第 14 卷　第 4 期
2006 年　　8 月

中国管理科学
Chinese Journal of Management Science

Vol. 14, No. 4
Aug., 2006

文章编号: 1003- 207(2006) 04- 0064- 05

区间数互补判断矩阵的一致性及其排序研究

巩在武, 刘思峰

(南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 210016)

摘　要: 由于目前国内外文献对区间数互补判断矩阵的性质研究较少, 从而使得对排序方法的相关研究缺乏理论依据。针对这些缺陷, 本文研究了区间数互补判断矩阵的性质及其排序方法问题。根据区间数互补判断矩阵的定义, 给出了区间数互补判断矩阵的一致性、严格强传递性与弱传递性等定义, 并研究了一致性判断矩阵的性质, 并说明这些性质更符合人们的思维特征。在一致性性质的基础上建立了区间数互补判断矩阵排序的非线性规划模型, 算例分析表明该方法是有效可行的。

关键词: 区间数互补判断矩阵; 一致性; 严格强传递性; 排序

中图分类号: N945. 5; O223　　　文献标识码: A

1　引言

层次分析法[1,2]是一种将定性分析与定量分析相结合的方法, 它广泛应用于社会、经济以及科学管理等领域的各种复杂问题的分析之中。其核心思想就是运用简单的两两比较方法对系统中各有关因素进行比较评判, 构造判断矩阵, 最后通过对这种比较评判结果进行综合计算处理。在实际决策过程中, 由于受决策者的知识结构、判断水平等诸多主观因素的影响, 加上客观事物本身的模糊性与不确定性, 专家所掌握的信息不足以把握事物的真实状态。因此, 专家在构造判断矩阵时往往会给出一些未确知的判断值, 即用区间数判断矩阵来表达两两比较得到的不确定性偏好信息。由于不确定模糊偏好信息更符合人们的思维习惯特点, 因此对于区间数互补判断矩阵问题的研究具有重要理论价值与现实意义。

区间数判断矩阵一般包括区间数互补判断矩阵与互反判断矩阵。有关区间数判断矩阵的排序与一致性问题的研究一直是最为重要的研究课题[3- 10]。例如文献[4] 从区间除法运算的客观属性出发, 引入了区间数互反判断矩阵的一致性的概念, 给出了一致性条件, 讨论了区间数判断矩阵的特征根排序方法; 文献[5] 提出了不确定 AHP 判断矩阵的一致性逼近与排序方法; 文献[6] 借助于集值统计原理, 构造了与区间数判断矩阵群信息等价的具有一定可靠度的确定数判断矩阵, 建立了计算这类群信息集结值可靠度的模型, 得到一种方案排序方法; 文献[7] 利用可能度公式, 提出了一种基于可能度的区间数判断矩阵排序方法; 文献[8] 根据误差传递理论以及 OWA 算子, 对区间数互补判断矩阵进行排序。

根据公开的文献报道, 有关区间数互补判断矩阵一致性理论研究较少, 从而使得众多的排序方法研究缺乏理论依据。思维的一致性是专家构造判断矩阵的最基本前提, 基于此, 本文给出区间数互补判断矩阵的一致性、严格强传递性与中分传递性等定义, 对一致性区间数互补判断矩阵的性质进行研究, 并对所给定义的合理性进行论证, 在一致性性质的基础上建立区间数互补判断矩阵排序的非线性规划模型, 最后进行算例分析。

2　相关概念

首先给出正区间数的一些运算与性质[5]: 设 $a=[a^-, a^+]$, $b=[b^-, b^+]$, $0<a^-\leqslant a^+$, $0<b^-\leqslant b^+$, 则 $a+b=[a^-+b^-, a^++b^+]$; $a^{-1}=[\frac{1}{a^+}, \frac{1}{a^-}]$; $a\cdot b=[a^-b^-, a^+b^+]$; $a\geqslant b\Rightarrow a^+\geqslant a^-\geqslant b^+\geqslant b^-$; $a=b\Leftrightarrow a^-=b^-, a^+=b^+$; 对于任意实数 a, 都可以写成区间数的形式, 即 $a=[a, a]$。

收稿日期: 2005- 06- 20; 修订日期: 2006- 06- 26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70473037) ; 国家教育部博士学科点科研基金资助项目(20020287001)
作者简介: 巩在武(1975-) , 男(汉族) , 山东人, 南京航空航天大学经济与管理学院, 博士生, 研究方向: 不确定性决策.

