文章编号: 1003- 207(2006)05- 0023- 05

摩擦市场中允许卖空的最优投资组合选择

刘明明, 高 岩

(上海理工大学管理学院, 上海 200093)

摘 要: 资本市场的一个重要特征就是存在不确定因素, 为了衡量其导致的风险, 本文提出基于绝对偏差的新型函数, 在一个存在摩擦的资本市场中构造均值- 绝对离差(mean- absolute deviation, MAD)投资组合选择模型。该模型结构特殊性使其转化为线性规划问题, 从而可利用单纯型法求解。实证分析比较了不同风险函数下投资组合的有效前沿, 并验证了该方法的有效性。

关键词: 投资组合选择; MAD 模型; 风险度量; 最优化
中图分类号: F830.59　　文献标识码: A

1 引言

随着金融资本市场的高速发展, 投资者越来越关注如何进行投资选择以获取最大收益. 由于投资需要时刻对未来收益进行估计, 这个过程中充满了不确定因素。当实际收益低于预期值时, 我们称之为风险。一个理性的投资者不仅关注收益最大化目标, 同时更要考虑自身对风险的承受能力。而对于风险的衡量一直处于感性阶段, 直到 1952 年 Markowitz[1]提出均值- 方差(mean- variance)模型, 才开启风险量化的大门。自此人们围绕该模型从理论上和实践中分别展开了广泛的、深入的研究[2- 4], 其中一个重要问题是用方差衡量风险的有效性。研究表明, 只有在收益率服从正态分布的情形下, 方差才是风险的有效衡量工具。然而现实中这个条件很难得到满足。大量的数据显示, 资本市场中收益率分布呈现"尖峰, 厚尾"的形态, 即服从"稳定帕雷托"分布, 而不是传统的高斯分布。用方差作为风险衡量工具有其优势, 它具有解析函数形式, 然而它对极少数极端事件十分敏感, 容易造成较大的误差。在实证研究波动时, 常采用平均绝对偏差衡量风险, 它具有比方差更抗风险的特性。Konno 和 Yamazaki[5] 提出用平均绝对偏差衡量风险, 构造了均值- 绝对偏差投资组合选择模型, 并将无摩擦市场中的最优化问题转化为线性规划求解。Cai[6] 在绝对偏差的基础上提出了 l_∞风险函数, 通过最小化绝对偏差的最大值来达到降低风险的目的。随后 Teo[7] 提出了 H^T_∞函数, 考虑投资者在估计风险时将历史数据划分为 T 个阶段, 用每个阶段的最大绝对偏差之和的平均值作为风险衡量工具。本文在 Teo 工作的基础上, 考虑到收益率波动的群聚现象, 即波动率一个时期高而另一个时期低, 且在不同时期间的变换是不可预测的, 将历史数据按照一定原则, 如每周, 每月或者每个季度, 划分为若干阶段, 以使每个阶段的收益率具有类似的波动, 并用每个阶段平均绝对偏差之和的平均值衡量风险。

Markowitz 的模型是建立在完美市场的假设前提下, 即市场中不存在税收和交易成本等摩擦因素。但在实际的资本市场中, 这些摩擦因素对投资者的决策行为有着直接的影响。研究者们逐渐将注意力转移到摩擦市场中寻求最优的投资组合[8, 9]。本文研究有摩擦市场的最优投资组合选择问题, 其中摩擦包括和交易量成比例的交易成本和税收两种。同时考虑允许卖空的情形, 并对总的卖空数量加以约束。在此基础上构造的投资组合选择模型结构上具有特殊性, 可通过变换将其转化为线性规划问题求解。实证分析表明, 该算法下的投资组合有效前沿具有类似于传统均值- 方差下的形状, 并在一定情形下优于后者。

2 投资组合选择模型

假设资本市场中存在 n 种风险资产, 投资者在

收稿日期: 2005- 12- 13; 修订日期: 2006- 09- 24
基金项目: 上海市重点学科建设项目资助(T0502)
作者简介: 刘明明(1979-), 女(汉族), 江苏睢宁人, 上海理工大学管理学院, 博士研究生, 研究方向: 投资组合理论及风险研究.

