

文章编号: 1003-207(2006)05-0109-05

# 寡占市场中有限理性博弈模型分析

张骥骧<sup>1</sup>, 达庆利<sup>1</sup>, 王延华<sup>2</sup>

(1. 东南大学经济管理学院, 南京 210096; 2. 上海交通大学环境学院, 上海 200240)

**摘要:** 基于有限理性的假设, 通过构建模型, 对一个不同理性、不同结构成本函数的双寡头博弈进行分析。讨论了 Nash 均衡点的存在性和稳定性, 数值模拟出分支、混沌和奇异吸引子等复杂的动力学现象并计算出最大 Lyapunov 指数。指出寡头的理性会对博弈结果产生较大影响, 对企业在混沌市场中的产量决策提供了理论依据。

**关键词:** 不同理性; 离散动力系统; Cournot 模型; 混沌; 最大 Lyapunov 指数

中图分类号: F224 文献标识码: A

## 1 引言

寡头垄断是指只有少数几个企业完全控制一个行业的市场结构。在寡头垄断的市场中, 这些生产同质商品企业的产量都会对市场上这类商品的供给量和价格产生较大影响, 因此每个企业必须在考虑其它企业行为策略的基础上制定自己的产量决策。1838 年, 法国经济学家 Cournot 提出了在双寡头垄断市场情形下关于产量决策的 Cournot 模型。在模型中, Cournot 考虑了在完全信息下寡头双方均是完全理性的博弈情形, 认为在每一个企业都可以根据竞争对手上阶段的产量, 准确地决定自身产量。但是在现实的市场经济中, 这种完全信息和博弈双方理性的假设是不太可能成立的。

近几年, 国内外许多经济学工作者对 Cournot 模型进行了改进, 把有限理性、不完全信息等元素引入到经典的 Cournot 模型中, 使得该模型成为分析寡头垄断市场中各企业生产行为应用最广泛的模型之一。这些研究工作表明, 具有有限理性的双寡头 Cournot 博弈模型会产生丰富的动力学行为, 例如奇异吸引子、分支和混沌等现象。文[1]首先发现了双寡头 Cournot 模型会出现具有分维的奇异吸引子, 并研究了寡头博弈竞争的情形。文[2-5]考虑有限理性的因素, 对双寡头和多寡头博弈模型进行了

进一步的研究, 发现分支、混沌等复杂的动力学现象。文[6]研究了一类具有理性差异的博弈双方对需求均做出错误估计情况下的 Cournot 模型, 得出博弈均衡点必然存在的结论, 并对均衡点进行了简单的定性分析。文[7-8]考虑了不完全信息、有限理性等因素对企业的影响, 给出了对应情况下动态模型的均衡产量解及其分析。文[9]研究了成本不对称双寡头企业技术创新投资决策问题, 得出期权博弈模型的三种平衡的条件。文[10]把有限理性、溢出效应以及非线性成本函数引入经典 Cournot 模型中, 发现寡头的理性和溢出效益在博弈动态地趋于 Nash 均衡过程中起着非常重要的作用。文[11]基于对策论和优化理论, 研究了一类非线性成本函数的双寡头市场的调控机制。文[12]对有限理性动态古诺模型进行了改进, 并将其引入到广告市场中, 对其的演化过程进行了分析。

然而在他们的模型中, 大多只讨论了博弈双方均具有相同理性层次, 并且具有相同结构的线性成本函数, 在真实的寡头市场中, 博弈双方具有相同理性、相同成本函数的情况是很难出现的, 因此以上文献结论对描述复杂经济市场中寡头产量决策博弈具有一定的误差。所以对于寡占市场中, 对博弈方的理性及其成本函数具有差异的假设, 是研究现实寡占市场的必要条件。本文考虑一类具有不同结构成本函数的有限理性双寡头博弈情况, 把有限理性及具有结构差异的成本函数引入到经典的 Cournot 模型中, 根据动力系统相关理论, 对模型进行分析得到其动力学行为的完整结论, 并数值模拟出此类寡头博弈的动态演化, 为现实寡占市场中企业产量决策提供理论指导。