设 $X=\{X_1, \cdots, X_n\}$ 为方案集, 记 $N=\{1, \cdots, n\}$。

若区间数判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 满足: 对任意的 $i, j\in N$, 都有 $b_{ij}=[b_{ij}^-, b_{ij}^+]$, $b_{ij}=b_{ji}^{-1}$, 即 $[b_{ij}^-, b_{ij}^+]=[\frac{1}{b_{ji}^+}, \frac{1}{b_{ji}^-}]$ 则称矩阵 B 为区间数互反判断矩阵[4,6]。若区间数互反判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 满足: 对任意的 $i, j\in N$ 都有 $b_{ij}=b_{ji}^{-1}$, $b_{ij}b_{jk}=b_{ij}b_{ik}$, 则称 B 为一致性区间数互反判断矩阵。若 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots\omega_n)^T$ 为一致性区间数互反判断矩阵 B 的排序向量[4], 则 $b_{ij}=\omega_i\omega_j^{-1}$, $i, j\in N$, 其中 $\omega_i=[\omega_i^-, \omega_i^+]$。若区间数判断矩阵 $A=(a_{ij})^{n\times n}$ 满足: 对任意的 $i, j\in N$, 都有 $a_{ij}=[a_{ij}^-, a_{ij}^+]$, $0<a_{ij}^-\leqslant a_{ij}^+<1$, $a_{ij}^-+a_{ji}^+=a_{ij}^++a_{ji}^-=1$ 则称矩阵 A 为区间数互补判断矩阵[8]。

3 区间数互补判断矩阵的一致性和传递性研究

区间数互反判断矩阵与区间数互补判断矩阵之间在一定程度上可以相互转换。

定理 1　区间数互补判断矩阵 $A=(a_j)_{n\times n}$ 与区间数互反判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 之间可以通过公式

$$a_{ij}=(1+b_{ji})^{-1},\quad b_{ij}=a_{ji}^{-1}-1,\quad i, j\in N$$

相互转换。

证明. 略。

下面讨论区间数互补判断矩阵一致性的概念。

设 $V=(v_1, v_2, \cdots, v_n)^T$ 是一致性区间数互反判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量, 显然有 $b_{ij}=v_iv_j^{-1}$, $i, j\in N$。令 $a_{ij}=(1+b_{ji})^{-1}$, 即

$$a_{ij}=\frac{1}{1+\frac{v_j}{v_i}}=\frac{1}{1+\frac{[v_j^-, v_j^+]}{[v_i^-, v_i^+]}}=[\frac{v_i^-}{v_i^-+v_j^+}, \frac{v_i^+}{v_j^-+v_i^+}]$$

从而若设 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 是区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量, 且有

$$a_{ij}=[a_{ij}^-, a_{ij}^+]=\frac{1}{1+\frac{\omega_j}{\omega_i}}=[\frac{\omega_i^-}{\omega_i^-+\omega_j^+}, \frac{\omega_i^+}{\omega_j^-+\omega_i^+}] \tag{1}$$

考虑到

$$\frac{1}{a_{ij}}-1=[\frac{1}{a_{ij}^+}-1, \frac{1}{a_{ij}^-}-1]=[\frac{\omega_j^-}{\omega_i^+}, \frac{\omega_j^+}{\omega_i^-}]$$

$$\frac{1}{a_{jk}}-1=[\frac{1}{a_{jk}^+}-1, \frac{1}{a_{jk}^-}-1]=[\frac{\omega_k^-}{\omega_j^+}, \frac{\omega_k^+}{\omega_j^-}]$$

$$\frac{1}{a_{ki}}-1=[\frac{1}{a_{ki}^+}-1, \frac{1}{a_{ki}^-}-1]=[\frac{\omega_i^-}{\omega_k^+}, \frac{\omega_i^+}{\omega_k^-}]$$