这 n 种风险资产中分配初始财富。考虑投资组合 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，其中 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 为投资于资产 i 的财富比例，x 为投资者拥有的投资组合。本文考虑单一阶段的投资问题，即投资者在投资期初确定投资策略，并持有直到期末，且在期间不允许改变策略。考虑风险资产的历史收益率数据，假设数据建立在 T 个观测点的基础上，则随机变量 $r_{it}(i=1,\cdots,n,t=1,\cdots,T)$ 为资产 i 在第 t 个观测点的收益率数据。用 $r_i(i=1,\cdots,n)$ 表示资产 i 的期望收益率，其中 $r_i=E[r_{it}]=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}r_{it}$。

2.1 风险衡量工具

(1) 方差。传统的均值方差模型采用方差衡量风险，为：$Var(R)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_ix_j$，其中 C_{ij} 为之间的协方差。

(2) 平均绝对离差。Konno 和 Yamazaki[5] 提出的绝对离差函数如下

$$\omega(x)=E[|R(x)-E[R(x)]|]=\sum_{t=1}^{T}p_t\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i\right|。$$

(3) l_∞ 风险函数。Cai[6] 在平均绝对离差的基础上提出了 l_∞ 风险函数

$$\omega_\infty(x)\max_{1\leqslant i\leqslant n}E(|r_{it}x_i-r_ix_i|)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|r_{it}x_i-r_ix_i|.$$

(4) H_∞^T 函数。Teo[7] 进一步提出了 H_∞^T 函数，考虑投资者在估计风险时将历史数据划分为 T 个阶段来估计，函数形式为：$H_\infty^T(x)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\max_{1\leqslant i\leqslant n}E|R_{ti}x_{ti}-r_{ti}x_{ti}|$。

(5) ω^H 函数：本文在 Teo 工作的基础上，根据收益率波动的群聚现象将 T 个观测点的数据划分为 H 个时间段，每个时间段中有 K 个观测点。分别每个时间段考虑投资组合的绝对偏差情形：

$$\omega^H(x)=\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}E[|R_h(x)-E[R_h(x)]|]=\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{ihk}-r_{hi})x_i\right|=\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{ihk}-r_hi)x_i\right|,$$

其中 $T=H\times K$；$r_{ihk}(i=1,\cdots,n,h=1,\cdots,H,k=1,\cdots,K)$ 为第 h 个时间段中资产 i 的第 k 个观测点数据；$r_{ih}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}r_{rhk}(i=1,\cdots,n,n=1,\cdots,H)$ 为第 h 个时间段中资产 i 的收益率期望值。

后面四种风险函数虽然都是以绝对偏差的某一形式作为风险度量，但是其侧重各不相同。ω_∞ 和 H_∞^T 函数都以最大绝对偏差来刻画风险，其中后者分段考虑数据。如果投资组合中有某一资产的收益率波动相对其他资产来说较大，那么采用这种风险度量函数的投资者是以具有最大波动风险的资产作为主要的风险控制对象。而 $\omega(x)$ 函数把所有资产的收益率的绝对偏差作为风险度量，采取这一风险函数的投资者相对来说要客观一些，他/她不仅考虑某一类收益率波动较大的资产对投资组合的影响，更考虑所有资产的波动对投资组合的影响。本文提出的绝对离差函数结合这两类函数的特征，将收益率历史数据根据波动群聚现象划分为若干时间段，分别考虑每个时间段所有资产的收益率偏差情形，比较客观且贴近实际。

2.2 摩擦市场中 **MAD(mean-absolute deviation)** 模型

现实中的资本市场不是完美的，总是存在着税收、交易成本和买卖交易价差等摩擦因素，这些因素对投资者的决策产生的影响不可忽略，本文假设资本市场中仅存在前两种摩擦因素，且投资者是作为一个公司或企业的代表，因此税收是指企业所得税，交易成本主要包括佣金 $c_1(x)$ 和印花税 $c_2(x)$。研究表明，印花税和佣金是交易量的 V 型函数，即：

$$c_1(x)=t_f\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|,\ c_2(x)=t_s\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|,$$

其中 t_f 和 t_s 分别为单位交易量的佣金和印花税率，$x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 为投资者的初始投资组合。