收稿日期: 2005-03-29; 修订日期: 2006-09-27

资助项目: 高等院校博士点专项科研基金资助项目 (20030286008)

作者简介: 张骥骧 (1978-), 男 (汉族), 安徽淮南人, 东南大学经济管理学院博士研究生, 研究方向: 企业经营过程分析与决策。

### 2 模型

现假定在双寡头垄断市场中, 两个生产商生产同质商品, 分别为企业  $i (i = 1, 2)$ ,  $q_i(t)$  是第  $i$  个企业在  $t$  时期的产量, 则该时期市场的总供给量为:  $Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ , 他们面临相同的线性逆需求函数  $P = f(Q) = a - bQ$ , 其中  $P$  是产品的市场出清价格,  $a, b$  为非负系数。企业 1 的生产成本函数是二次函数  $C_1(q_1) = c_1 q_1^2$ , 而企业 2 的成本函数为  $C_2(q_2) = c_2 q_2$ , 其中  $c_1, c_2$  分别是与各企业技术水平成反比的正常系数。因此各企业的利润函数分别为

$$\begin{aligned} \Pi_1(q_1, q_2) &= q_1(a - b(q_1 + q_2)) - c_1 q_1^2, \\ \Pi_2(q_1, q_2) &= q_2(a - b(q_1 + q_2)) - c_2 q_2, \end{aligned} \tag{1}$$

因为双寡头市场中每个企业的产量对整个市场的供给量有很大的影响, 所以企业在  $t$  时期就必须对下一阶段的需求量进行预测以获得最大利润。这意味着第  $i$  个企业在  $t + 1$  时期的产量是由最优问题

$$\begin{aligned} q_1(t + 1) &= \arg \max \Pi_1(q_1(t), q_2^e(t + 1)), \\ q_2(t + 1) &= \arg \max \Pi_2(q_1^e(t + 1), q_2(t)), \end{aligned} \tag{2}$$

所决定, 其中  $q_i^e(t + 1)$  表示  $j$  企业对  $i$  企业在  $t + 1$  时期产量的估计值 ( $i, j = 1, 2, i \neq j$ )。

对  $\Pi_i(q_i, q_j)$  关于  $q_i$  求偏导, 可以得到第  $i$  个厂商的边际利润

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \frac{\partial \Pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = a - 2(b + c_1)q_1 - bq_2, \\ \Phi_2(t) &= \frac{\partial \Pi_2(q_2, q_1)}{\partial q_2} = a - c_2 - bq_1 - 2bq_2, \end{aligned} \tag{3}$$

根据(3)可得出(1)的最优解

$$\begin{aligned} q_1^* &= \frac{1}{2(b + c_1)}(a - bq_2), \\ q_2^* &= \frac{1}{2b}(a - c_2 - bq_1). \end{aligned} \tag{4}$$

本文考虑具有理性差异的博弈双方进行产量博弈的问题, 所以各企业的产量决策会有所不同。文[13]研究了一种根据边际利润决定自身产量调整机制, 称之为“近视眼”, 并建立模型

$$q_i(t + 1) = q_i(t) + \alpha_i q_i(t) \frac{\partial \Pi_i(q_i, q_j)}{\partial q_i}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

其中  $\alpha_i$  是正常数, 表示企业对单位产品利润信号的调整反应速度, 这样企业只需对边际利润的局部估计就可以决定产量的变化, 不一定要获得需求函数的完全信息。同时, 如果企业仅仅具有简单的

理性, 则会根据最优解(4)来决定自身产量。这里假设企业 1 具有有限理性, 而企业 2 仅有简单理性。根据(4)、(5)可以得到具有理性差异的双寡头博弈模型, 即以下二维离散动力系统

$$\begin{cases} q_1' = q_1 + \alpha_1 \frac{\partial \Pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \\ q_2' = \frac{1}{2b}(a - c_2 - bq_1). \end{cases} \tag{6}$$