而

$$[\frac{1}{a_{ij}^+}-1][\frac{1}{a_{jk}^+}-1][\frac{1}{a_{ki}^+}-1]=\frac{\omega_j^-}{\omega_i^+}\frac{\omega_k^-}{\omega_j^+}\frac{\omega_i^-}{\omega_k^+}=\frac{\omega_i^-}{\omega_j^+}\frac{\omega_j^-}{\omega_k^+}\frac{\omega_k^-}{\omega_i^+}=[\frac{1}{a_{ji}^+}-1][\frac{1}{a_{kj}^+}-1][\frac{1}{a_{ik}^+}-1] \tag{2}$$

同理可证

$$[\frac{1}{a_{ij}^-}-1][\frac{1}{a_{jk}^-}-1][\frac{1}{a_{ki}^-}-1]=[\frac{1}{a_{ji}^-}-1][\frac{1}{a_{ki}^-}-1][\frac{1}{a_{ik}^-}-1] \tag{3}$$

即

$$[\frac{1}{a_{ij}}-1][\frac{1}{a_{jk}}-1][\frac{1}{a_{ki}}-1]=[\frac{1}{a_{ji}}-1][\frac{1}{a_{ki}}-1][\frac{1}{a_{ik}}-1] \tag{4}$$

从而可得一致性区间数互补判断矩阵的概念。

定义 1　若区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足条件(4), 则称该判断矩阵具有一致传递性。具有一致传递性的区间数互补判断矩阵称为一致性区间数互补判断矩阵。

同一致性互补判断矩阵[3]相类似, 区间数互补判断矩阵的一致传递性同样反映了人们思维的一致性。为了更好的说明这个问题, 下面给出比一致传递性更强的一个概念严格强传递性。

定义 2　区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素若满足如下条件: 如果 $a_{ij}\geqslant[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $a_{jk}\geqslant[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 则当 $a_{jk}^-\geqslant a_{ij}^-$ 且 $a_{jk}^+\geqslant a_{ij}^+$ 时, 有 $a_{ik}^-\geqslant a_{jk}^-$ 或者 $a_{ik}^+\geqslant a_{jk}^+$; 当 $a_{ij}^-\geqslant a_{jk}^-$ 且 $a_{ij}^+\geqslant a_{jk}^+$ 时, 有 $a_{ik}^-\geqslant a_{ij}^-$ 或者 $a_{ik}^+\geqslant a_{ij}^+$。则称矩阵 A 具有严格强传递性。

定义 2 的含义是: 若方案 X_i 优于 X_j 的程度为 a_{ij}, 方案 X_j 优于 X_k 的程度为 a_{jk}, 则 X_i 优于 X_k 的程度至少为 a_{ij} 与 a_{jk} 两区间数左端点值的最大者或者右端点值的最大者。

定理 2　一致性区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 具有严格强传递性。

证明. 由 $a_{ij}\geqslant[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $a_{jk}\geqslant[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 只需证明: 若 $a_{jk}^-\geqslant a_{ij}^-$ 且 $a_{jk}^+\geqslant a_{ij}^+$, 则 $a_{ik}^-\geqslant a_{jk}^-$ 或者 $a_{ik}^+\geqslant a_{jk}^+$。

用反证法, 即假设 $a_{ik}^-<a_{jk}^-$, $a_{ik}^+<a_{jk}^+$ 成立, 则 $1-a_{ik}^->1-a_{jk}^-$, 也就是 $a_{ki}^+>a_{kj}^+$, 则

$$\frac{1}{a_{ik}^+}-1>\frac{1}{a_{jk}^+}-1,\quad \frac{1}{a_{kj}^+}-1>\frac{1}{a_{ki}^+}-1 \tag{5}$$