则投资者的税前收入 $f_{1t}(x)$ 为：

$$f_{1t}(x)=\sum_{i=1}^{n}r_{it}x_i-c_1(x)-c_2(x),\ t=1,\cdots,T.$$

考虑到印花税计入期间费用可在所得税前扣除，而佣金作为投资成本，不可税前扣除。则投资者的税后收入 $f_{2t}(x)$ 为：

$$f_{2t}(x)=(1-t_g)\left(\sum_{i=1}^{n}r_{it}x_i-t_s\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|\right)-t_f\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|$$

$$=(1-t_g)\sum_{i=1}^{n}r_{it}x_i-t_0\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|,\ t=1,\cdots,T.$$

其中定义 $t_0=(1-t_g)t_s+t_f$ 为市场摩擦因子，t_g 为单位收入的企业所得税率。

则投资者税后收入的期望值为:

$$f(x)=E[f_{2t}(x)]=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left((1-t_g)\sum_{i=1}^{n}r_{it}x_i-t_0\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|\right)$$
$$=(1-t_g)\sum_{i=1}^{n}r_ix_i-t_0\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_i^0\right|.$$

用 ω^H 函数衡量的绝对离差为:

$$g(x)=\frac{(1-t_g)}{T}\sum_{h=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{ihk}-r_{ih})x_i\right|.$$

由于高收入面临着高风险, 二者很难同时满足, 因此需在期望收入最大化和风险最小化之间寻求一个平衡。投资组合的有效前沿上具有期望收入最大的同时收益率波动风险最小的特征, 同时考虑资本市场中允许卖空行为的存在, 但是对其总的卖空之和加以约束[10]。因此摩擦市场中允许卖空的投资组合的 MAD 模型构造如下:

$$(P_1)\ \max(1-\lambda)f(x)-\lambda g(x)$$
$$s.t.\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1$$
$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leqslant 1+2\alpha$$

其中 $\lambda\in[0,1]$ 为风险厌恶因子, λ 越大投资者越厌恶风险。常数 $\alpha\geqslant 0$。第二个约束条件的含义是为贴近现实, 对所有卖空之和加以约束。

易见 (P_1) 是一个非线性规划问题, 很难给出最优解的解析表达式, 且求解较为复杂。但是其具有特殊性质, 利用该性质[3]可将其转化为一个线性规划问题进行求解。通过转化, (P_1) 等价于:

$$(P_2)\ \max(1-tg)\left[(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}r_ix_i-\lambda P\right]-t_0y$$
$$s.t.\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^++x_i^-)\leqslant 1+2\alpha$$
$$x_i^+-x_i^-=x_i;\ x_i^+\geqslant 0;\ x_i^-\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n$$
$$y\geqslant\sum_{i=1}^{n}(y_i^++y_i^-)$$
$$y_i^+-y_i^-=x_i-x_i^0;\ y_i^+\geqslant 0;\ y_i^-\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n$$
$$z\geqslant\frac{2}{T}\sum_{h=1}^{H}\sum_{k=1}^{K}z_{hk}^+$$
$$z_{hk}^+\geqslant\sum_{i=1}^{n}(r_{ihk}-r_{ih})x_i;\ z_{hk}^+\geqslant 0,\ h=1,\cdots,H;\ k=1,\cdots,K$$

3　实证分析

采用单纯型法求解 (P_2), 对于大规模的投资组合选择问题, 该方法很容易计算出最优解. 相比较 MV(mean - variance) 模型, MAD(mean - absolute deviation) 模型免去了计算协方差的工作量, 以下算例分析可说明该方法的有效性。表 3.1 数据来源于 Markowitz[2], 表中给出的是 Am.T, A.T.T, U.S.S, G.M, A.T.Sfe, C.C, Bdn, Frstn 和 S.S 9 种公司 1937~ 1954 年的年收益率. 并给定 $t_g=30\%$, $t_s=0.1\%$ 和 $t_f=0.35\%$. 设定初始投资组合 $x^0=0$.

