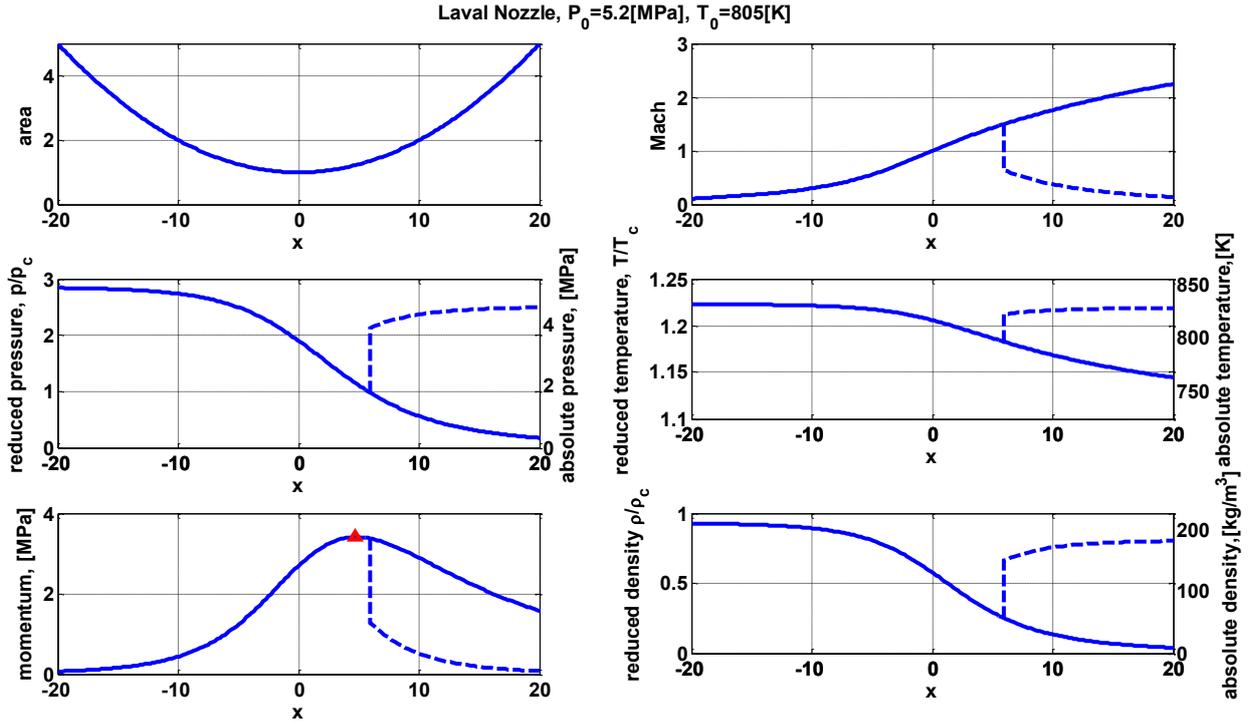


图 2 Laval 喷管流动参数变化图，实线为等熵流，虚线为激波后流动

可以看出，其流动趋势与理想气动理论预测基本一致。动量也确实是在马赫 $\sqrt{2}$ 处取得最大值。同时由于临界区附近比热具有较大的值，因此整个流动过程温度变化比较小。

## 2.2 算例 2：激波

激波的计算和等熵流计算方法类似，只是改变了守恒量向量：

$$\begin{cases} \vec{x} = [u, p, T]' \\ \vec{y} = [u/v, p + u^2/v, h + u^2/2]' \end{cases} \quad (2.7)$$

其 Jacobian 矩阵也有所变化。

$$\mathbf{J}_{shock} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T & -\frac{u}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ \frac{2u}{v} & 1 - \frac{u^2}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T & -\frac{u^2}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \\ u & \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T & \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