这里“ $'$ ”是一个时间算子, 若  $q_i$  表示第  $i$  个厂商在  $t$  时期内的产量, 则  $q_i'$  代表第  $i$  个厂商在  $t + 1$  时期内的产量。把(3)带入系统(6), 可以得到离散动力系统

$$\begin{cases} q_1' = q_1 + \alpha_1(a - 2(b + c_1)q_1 - bq_2), \\ q_2' = \frac{1}{2b}(a - c_2 - bq_1). \end{cases} \tag{7}$$

### 3 模型分析

对于经济学模型, 只有非负的均衡解才具有现实意义, 故本文只研究双寡头博弈模型(7)均衡解非负的情况。在系统(7)中, 令  $q_i' = q_i, i = 1, 2$ , 可以得到如下系统

$$\begin{cases} \alpha_1(a - 2(b + c_1)q_1 - bq_2) = 0, \\ \frac{1}{2b}(a - c_2 - bq_1) - q_2 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

并且从(8)中可以求出系统(7)的 2 个非负均衡点:  $E_0 = (0, \frac{a - c_2}{2b})$ , 其中  $a > c_2$ ;  $E^* = (q_1^*, q_2^*)$ , 这里

$$q_1^* = \frac{a + c_2}{3b + 4c_1}, \quad q_2^* = \frac{ab + 2ac_2 - 2bc_2 - 2c_1c_2}{b(3b + 4c_1)} \tag{9}$$

其中  $a > \frac{2b + 2c_1}{b + 2c_1} c_2$ 。平衡点  $E_0$  称为有界均衡解<sup>[14]</sup>, 是一个垄断均衡。显然均衡  $E^*$  是唯一的 Nash 均衡, 此点是双方反应曲线的交点, 表示此时双方的边际利润都已经消失, 但这并不能说明双寡头动态博弈的结果会趋向均衡。相反, 一方理性行为的变化, 将会导致博弈产生极其复杂的现象。

为研究平衡点  $E_0, E^*$  的稳定性, 首先计算系统(7)在点  $(q_1, q_2)$  的 Jacobi 矩阵, 即

$$J(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha(b + c_1)q_1 - \alpha bq_1 & \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

定理 1 有界均衡点  $E_0$  是系统(7)的不稳定平衡点。

证明 为了证明定理, 需要计算系统在  $E_0$  点 Jacob i 矩阵的特征值。在  $E_0$  点的 Jacob i 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha}{2}(a + c_2) & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

可以得到矩阵  $J(E_0)$  的两个特征值  $\lambda_1 = 0$  和  $\lambda_2 = 1 + \frac{\alpha}{2}(a + c_2)$ 。由于  $\alpha, a$  和  $c_2$  都是非负参数, 易知  $|\lambda_2| > 1$ , 所以  $E_0$  点是系统(7)的不稳定平衡点(鞍点)。

下面讨论 Nash 均衡点  $E^*$  的局部稳定性情况。系统(7)在  $E^*$  的 Jacob i 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha(b + c_1)q_1^* & -\alpha bq_1^* \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其特征方程是  $f(\lambda) = \lambda^2 - Tr(J)\lambda + Det(J)$ , 这里  $Tr(J)$  和  $Det(J)$  分别是矩阵  $J(E^*)$  迹和行列式,  $Tr(J) = 1 - 2\alpha(b + c_1)q_1^*$ ,  $Det(J) = -\frac{\alpha bq_1^*}{2}$ 。

显然

$$Tr^2(J) - 4Det(J) = [1 + 2\alpha(b + c_1)q_1^*]^2 + 2\alpha bq_1^* > 0, \quad (13)$$