表 **3.1**　收益率数据

NO.	1 Am.T	2 A.T.T	3 U.S.S	4 G.M.	5 A.T.Sfe	6 C.C	7 Bdn	8 Frstn.	9 S.S
1937	-0.0305	-0.173	-0.318	-0.477	-0.457	-0.065	-0.319	-0.400	-0.435
1938	0.513	0.098	0.285	0.714	0.107	0.238	0.076	0.336	0.238
1939	0.055	0.200	-0.047	0.165	-0.424	-0.078	0.381	-0.093	-0.295
1940	-0.126	0.03	0.104	-0.043	-0.189	-0.077	-0.051	-0.090	-0.036
1941	-0.280	-0.183	-0.171	-0.277	0.637	-0.187	0.087	-0.194	-0.240
1942	-0.003	0.067	-0.039	0.476	0.865	0.156	0.262	0.113	0.126
1943	0.428	0.300	0.149	0.225	0.313	0.351	0.341	0.580	0.639
1944	0.192	0.103	0.260	0.290	0.637	0.233	0.227	0.473	0.282
1945	0.446	0.216	0.419	0.216	0.373	0.349	0.352	0.229	0.578
1946	-0.088	-0.046	-0.078	-0.272	-0.037	-0.209	0.153	-0.126	0.289
1947	-0.127	-0.071	0.169	0.144	0.026	0.355	-0.099	0.009	0.184
1948	-0.015	0.056	-0.035	0.107	0.153	-0.231	0.038	0.000	0.114
1949	0.305	0.038	0.133	0.321	0.067	0.246	0.273	0.223	-0.222
1950	-0.096	0.089	0.732	0.305	0.579	-0.248	0.091	0.650	0.327
1951	0.016	0.090	0.021	0.195	0.040	-0.064	0.054	-0.131	0.333
1952	0.128	0.083	0.131	0.390	0.434	0.079	0.109	0.175	0.062
1953	-0.010	0.035	0.006	-0.072	-0.027	0.067	0.210	-0.084	-0.048
1954	0.154	0.176	0.908	0.715	0.469	0.077	0.112	0.756	0.185

给定卖空约束中的 $\alpha=0.5$, 以风险值为横轴, 收益率均值为纵轴, 图 3.1 和 3.2 分别给出了限制

卖空和允许卖空市场中投资组合的有效前沿．MAD1和MAD2分别描述了限制卖空和允许卖空情形下采用本文提出的ω^H函数度量风险的均值–绝对离差模型的有效前沿，MV1和MV2分别描述了限制和允许卖空市场中均值–方差模型的有效前沿．从图中我们可以看出，限制卖空市场中的有效前沿类似于允许卖空市场．而在这两种情形下，均值–绝对离差和均值–方差模型的有效前沿出现交替增长情形．在一定的收益率水平一下，前者模型的有效前沿优于后者；一旦超出一定的收益率水平，后者的表现较好一些。