然后就可以用于等熵流同样的求解器进行求解了。而且这种方法的优势在于 Newton-Ralphson 法是二阶收敛的，比普通教材中提到的简单迭代法一阶收敛速度要快，而且收敛域要大，不过需要计算至少三个一阶热力学导数。在计算的时候也会遇到与等熵流同样的奇异性问题，因为行列式还是在马赫 1 附近有奇异性。

$$|\mathbf{J}_{shock}| = -\frac{C_p(1 - M^2)}{v} \quad (2.9)$$

所以需要选定合适的迭代初值，特别是要使波后马赫数小于 1。

本文利用等熵流计算结果中马赫数为 1.5 的截面作为波前参数计算了激波波后参数，再回等熵流进行计算，结果如图 2 虚线所示。

综合算例 1 和算例 2 的结果，可以认为离临界点较远的超临界正十二烷的 Laval 喷管流动与理想气动理论预测趋势基本一致。

同时，在计算发现，激波波后参数为：总压 4.57MPa，总温 802.5K。出现了与理想气体动力学不同的现象：总温降低了。其理论解释如下：

气流的滞止参数通过激波的过程在热力学上可以等价地视为一个绝热节流过程：总焓不变，总熵增加。由热力学导数关系：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_h = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_h = -\frac{T\mu_j}{v} \quad (2.10)$$

显然，气流滞止参数在熵增后的变化仅和 Joule-Thomson 系数的符号有关。而由图 3 可以看出，在临界点附近的超临界区，正十二烷的焦汤系数是大于零的，所以波后总温会减小。

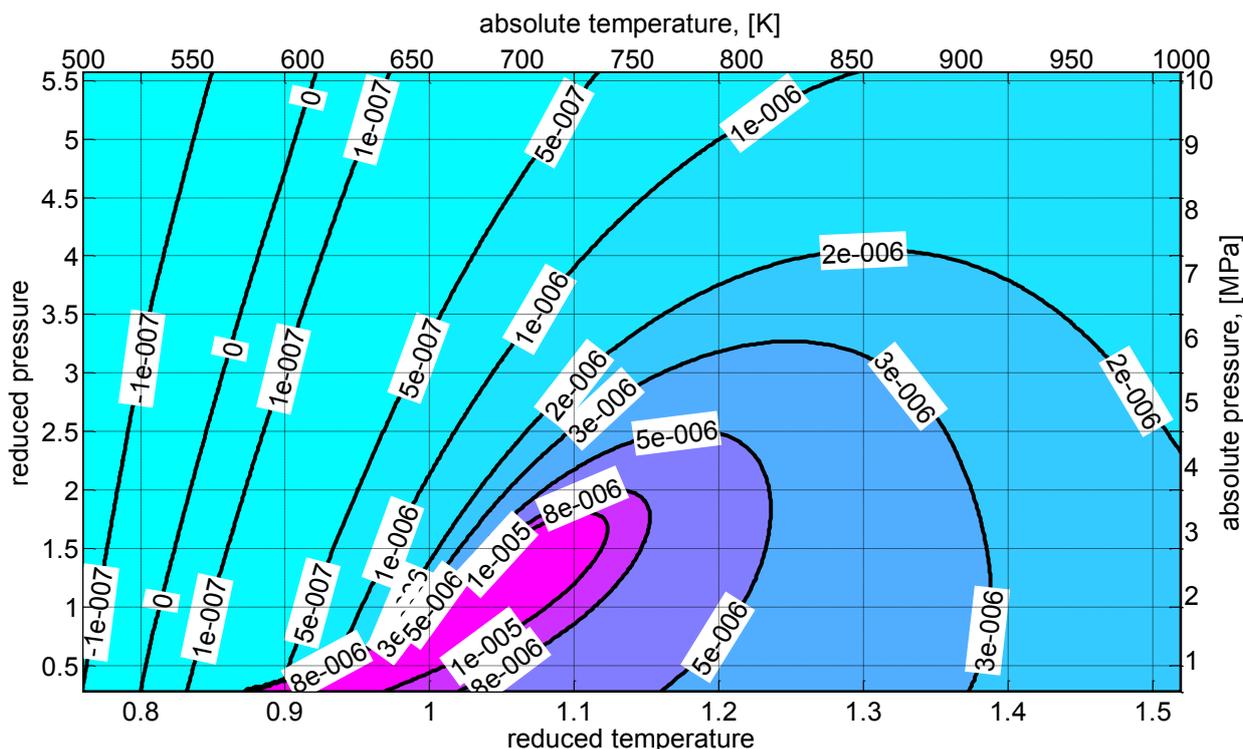


图3 Joule-Thomson 系数等值线, 单位[K/Pa]

由热力学教科书可知, 对于大部分气体, 其转换曲线 (inversion curve) 如图 4 所示, 其极值点通常在十几倍临界压力和 1.5 倍临界温度附近。通常情况下的高超声速来流因为总温特别高, 而空气组分的临界温度很低, 因而滞止参数在制热区, 所以高超声速条件下精确测量总温的时候可能需要考虑焦汤效应修正或者直接测量总焓。

