第 14 卷 第 5 期 中国管理科学 Vol. 14, No. 5
2006 年 10 月 Chinese Journal of Management Science Oct., 2006

文章编号: 1003- 207(2006)05- 0068- 05

航空客运舱位控制和超售综合静态建模研究

朱金福[1], 刘 玮[2], 高 强[1]

(1. 南京航空航天大学民航学院, 南京 210016;
2. 中国民航华东管理局规划统计处, 上海 200335)

摘 要: 本文研究航空运输收益管理的舱位控制和超售综合静态建模问题。通过将机票销售过程模拟成排队过程, 以收益最大化为目标函数, 首先给出了单航段单等级票价下的超售水平公式。然后将该思路推广到多等级票价情况, 应用动态规划方法建立了舱位控制和超售综合控制静态模型, 在建立了两个定理的基础上, 由该模型进一步推导出了各等级舱位最优订座限制的决策方程。最后分析了一个实例以说明决策方程的应用。

关键词: 交通运输; 舱位控制; 超售; 静态模型
中图分类号: C934 文献标识码: A

1 引言

收益管理是航空公司增加效益的有效手段, 舱位控制和超售是航空客运收益管理的重要内容, 文献[1] 对航空客运收益管理研究成果作了很好的综述。但已有的研究成果多数将舱位控制和超售分开研究, 往往导致航空公司实际操作的矛盾和收益的减少, 因此本文研究两者的综合静态建模问题。

所谓超售, 是指接受的旅客订座数超过了飞机最大允许座位数。因为存在订了座却不来登机的旅客(No-show) 和取消订座的旅客(Cancellation), 所以航空公司实施超售, 以减少座位虚耗损失(Spoiling Cost)。No-show 旅客的存在不仅浪费了航空公司的生产资源, 同时也使许多有急事要乘飞机的旅客不能成行, 浪费了社会资源。

超售可能发生 DB(Denied Boarding), 即已购票并来乘机的旅客上不了飞机的问题, 常常引起旅客的不满甚至与航空公司之间的冲突。因此超售是一把双刃剑, 如何解决好座位虚耗和 DB 这一对矛盾, 一直是航空公司和学术界十分关心的问题。

为超售建模是研究超售问题并寻找最优超售决策的主要手段, 它有两种研究方法, 即静态方法和动态方法。

收稿日期: 2005- 09- 30; 修改日期: 2006- 09- 10
基金项目: 民航总局应用技术基金资助项目(MHRD0622)
作者简介: 朱金福(1955-), 男(汉族), 南京航空航天大学民航学院, 教授, 博导, 研究方向: 航空运输系统优化.

所谓静态方法指超售决策与订座时间和订座数的变化无关的研究方法。Beckmann[2] 最早用 γ 分布对成行旅客数建立了静态超售模型, 提出一个近似最优的超售条件。Thompson[3] 提出了订座取消概率不依赖于订座方式(是个体订座还是团体订座), 也不依赖于该订座时间的假设, 建立了"条件超售概率"的概念。Iglehort 和 Karlin[4] 认为订座取消概率分布取决于环境指数, 将订票过程模拟成一个马尔可夫链。Bodily 与 Pfeifer[5] 建立的静态模型指出乘客取消订座的概率与订座发生的时间和飞机起飞前发生的不确定事件(如天气原因) 有关。Beotimer[6] 和 Van Ryzin[7] 等对超售模型的应用问题进行了讨论。

我国对收益管理的研究起步较晚。刘军分析了收益管理中的超售风险问题[8]。张立和李德友探讨了应用智能仿真算法与博弈技术解决收益管理网络优化问题的可行性[9]。李晓华和萧伯春研究了旅客选择模型和动态定价问题[10]。高强等[11] 根据旅客始- 终点流费用进行排序建立了一个多航段舱位控制随机规划模型, 并设计了遗传算法进行求解。杨慧和周晶[12] 根据冯友义的两级价格策略研究了一般易逝品降价时点设定问题, 构建了 Cournot 博弈模型。高强等[13] 建立了舱位控制的博弈模型, 讨论了同一航线上两家航空公司的竞争对舱位控制决策的影响问题。