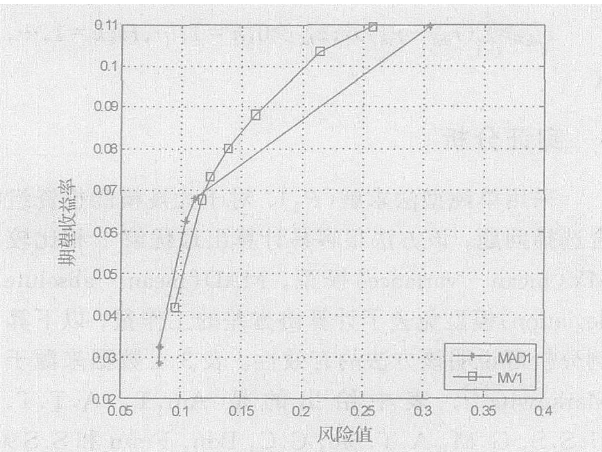

图 3.1　限制卖空市场中投资组合的有效前沿

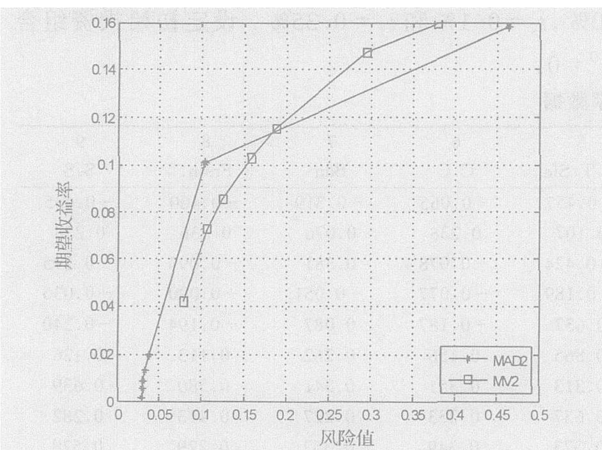

图 3.2　允许卖空市场中投资组合的有效前沿

把这四种有效前沿置于同一张图中，得到图3.3，从中我们可以看到允许卖空市场中投资组合的有效前沿要优于限制卖空市场，因为投资者可以为获取最大收益选择投资或者融资．图3.4给出了采用不同风险函数下投资组合的有效前沿，其中MAD2和MV2含义和前面一致，MAD3是指在允许卖空的摩擦市场中，采用平均绝对离差$\omega(x)$作为风险函数的模型。从图中可以看出，MAD2采用的风险函数下的有效前沿类似于MAD3，但明显优于后者。这是因为在实际中，证券收益率的波动具有群聚现象，根据该现象划分不同时段分别计算风险有利于正确衡量出投资组合的风险。

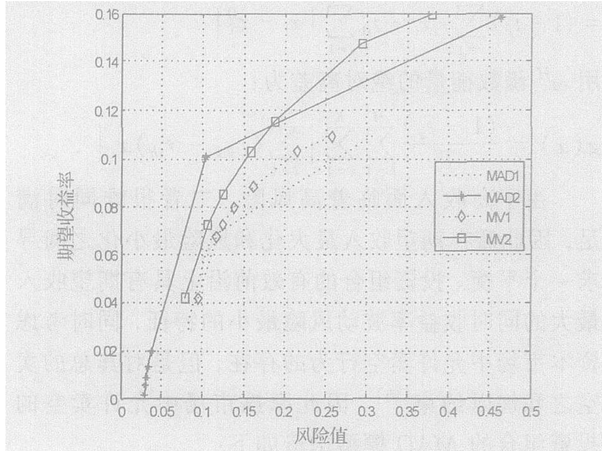

图 3.3　不同市场情形下投资组合有效前沿的比较

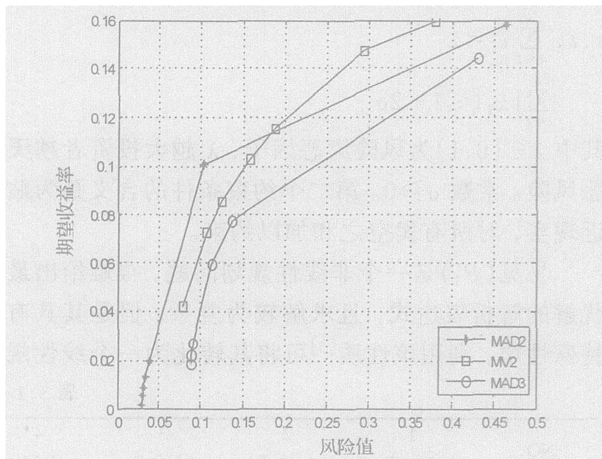

图 3.4　不同风险函数下投资组合有效前沿的比较

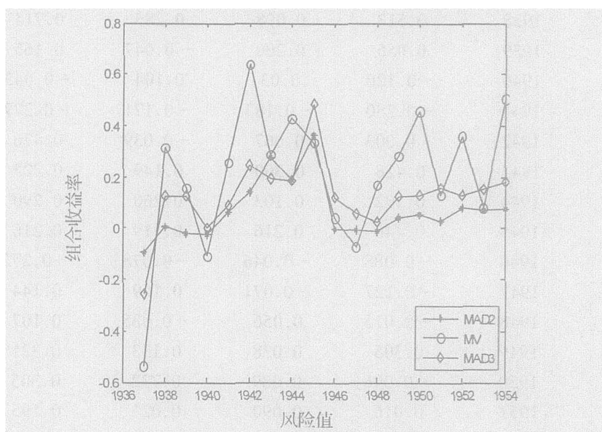

表 3.5　λ= 0.5 时组合收益率

表3.5和3.6分别给出了风险因子取不同值时用历史数据模拟出的组合收益率变动情形．从图中我们可以看出，当取值较大，即投资者较厌恶风险时，求解

允许卖空市场中的 MV 模型得出的组合收益率虽然数值较大, 但同时其波动也较大; MAD2 模型给出的组合收益率波动最小, 同时收益率也较小; MAD3 模型介于二者之间。而当投资者具有冒险精神时, 即取值较小, 此时 MAD2 和 MV 的组合收益率波动情形几乎是吻合的, 都稍优于 MAD3 模型。