故  $J(E^*)$  在 Nash 均衡点  $E^*$  具有实特征值。

如果  $J(E^*)$  在平衡点  $E^*$  的特征值在复平面的单位圆内, 即  $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2$ , 这意味着此时 Nash 均衡点  $E^*$  是局部稳定的。根据 Jury 条件<sup>[15]</sup>, 可以得出 Nash 均衡点  $E^*$  局部稳定的充要条件:

$$I. 1 - Tr(J) + Det(J) = \frac{\alpha(a + c_2)}{2} > 0,$$

$$II. 1 + Tr(J) + Det(J) = 2 - \frac{5}{2}\alpha bq_1^* - 2\alpha c_1 q_1^* > 0,$$

$$III. Det(J) - 1 = -\frac{\alpha bq_1^*}{2} - 1 < 0.$$

显然条件 I、III 总是成立的, 把(9)带入条件 II, 这个条件变为

$$\alpha < \frac{4(3b + 4c_1)}{(5b + 4c_1)(a + c_2)}. \quad (14)$$

由不等式(14), 可以得到关于 Nash 均衡点  $E^*$  局部稳定性的定理 2。

定理 2 当  $\alpha < \frac{4(3b + 4c_1)}{(5b + 4c_1)(a + c_2)}$  时, Nash 均衡点  $E^*$  是系统(7)的稳定点。

从定理 2 能够看出 Nash 均衡  $E^*$  的稳定性依赖于系统参数。例如, 增加有限理性博弈方的调整

反应速度  $\alpha$ , 而其他参数不变, 这样会导致参数稳定区域的变化, 从而使得  $E^*$  的稳定性改变, 发生分支现象。同样, 参数  $\alpha, b, c_1$  和  $c_2$  固定而增加  $a$  的值也会引起  $E^*$  失稳。本文主要研究随着参数  $\alpha$  改变, 系统产生的复杂动力学行为。

### 3 数值模拟

本节对双寡头非线性博弈模型(7)进行数值模拟, 描绘出系统(7)的动态演化过程和对初始条件的敏感依赖性图形, 并计算了系统的最大 Lyapunov 指数。为方便研究平衡点的局部稳定性, 假设参数值为  $a = 7, b = 0.5, c_1 = 0.5, c_2 = 0.5$ 。

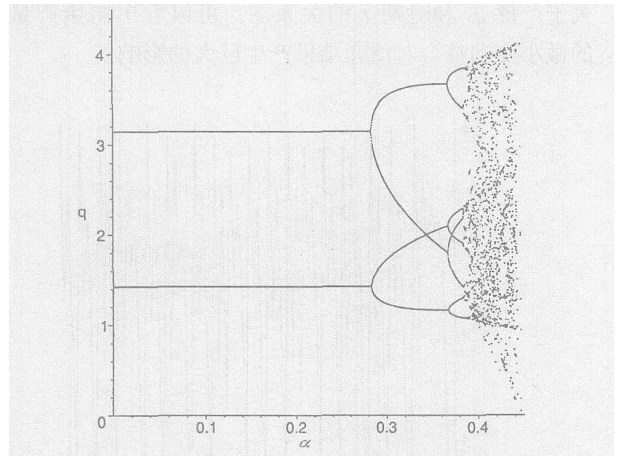


图 1 有限理性双寡头博弈模型(7)动态演化图

图 1 表示参数  $a, b, c_1$  和  $c_2$  固定, 调整反应速度  $\alpha$  的变化引起的分支现象。从图 1 可以看出当  $\alpha < 0.28$  时, Nash 均衡点  $E^* = (3.14, 1.43)$  是稳定的, 但随着  $\alpha$  的增大,  $E^*$  的稳定性将改变, 并最终产生分支、混沌等复杂的动力学现象。