综上所述, 超售建模的已有研究成果主要集中在单一舱位等级的情况, 或者不考虑 No Show 和 DB 成本的多等级舱位情况。对于考虑 No Show 和

DB 补偿成本的多等级舱位的超售建模问题，则成果不多。本文把旅客订座－取消订座（包括 No－show）过程看成一个排队系统，综合优化舱位控制和超售控制问题，对单一舱位和多等级舱位情况分别建立了静态模型，该模型计算简单，操作方便，可用于实际订座决策。

2　单一等级舱位的静态超售模型

把乘客的订座过程看作是一个排队模型。顾客到达发出订座请求，系统决定是否让顾客进入服务系统，旅客取消订座看作是排队系统的服务过程。由此，单一等级舱位订座过程可以模拟成 M/M/1/∞/N 排队系统。

当一个顾客进入排队系统，系统得到票价收入，顾客离开系统（取消订座），将产生退票款。超售成本是系统成本，是在服务系统中顾客数的函数。

首先给出本文超售模型的基本假设：

(1) 旅客的订座请求相互独立。

(2) 顾客在离散的时刻点一个一个地到达系统外部等待进入系统，并且服从参数为 λ 的泊松分布。

(3) 旅客取消订座相互独立，取消行为一个一个地发生并服从参数为 μ 的负指数分布。

本模型将使用以下参数：

C：飞机可提供座位数，即航班容量。

f：票价。本节假设票价是单一的。

L_q：排队长。是排队系统中期望顾客数（取消订座数已经除去）。

N：最大订座数，可以大于 C。

当发生 DB 时，航空公司付给 x 位 DB 乘客的赔偿是 $F(x)$，则 DB 成本函数

$$V=\begin{cases}0 & L_q\leqslant C\\ F(L_q-C) & L_q>C\end{cases}$$

对于只设一个等级舱位的情况，取消订座或 No－show 的乘客将获得全额票价退款，那么系统收益函数为

$$S=fL_q-F(L_q-C)$$

或写成

$$S=fC-[F(L_q-C)-f(L_q-C)] \tag{1}$$

因为航空公司支付给一个 DB 乘客的费用大于一张机票的价格，即 $F(L_q-C)>f(L_q-C)$，显然式(1)在 $L_q=C$ 时取得最大值。

令 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$，则根据排队论的基本公式有

$$L_q=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{N\rho^{N+1}+\rho}{1-\rho^{N+1}}=C \tag{2}$$

由于实际情况下 $\lambda>\mu$，所以 $\rho^{N+1}\gg 1$，此时由式(2)可以近似解得

$$N\approx C+\frac{\rho}{\rho-1} \tag{3}$$

式(3)十分简单地表达出了超售数与到达率－取消率之比（称为取消强度）的关系。当 ρ 逐渐减小时，超售数随之增大，说明取消率（包括 No-show 率）越大，超售数越多。这符合航空公司的实际情况。

由本模型决定的订座控制策略是：当队长小于 N 时，就接受旅客订座；当队长已经达到 N 时，就拒绝订座请求。

3　多等级舱位控制和超售综合静态模型

本节将讨论多等级舱位的情况，将 No-show 看作是最后时刻的取消订座，将舱位的一个等级看作为一个阶段，应用动态规划方法建立多等级舱位嵌套控制和超售模型，目标是航空公司利润最大化。

本节将沿用第 2 节的基本假设，同时增加以下假设：

(4) 航班共有 J 个舱位，各等级舱位票价已事先确定。

(5) 按票价顺序从低到高订座：最先销售 J 舱，其次销售 $J-1$ 舱，最后销售 1 舱。

(6) 需求独立：每个舱位的需求随机且彼此独立。

(7)、各舱位之间需求没有转移。

本节模型使用的参数和变量定义如下：

N_j：j 舱的订座限制。只有当 j 舱已订座数小于订座限制时，才能接受订座请求。N_j 是 $j,\cdots,j+1$ 各舱已订座位数的函数。

D_j：j 舱的订座需求量。D_j 是非负的随机变量。

L_j：j 舱已经接受的订座数。

f_j：j 舱的票价。

f_j^p：j 舱订了座的 No-show 乘客获得机票退款时要扣除的罚金。

$S_j(L_j)$：起飞时 j 舱登机的旅客数。它是 L_j 的随机函数，在起飞时才能观察到。

$F(x)$：航空公司为 x 个 DB 乘客支付的赔偿费，并且满足 $F(x)=Fx$。

根据以上假设得航班的期望总收益如下

$$ER(L_1,\cdots,L_J)=r_1L_1+\cdots+r_JL_J-FH(L_1,\cdots,L_J) \tag{4}$$

其中 $r_j = p_j f_j + (1- p_j) f_j^p$ 为j 舱的等价票价, $H(L_1, \cdots, L_J) = E(S_1(L_1) + \cdots + S_J(L_J) - C)^+$ 为期望 DB 旅客数。