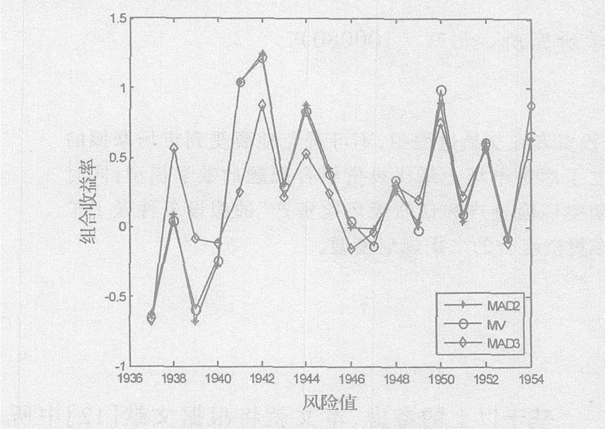

表 3. 6　λ= 0. 1 时组合收益率

4　结语

本文根据证券收益率波动的群聚性质, 提出基于平均绝对离差的风险函数 ω^H, 将历史数据划分为若干时间段分别计算绝对离差, 再对其求平均作为风险值。考虑一个存在摩擦的资本市场, 同时允许卖空行为存在, 但是对总的卖空之和加以约束。在此基础上构造投资组合选择的均值 - 绝对离差(mean- absolute deviation, MAD)模型, 利用该模型的特征, 原始非线性规划问题可转化为线性规划进行求解。最后分别对限制卖空和允许卖空的摩擦市场进行实证研究, 同时对不同风险函数下的有效前沿进行比较分析。研究分析表明了该方法的有效前沿类似于其他风险函数下, 同时免去计算大规模数据的协方差的麻烦, 并在某些情形下优于其他风险函数的有效前沿。

但是采用 ω^H 函数衡量风险构造出的均值- 绝对离差模型具有一定的局限性, 它的有效前沿并非总是优于均值- 方差模型, 只有在一定条件下选择本文提出的模型才是最优的。同时实证分析中选择的历史数据来源于国外市场, 分析结果可能并不适应中国市场。为此, 应进一步考虑问题存在的原因, 结合中国资本市场的实际因素, 构造更贴近现实并能更好衡量风险的投资组合选择模型。

参考文献:

[1] Markowitz H. Portfolio Selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7: 77- 91.

[2] Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments[M]. New York: Basil Blackwell, 1959.

[3] 李仲飞, 汪寿阳. 投资组合优化与无套利分析[M]. 北京:科学出版社, 2001.

[4] 姜继娇, 杨乃定. 基于行为金融的证券组合风险管理研究[J]. 中国管理科学, 2005, 13(3): 32- 36

[5] Konno H., Yamazaki H. Mean- absolute deviation portfolio in optimization model and its application to Tokyo stock market[J]. Management Science, 1991, 37: 519- 531.

[6] Cai X. Q., Teo K L, Yang X Q. Zhou X Y. Portfolio optimization under a minimax rule[J]. Management Science, 2000, 46: 957- 972.

[7] Teo K. L., Yang X. Q.. Portfolio selection problem with minimax type risk function[J]. Annals of Operations Research, 2001, 101: 333- 349.

[8] Konno H., Yamazaki H.. Protfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints[J]. Math. Program., 2001, 89: 233- 250.

[9] 余湄, 董洪斌, 汪寿阳. 摩擦市场下的投资组合与无套利分析[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[10] Wanka G, Göhler L. Duality for portfolio optimization with short sales[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2001, 53: 247- 263.

Portfolio Selection with Short Sales in a Frictional Market

LIU Ming- ming, GAO Yan

(School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: The capital market has a key feature of uncertainty. To measure the risks induced by uncertainties, we proposed a new function based on absolute deviation function. Considering a frictional market, the mean- absolute deviation (MAD) model is constructed. The special structure of the model is utilized to transform a nonsmooth program into a linear one, which can be solved by simplex method. The numerical analysis compares the efficient frontiers of portfolio selection under various risk measures, and shows the validity of the method.

Key words: Portfolio selection; MAD model, measure of risk; optimization