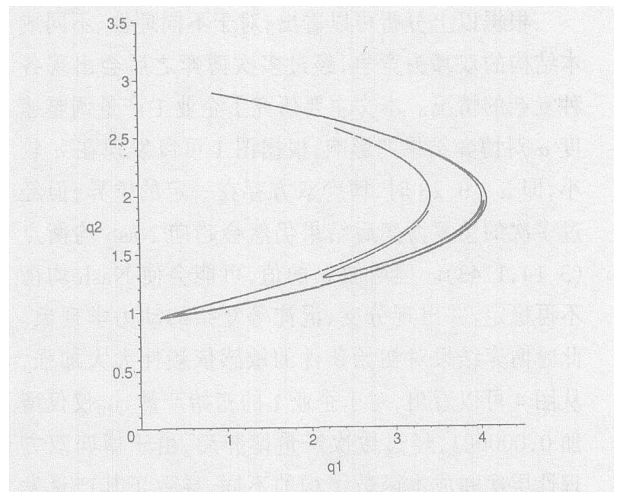


图 2 有限理性双寡头博弈模型(7)的混沌吸引子

图 2 给出了  $a = 7, b = 0.5, c_1 = 0.5, c_2 = 0.5$  和  $\alpha = 0.433$  时不同理性双寡头博弈模型 (7) 的奇异吸引子, 可以看出其结构与 *Henon* 吸引子极为相似<sup>[16]</sup>。

Lyapunov 指数是定量描述混沌系统的重要指标, 它反映了相空间内系统相邻轨道收敛和发散的长期平均水平, 系统最大 Lyapunov 指数为正即意味着发生了混沌现象。根据文[17]的方法, 图 3 给出了系统(7)的最大 Lyapunov 指数和参数  $\alpha$  之间的关系。

对初始条件的敏感依赖性也是混沌现象重要特征, 为验证系统(7)是否对初始值具有敏感依赖性, 图 4 分别绘制出初始值为  $(q_{10}, q_{20})$  和  $(q_{10} + 0.000001, q_{20})$ , 关于产量  $q_1$  和时期  $t$  的关系图。可以看出初始产量的微小变动都会对博弈结果产生巨大的影响。