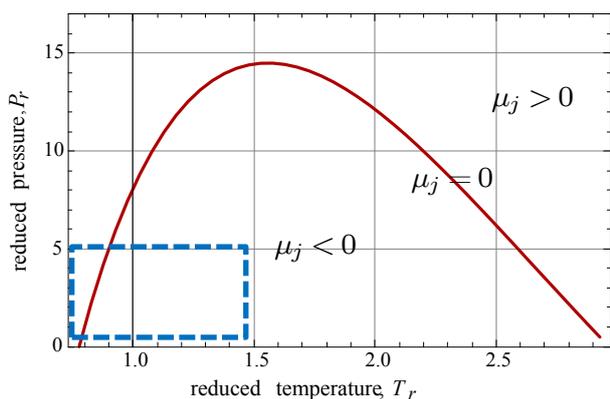


图4 焦汤系数反相曲线, 采用 Peng-Robinson 状态方程, 偏心因子为 0.575

### 2.3 算例 3: 小 $\Gamma$ 时的反常现象

前面提到, 在  $\Gamma < 1 - 1/M^2$  时, 马赫数变化趋势与理想气动预测相反, 观察图 5 可知, 在 700K-750K, 2.0MPa 左右, 如果流体速度达到马赫 2, 就满足了  $\Gamma < 1 - 1/M^2$  的条件, 会出现反常气动现象。同时考虑到碳氢燃料在临界点附近的巨大比热导致的流动温度变化较小, 本文计算了来流总温 700K, 总压 3.4MPa 的缩放喷管流动。结果如图 6 所示。