定义 Π_j 是j 舱订座策略 π 的集合, L_j^π 是在策略 π 下j 舱的订座数, $R_j(L_{j+1}, \cdots L_J)$ 是阶段j 最大期望总收益, 则可建立动态规划模型如下

$$R_j(L_{j+1}, \cdots, L_J) = \max_{\pi\in\Pi_j} E[R_{j-1}(L_j^\pi, L_{j+1}, \cdots, L_J)] \quad j = 1, \cdots, J$$

$$R_0(L_1, \cdots, L_J) = R(L_1, \cdots, L_J) \qquad (6)$$

这里 R_0 是航班的最大期望收益。

应用式(6)求解各等级舱位的订座限制策略困难较大, 因此考虑建立近似替代模型。令 $G_0(L_1, \cdots, L_J) = R(L_1, \cdots, L_J)$, 由于$j$ 舱的需求是随机变量, 销售到j 舱时的期望总收益函数

$$G_j(L_{j+1}, \cdots, L_J) = E \max_{L_j \leqslant D_j} G_{j-1}(L_j, L_{j+1}, \cdots, L_J) \quad j = 1, 2, \cdots, L \qquad (7)$$

是 $R_j(L_{j+1}, \cdots, L_J)$ 的上限[14]。因此可用模型(7)近似模型(6)来求得最优订座策略。为此, 我们首先给出相应的引理和定理。

引理 1[14] 如果 $H(L_1, \cdots, L_J)$ 是随$(L_1, \cdots, L_J)$ 凸变化的, 那么 $G_{j-1}(L_j, L_{j+1}, \cdots, L_J)$, $j = 1, \cdots, J$ 是凹函数。

证明从略, 参见[14]。

令 $L = L_1 + \cdots + L_J$ 是订座总数, 实际登机旅客数 S 是L 的函数, 则 $S(L)$ 是随机增的。再设 $S_j(L_j)$ 的期望值与 L_j 成比例, 即 $E(S_j(L_j)) = p_j L_j$, p_j 是j 舱乘客出现(Show Up)的概率。令 $p = (p_1 L_1 + \cdots + p_J L_J)/L$ 是综合 Show Up 率, 可得 $S(L)$ 的期望值 $ES(L) = pL$, 期望 DB 旅客数可表达为 $h(L) = H(L_1, \cdots, L_J) = E[S(L) - C]^+$。

定理 1 如果将 $h(L)$ 看作是 L 的连续函数, 则 $h(L)$ 是凸函数且可导, 其导数为 $h'(L) = pPr(S(L) \geqslant C)$。

证明: 对于任意的 $\Delta L > 0$, 有

$$\begin{aligned}
&h(L + \Delta L) - h(L) \\
&= E[(S(L + \Delta L) - C)^+ - (S(L) - C)^+] \\
&= E[(S(L + \Delta L) - C)^+ - (S(L) - C)^+ \mid \\
&\quad S(L) \geqslant C] Pr(S(L) \geqslant C) + E[(S(L + \Delta L) - C)^+ \\
&\quad - (S(L) - C)^+ \mid C - \Delta L \leqslant S(L) < C] \\
&\quad Pr(C - \Delta L \leqslant S(L) < C) \\
&= p\Delta L Pr(S(L) \geqslant C) + o(\Delta L)
\end{aligned}$$

所以 $h'(L) = pPr(S(L) \geqslant C)$。对任意两点 $L^{(1)} < L^{(2)}$, 由于 $S(L)$ 随 L 递增, 故而 $Pr(S(L) \geqslant C)$ 也随着 L 的增加而增加。可以推得

$$h(L^{(2)}) \geqslant h(L^{(1)} + h'(L^{(1)}) T(L^{(2)} - L^{(1)})$$

所以 $h(L)$ 是凸函数。证毕。

令 s_j 表示从j 到J 舱的订座总数, 在嵌套控制策略中, j 舱的订座限制数N_j 是s_j 的最优值, s_1 是航班最优订座总数, $s_1 - s_j$ 是从$j-1$ 到 1 舱位的受保护的座位数。我们有如下定理:

定理 2 如果 $h(L)$ 是凸函数, 则有

i) 订座限制策略是最优订座策略, 即最优订座限制决定的j 舱订座策略使 $\max_{L\geqslant 0} G_{j-1}(L, L_{j+1}, \cdots, L_J)$ 成立, 且存在 $s_1, s_2, \cdots, s_J$, 使得j 舱的最优订座策略是由$N_j(L_{j+1}, \cdots, L_J) = s_j$ 决定的。

ii) 如果 $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_J$, 那么最优订座策略就是嵌套舱位策略, 即 $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_J$。

定理 2 的证明请见附录。

显然, 航空公司采用超售策略时, $s_1 \geqslant C$。由定理 2 得 s_1 是使 $\max_{L\geqslant 0}[r_1 L - Fh(L)]$ 成立的 L 值, 因此

$$r_1 - Fh'(s_1) = r_1 - FpPr(S(s_1) \geqslant C) = 0 \quad (9)$$

应用定理 1 的结论可解得

$$Pr(S(s_1) \geqslant C) = \frac{r_1}{pF} \qquad (10)$$

如果$\frac{r_1}{pF} > 1$, 则取 s_1 使 $\Pr(S(s_1) \geqslant C) = 1$, 这只有在 Show up 率 p 较小(即 No Show 较多)时才会发生。式(10)的订座限制与 Bodily 与 Pfeifer (1992 年)建立的单舱位超售模型的订座限制形式相似[5]。该式告诉我们最佳订座限制总数为 s_1 时发生 DB 的概率与舱位等级数 J 和较低等级舱位票价无关。旅客 Show Up 率越大、DB 旅客成本越高, 则要求发生旅客 DB 的概率越小, 即要求订座总数 s_1 越少。

当 s_1 确定后, 2 舱的订座目标函数是

$$G_1(L_2, L_3, \cdots, L_J) = E \max_{L_1 \leqslant D_1}(r_1 L_1 + \cdots + r_J L_J - Fh(L_1 + \cdots + L_J))$$

应用定理 1 和式(10)的订座限制条件得 s_2 满足

$$r_2 - r_1 Pr(D_1 \geqslant s_1 - s_2) = 0 \qquad (11)$$

解得

$$Pr(D_1 \geqslant s_1 - s_2) = \frac{r_2}{r_1} \qquad (12)$$

类似地, 各舱位订票最优限制策略的一般表达式为

$$Pr(D_{j-1} \geqslant s_{j-1} - s_j) = \frac{r_j}{r_{j-1}},\ j = 2, 3, \cdots J \quad (13)$$

在式(13)中, 若等价票价 r_j 直接取机票价f_j, 则式(13)简化为著名的嵌套 EMSR 控制策略。因此本文得到的结果是嵌套 EMSR 策略在考虑 No Show 和 DB 成本情况下的推广。

4　算例分析

某航空公司的南京到北京航班, 座位数为 148, 分别有四个票价等级舱位 Y、M、Q、K。航空公司规定它们的退票手续费率分别是 0.05、0.1、0.15 和 0.25, DB 旅客只发生在 K 舱, 每个 DB 旅客的成本是1.5 倍的 Y 舱票价。通过对历史数据的统计分析, 得出该航段旅客需求的期望值和标准差以及各个舱位的平均票价如表 1 所示。已购票旅客前来登机的概率为 $p = 0.95$, 即 No Show 率为 5%。

表 **1**　算例数据表

舱位等级	Y	M	Q	K
期望需求总量	20	35	25	45
标准差	7	12	10	15
平均票价 f_i	1000	800	600	400
等价票价 r_i	952	764	574	385

该公司在该航班的超售率一般取 5% 到 15%, 根据对订座和离港数据的统计分析结果, 给出不同超售数发生旅客 DB 的概率如表 2 所示。

表 **2**　订座数和发生 **DB** 的概率

总订座数 s_1	155	159	163	167	170
$Pr(S(s_1) > C)$	0.18	0.42	0.71	0.85	0.97

在式(10)中, 右边 $r_1/pF = 952/1425 = 0.668$, 从表 2 可知 $s_1 = 162$。进一步应用式(13)和表 1 所给数据, 可得其它等级舱位订座限制 $s_i(i = 2, 3, 4)$ 和预留座位数, 见表 3 所示。表 3 表明, K 舱不预留座位, 最多销售 98 个座位, Y 舱的订座限制是本航班的最大允许订座数, 其它只等级舱位都有订座限制, 以保证较高等级舱位的预留座位数, 以获得最大期望利润。