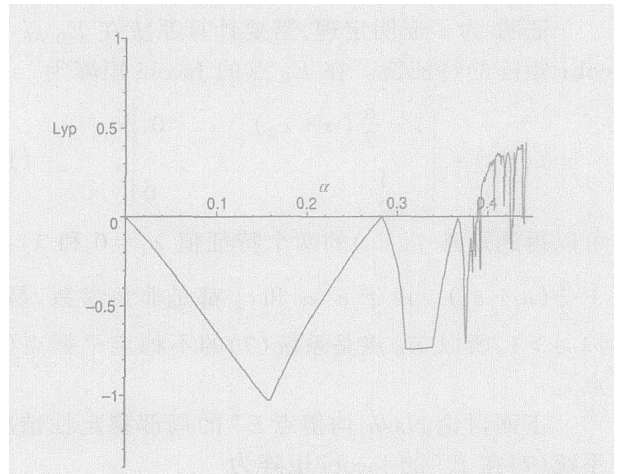


图 3 有限理性双寡头博弈模型 (7) 的最大 Lyapunov 指数谱

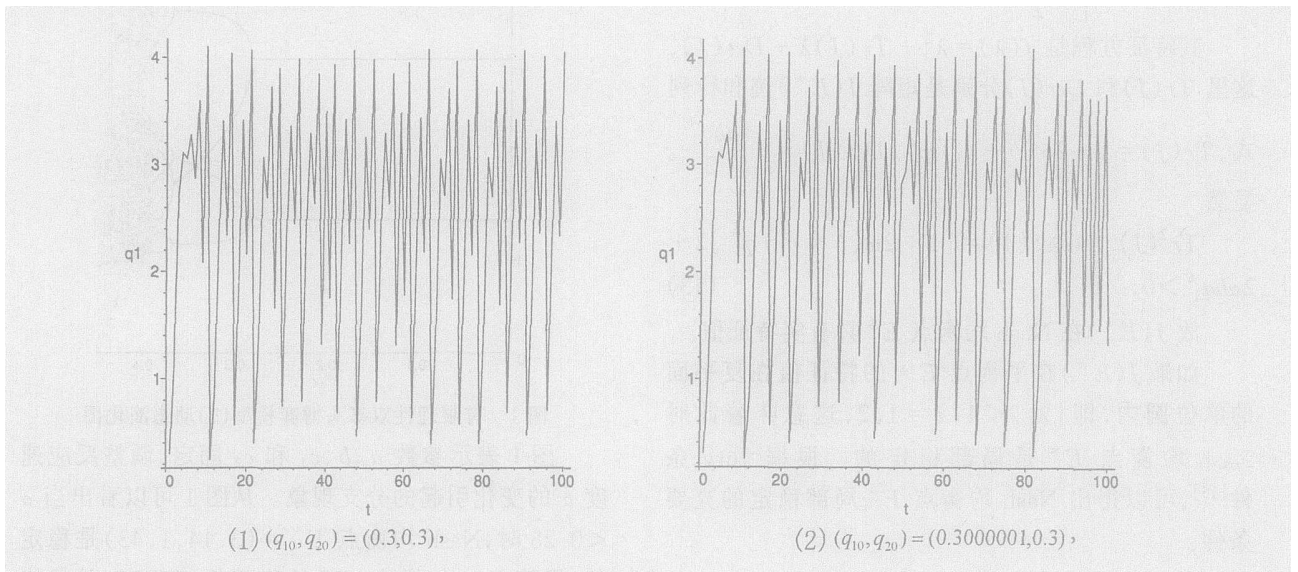


图 4 企业 1 产量  $q_1$  对初始产量的敏感依赖性, 其中  $(\alpha, a, b, c_1, c_2) = (0.433, 7, 0.5, 0.5, 4)$

根据以上分析可以看出, 对于不同理性、不同成本结构的双寡头竞争, 经过多次博弈之后会出现各种复杂的情况。本文主要研究了企业 1 产量调整速度  $\alpha$  对博弈结果的影响, 根据图 1 可以发现在  $\alpha$  较小, 即  $\alpha < 0.28$  时, 博弈双方存在一定的差异, 但经过多次的重复博弈后结果仍然会趋向 Nash 均衡点  $(3.14, 1.43)$ 。但增加  $\alpha$  的值, 可能会使 Nash 均衡不再稳定, 并出现分支、混沌等复杂的动力学现象。此时博弈结果对初始条件的敏感依赖性大大加强, 从图 4 可以看出, 对于企业 1 的初始产量  $q_{10}$  仅仅增加 0.000001, 经过数次产量博弈后, 由于博弈双方理性层次和成本函数结构的不同, 导致了其产量发生了巨大变化, 使得这一寡占市场进入混沌的市场中, 博弈双方初始产量的变化会对最终结果造成很

大影响, 并使得市场变的不可预测, 这对于企业的生产和销售极为不利。同样, 对于企业 2 也存在博弈结果对初始条件的敏感依赖, 由于篇幅原因, 本文不进行数值模拟。

#### 4 结束语

近年来, 对于研究有限理性的双寡头竞争的文章在国内外发表颇多, 但它们基本上都是假设企业双方均具有相同理性层次和成本函数, 这使得研究结果常常与实际情况产生背离。本文建立了一个不同理性、不同成本函数的双寡头重复博弈模型, 对此模型进行了稳定性分析, 给出了完整的结论, 并对博弈的过程进行了数值模拟。结果表明, 有限理性博弈方对边际利润的调整反应速度差异可以导致产量

博弈均衡点的稳定性发生变化,使得博弈双方初始产量的调整对最终结果产生巨大的影响,从而使市场进入混沌状态。对于较低的调整反应速度,博弈会趋向唯一的 Nash 均衡,但随着调整反应的速度的增加, Nash 均衡点稳定性会发生变化,分支、混沌等复杂现象将出现。因此对于边际利润的调整反应速度是博弈是否进入混沌状态的关键因素,而一旦进入到混沌的市场,任何初始条件的细微变化都会使最终博弈结果发生巨大的变化,市场从而会出现不可预测性,这样寡头双方都无法对长期的产量决策进行预测调整。所以对于具有有限理性的双寡头企业博弈,要不断的注意企业所处环境的变化,适时地调整企业自身的发展目标,使得博弈 Nash 均衡的稳定区域扩大,尽量避免产量竞争进入混沌的不可预测状态。通过本文结论,可对具有有限理性的寡头竞争市场中由于相互竞争而导致市场紊乱的现象作出较为合理的解释,同时企业可以通过改变自身的状态避免市场的混乱,使得寡占市场得以有序的发展。