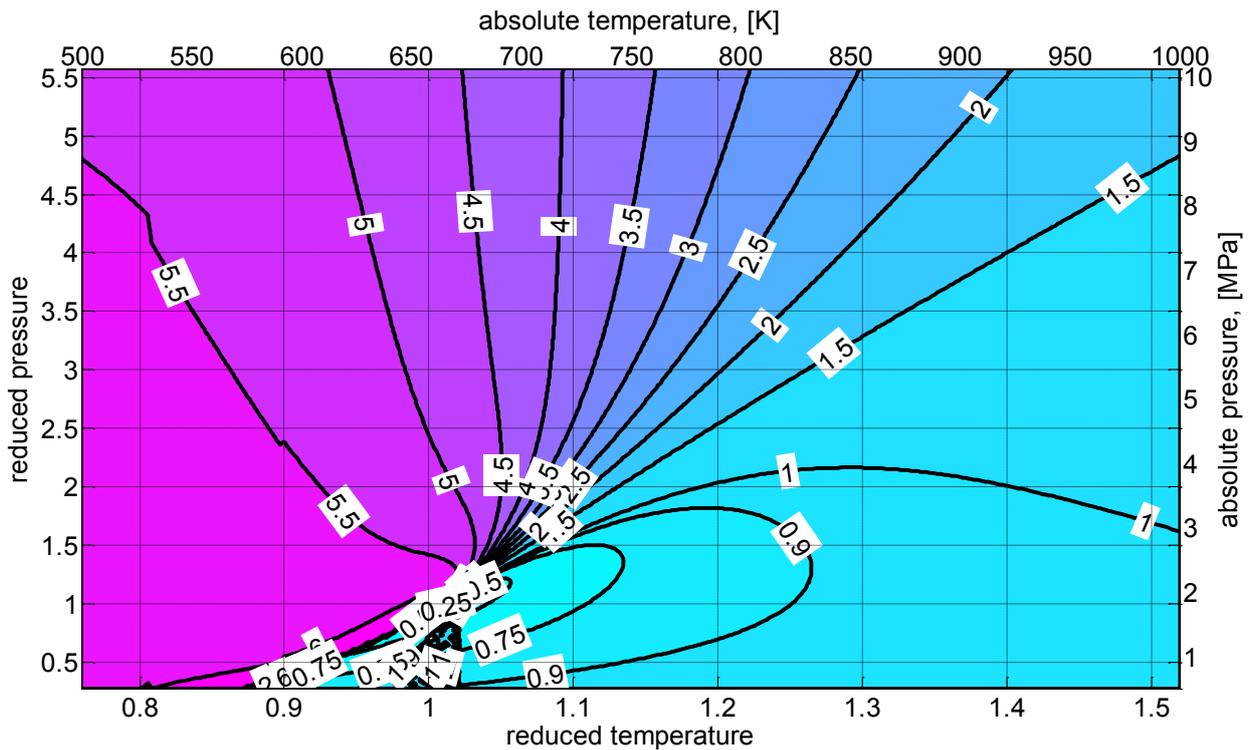


图5 正十二烷基基本气动导数等值线

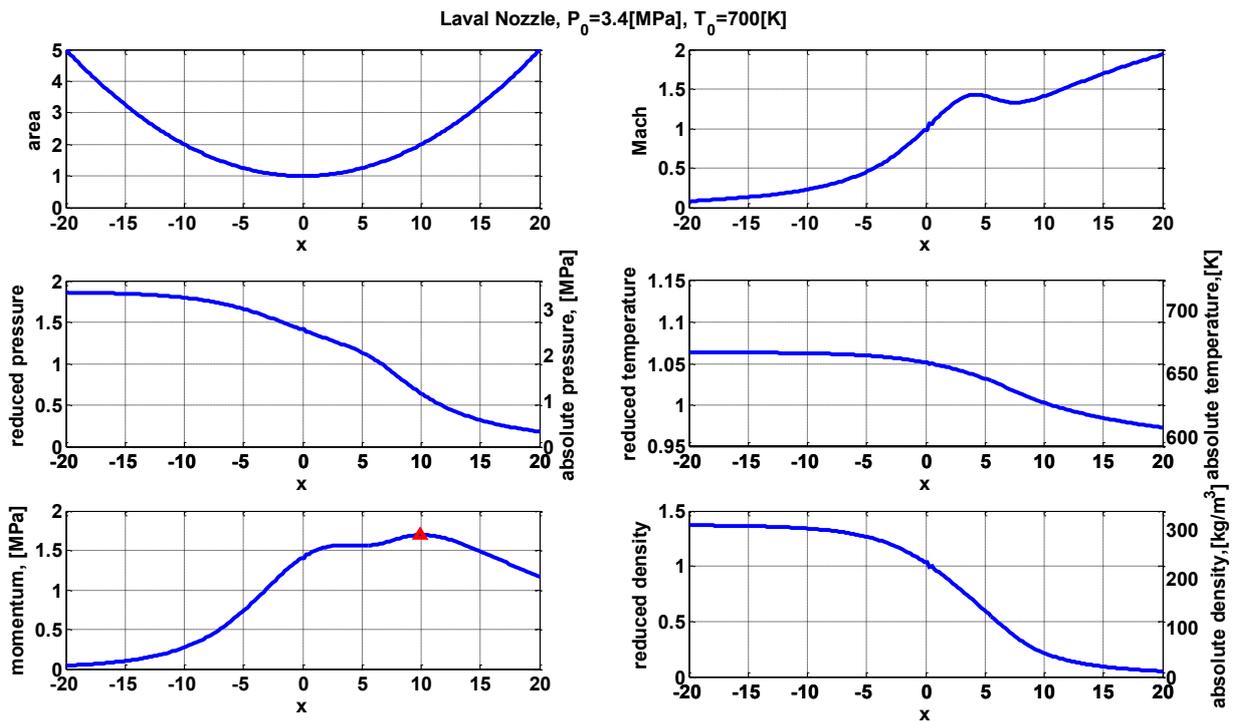


图6 临界区附近小 $\Gamma$ 时喷管 Mach 数, 压力、温度、动量和密度计算结果

可以看出, 流体在膨胀加速过程中, 出现了一段马赫数减小再增加的过程, 与非理想气动理论预测相一致。同时我们可以发现, 因为这段反常区域正好在马赫数 $\sqrt{2}$ 附近, 所以这段喷管有三个马赫 $\sqrt{2}$ 的点, 分别是动量的极大值、

极小值和最大值, 对于给定的总温总压, 动量在第二个极大值处取得最大值。

### 3 总结

通过重新推导一般流体的准一维定常流微

分方程组结合对超临界碳氢燃料的物性分析及计算, 可以得出以下结论:

一般流体的可压缩流动的变化趋势可能与理想气动理论预测不一致甚至相反, 特别是在等熵流 $\Gamma < 1$ 和加热流 $\beta < 0$ 时, 需要特别小心, 建议先考察流体在所用温度压力范围内的物性, 再结合公式判断流动的物理图像;