表 **3**　各等级舱位的最优嵌套控制策略

EMSR 模型的应用结果	Y	M	Q	K
预留座位数 $S_i - S_{i+1}$	16	27	21	–
订座限制 S_i	162	146	119	98

5　结语

本文引进了 No-show 和 DB 成本因素, 应用排队论和动态规划理论, 建立了单等级和多等级舱位的静态超售模型, 给出了订座限制策略, 它受 DB 概率控制, 并且是嵌套的。在应用该舱位控制策略时, 需要给出订座总数的各种可能方案及其发生 DB 的概率, 航空公司目前缺少这方面数据的积累, 是应用本文研究成果可能面临的主要问题。

参考文献:

[1] Mc Gill J. L., Ryzin G. J.. Revenue Management: Overview and Prospects[J]. Transportation Science, 1999, 33(2): 233–256.

[2] Beckmann J. M.. Decision and Team Problems in Airline [J]. Reservations Econometrica, 1958, 26(2): 134–145.

[3] Thompson H. R.. Statistical Problems in Airline Reservation Control[J]. Operational Research Quarterly, 1961, 12(2): 167–185.

[4] Iglehart D. L. & Karlin S.. Optimal Policy for Dynamic Inventory Process with Nonstationary Stochastic Demands [M]. K. Arrow, S. Karlin, H Scarf(eds.), Studies in Applied Probability and Management Sci, Chapter 8, Stanford University Press, 1962.

[5] Bodily S. E. & Pfeifer P. E.. Overbooking Decision[J]. Rules Omega, 1992, 20(1): 129–133.

[6] Botimer T. C.. Overbookings for Sale Creative Sales Force Management[R]. AGIFORS Reservation and Tield Management Study Group 1999 Meeting, 1999.

[7] Van Ryzin G. J.. Overbooking with Substitutable Inventory Classes[R]. AGIFORS Reservation and Yield Management Study Group 1999 Meeting, 1999.

[8] 刘军. 航空客运收益管理与风险决策理论及其应用研究[D]. 北京航空航天大学博士学位论文, 2000, 64–87.

[9] 张立, 李德友. 收益管理中的网络优化研究[J]. 航空计算技术, 2004, 34(3): 13–15.

[10] 李晓花, 萧伯春. 航空公司收入管理价格与舱位控制的统一分析[J]. 管理科学学报, 2004, 7(6): 64–69.

[11] 高强, 朱金福, 陈可嘉. 航空收益管理中多航段舱位控制方法研究[J]. 交通运输工程学报, 2005, 5(4): 82–85.

[12] 杨慧, 周晶. 易逝品降价时点设定问题的 Cournot 博弈模型[J]. 中国管理科学, 2006, 14(3): 44–50.

[13] 高强, 朱金福, 蓝伯雄. 国内航空公司实施收益管理的博弈分析[J]. 科研管理, 2006, 27(5): 74–79.

[14] Wen Zhao. Dynamic and Static Yield Management Models [D]. PhD Thesis, Pennsylvania, University of Pennsylvania, 1999.

Integrated Static Modeling of Airline Seat Inventory Control and Overbooking

ZHU Jin-fu[1], LIU Wei[2], GAO Qiang[1]

(1. College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;
2. Planning and Statistics Division, East China Civil Aviation Authorities, Shanghai 200035, China)

Abstract: The integrated static modeling of seat inventory control and overbooking for airline revenue management was studied in this paper. Firstly, a simple overbooking equation was given for single-leg single-class seat inventory flight, with seat reservation process simulated as queuing process and maximized flight revenue as objective function. Secondly, the idea was extended to multi-class seat inventory situation by using dynamic program to build integrated static model of seat inventory control and overbooking. After two theorems were proved, optimal seat reservation decision equations of each level seat inventory were obtained. Finally, an instance was analyzed to show the utilization of the decision equations.

Key words: transportation; seat inventory control; overbooking; static model