#### 参考文献:

- [1] T. Puu. The Chaotic duopolists revisited [J]. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1998, 33(3-4): 385-394.
- [2] H. N. Agiza. Explicit stability zones for Cournot games with 3 and 4 competitors [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1998, 9(12): 1955-1966.
- [3] H. N. Agiza. On the Analysis of stability, bifurcation, chaos and chaos control of Kopel map [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, 10(11): 1909-1916.
- [4] H. N. Agiza, A. S. Hegazi, A. A. Elsadany. The dynamics of Bowley's model with bounded rationality [J].

- Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12(9): 1705-1717.
- [5] H. N. Agiza, A. S. Hegazi, A. A. Elsadany. Complex dynamics and synchronization of duopoly game with bounded rationality [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2002, 58(2): 133-146.
- [6] Daniel Leonard, Kazuo Nishimura, Nonlinear dynamics in the Cournot model without full information [J]. *Annals of Operations Research*, 1999, 89(3): 165-173.
- [7] H. N. Agiza, A. A. Elsadany. Nonlinear dynamics in the Cournot duopoly game with heterogeneous players [J]. *Physica A*, 2003, 320(1): 512-524.
- [8] H. N. Agiza, A. A. Elsadany. Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 149(3): 843-860.
- [9] 杨勇, 达庆利. 不对称双寡头企业技术创新投资决策研究[J]. *中国管理科学*, 2005, 13(4): 95-99.
- [10] 易余胤, 盛昭瀚, 肖条军. 具溢出效应的有限理性双寡头博弈的动态演化[J]. *系统工程学报*, 2004, 19(3), 244-250.
- [11] 卢子芳. 双寡头市场的调控机制研究[J]. *中国管理科学*, 1999, 7(1), 25-28.
- [12] 姚洪兴, 徐峰. 双寡头有限理性广告竞争博弈模型的复杂性分析[J]. *系统工程理论与实践*, 2005, 12, 32-37.
- [13] Dixit. A.. Comparative Statics for Oligopoly [J]. *International Economic Review*, 1986, 27(2): 107-122.
- [14] G. I. Bischi, A. Naimzada. Global analysis of a dynamic duopoly game with bounded rationality [C]. *Advanced in Dynamics Games and Application*. Birkhauser, Basel, 1999.
- [15] T. Puu. Attractors. Bifurcations and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics [M]. Springer, Berlin, 2000.
- [16] M. Henon. A Two dimensional mapping with a strange attractor [J]. *Comm. Math. Phys.*, 1976, 50(3): 69-77.
- [17] Hubertus F. Von Bremen, Firdaus E. Udwardia and Wlodek Proskurowski. An efficient QR based method for the computation of Lyapunov Exponents [J]. *Physica D.*, 1997, 101(1-2): 1-16.

### Analysis of a Game with Bounded Rationality in Oligopoly Market

ZHANG Ji-xiang<sup>1</sup>, DA Qing-li<sup>1</sup>, WANG Yan-hua<sup>2</sup>

(1. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. School of Environmental Science and Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Based on the players with bounded rationality, the game model is built to analyze a nonlinear duopoly game with heterogeneous players and different functions of cost. The existence and stability of the Nash equilibrium of this system are studied. The complex dynamics, bifurcations, strange attractor and chaos are displayed by simulating numerically and the largest Lyapunov exponents are computed. We show that enterprise's expectations have an impact on the result of duopoly game. The conclusions provide enterprise with theories of output decision-making in chaotic market.

**Key words:** heterogeneous expectations; discrete dynamical system; Cournot model; chaos; the largest Lyapunov exponents