对于任意平衡态流体, 在总温总压恒定的情况下, Laval 喷管出口最大动量在马赫数 $\sqrt{2}$ 取得;

一般流体激波后的总温变化与滞止状态的焦汤系数符号有关。而对于超临界区附近的碳氢燃料, 激波后总温降低;

临界区附近的超声速等熵流动可能出现速度增加、声速增加、马赫数减小的现象;

驻点离临界点较远(大约 2.5 倍临界压力以上, 1.2 倍临界温度以上, 保证等熵流动过程中不出现 $\Gamma < 1 - 1/M^2$ )时, 正十二烷通过 Laval 喷管的等熵流动与理想气动理论预测的在趋势上基本一致。

#### 4 致谢

本文的研究得到了国家自然科学基金重大研究计划重点支持项目(91016005)和国家自然科学基金创新群体项目(10621202)的资助。

#### 参考文献

1. X. J. Fan, G. Yu, J. G. Li, X. Y. Zhang and C. J. Sung. Investigation of vaporized kerosene injection

and combustion in a supersonic model combustor, *Journal of Propulsion and Power*, 2006, 22(1): 103-110

2. P. Thompson. A Fundamental Derivative in Gasdynamics, *Phys. Fluids*, 1971, 14(9): 1843

3. M. Cramer. Steady, isentropic flows of dense gases, *Phys. Fluids A*, 1991, 3(1): 219

4. G. H. Schnerr and P. Leidner. DIABATIC SUPERSONIC FLOWS OF DENSE GASES, *Physics of Fluids a-Fluid Dynamics*, 1991, 3(10): 2445-2458

5. D. Stojkovic, V. D. Djordjevic and P. S. Cvijanovic. On the effect of friction in steady flow of dense gases in pipes, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2001, 22(4): 480-485

6. P. Cinnella and P. M. Congedo. Aerodynamic performance of transonic Bethe-Zel'dovich-Thompson flows past an airfoil, *Aiaa Journal*, 2005, 43(2): 370-378

7. P. M. Congedo, C. Corre and P. Cirmella. Airfoil shape optimization for transonic flows of Bethe-Zel'dovich-Thompson fluids, *Aiaa Journal*, 2007, 45(6): 1303-1316

8. P. W. Bridgman. A complete collection of thermodynamic formulas., *Physical Review*, 1914, 3(4): 273-281

9. A. Bejan. *Advanced engineering thermodynamics*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2006

10. J. F. Ely and M. L. Huber, NIST Thermophysical Properties of Hydrocarbon Mixtures Database (SUPERTRAPP). NIST Standard Reference Database 4., 1990

11. A. H. Shapiro. *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*. New York,: Ronald Press Co., 1953

12. R. Portz and C. Segal. Penetration of Gaseous Jets In Supersonic Flows. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit; Reno, NV; USA; 9-12 Jan. 2006

## QUASI-ONE-DIMENSIONAL STEADY FLOW EQUATIONS OF ARBITRARY FLUID AND ITS APPLICATION TO THE COMPRESSIBLE FLOW OF SUPERCRITICAL HYDROCARBON FUEL

Di CHENG<sup>1</sup> Xuejun FAN<sup>1,2</sup>

(1 Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, CAS, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

(2 Hypersonic Research Center CAS, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

**Abstract** Based upon equilibrium thermodynamics, the differential equations of single phase, quasi-one-dimensional, steady flow were formulated for arbitrary fluid to study its flow characteristics. Then It is proved that the maximum momentum at the outlet of a nozzle coincides with flow Mach number  $\sqrt{2}$  to arbitrary fluid, when the stagnation parameters unchanged. Next, the relation between the variation of total temperature after shockwave and the Joule-Thomson coefficient is proved. At last, numerical methods were developed,

combined with Supertrapp thermodynamics software, to simulate the supercritical hydrocarbon fuel's flow in Laval nozzle with shockwave. N-dodecane as selected as an example. The results indicates that if supercritical hydrocarbon fuel's thermodynamic state resides sufficiently far from critical point, its isentropic flow characteristics agree with ideal gas dynamics qualitatively.

**Key words** non-ideal gas dynamics, quasi-one-dimensional compressible steady flow, supercritical, hydrocarbon fuels, Laval nozzle