又因为 $a_{ij} \geqslant [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，所以 $a_{ji} \leqslant [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$，则

$$0< \frac{1}{a_{ij}^{+}}-1 \leqslant 1,\ \frac{1}{a_{ji}^{+}}-1 \geqslant 1 \quad (6)$$

由公式(2)、(6)可知

$$(\frac{1}{a_{jk}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ki}^{+}}-1) \geqslant (\frac{1}{a_{ij}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{jk}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ki}^{+}}-1)$$

$$=(\frac{1}{a_{ji}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ki}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ik}^{+}}-1) \geqslant (\frac{1}{a_{kj}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ik}^{+}}-1)$$

但是，由公式(5)可知，

$$(\frac{1}{a_{jk}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ki}^{+}}-1)<(\frac{1}{a_{kj}^{+}}-1)(\frac{1}{a_{ik}^{+}}-1) \quad (7)$$

恰与公式(7)矛盾，则 $a_{ik}^{-} \geqslant a_{jk}^{-}$ 或者 $a_{ik}^{+} \geqslant a_{jk}^{+}$ 成立。

定理2说明区间数 a_{ik} 中的右端点值比 a_{ij} 与 a_{jk} 两区间数的右端点值中最大者大，区间数 a_{ij} 中的左端点值比 a_{ij} 与 a_{jk} 两区间数的左端点值中最大者大。

中分传递性是一致性互补判断矩阵的另外一条极为重要的性质，它体现了人们决策思维的心理特征，符合思维决策的一致性。对于区间数互补判断矩阵，同样需要建立中分传递性的概念，并且一致性区间数互补判断矩阵也应该具有中分传递性，从而体现人们思维的一致性。定义3与定理3说明了这个基本的事实。

定义3　设区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，若对任意的 $i,j,k\in N$，$i\neq j\neq k$，都有

当 $0.5\leqslant\lambda\leqslant1$，若 $a_{ij} \geqslant [\lambda, \lambda]$，$a_{jk} \geqslant [\lambda, \lambda]$ 则 $a_{ik}^{+} \geqslant \lambda$；当 $0<\lambda\leqslant0.5$，若 $a_{ij} \leqslant [\lambda, \lambda]$，$a_{jk} \leqslant [\lambda, \lambda]$，则 $a_{ik}^{-} \leqslant \lambda$。则称矩阵 A 具有中分传递性。

定义3的含义是：若方案 X_i 优于 X_j 的程度为 $a_{ij} \geqslant [\lambda, \lambda]$，方案 X_i 优于 X_k 的程度为 $a_{ik} \geqslant [\lambda, \lambda]$，则方案 X_i 与 X_k 相比，其优越程度 a_{ik} 至少满足其右端点值大于 λ；若方案 X_j 优于 X_i 的程度为 $a_{ij} \leqslant [\lambda, \lambda]$，方案 X_k 优于 X_j 的程度为 $a_{jk} \leqslant [\lambda, \lambda]$，则方案 X_k 与 X_i 相比，其优越程度 a_{ik} 至少满足其左端点值小于 λ。

定理3　一致性区间数互补判断矩阵具有中分传递性。

证明　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一致性区间数互补判断矩阵，且对任意的 $i,j,k\in N$，有 $i\neq j\neq k$。当 $0.5\leqslant\lambda\leqslant1$，若 $a_{ij} \geqslant [\lambda, \lambda]$，$a_{jk} \geqslant [\lambda, \lambda]$，由定理2可知，$a_{ik}^{+} \geqslant \lambda$。当 $0<\lambda\leqslant0.5$，设 $a_{ij} \leqslant [\lambda, \lambda]$，$a_{jk} \leqslant [\lambda, \lambda]$，则 $a_{ji} \geqslant [1-\lambda, 1-\lambda]$，$a_{kj} \geqslant [1-\lambda, 1-\lambda]$。

用反证法，假设 $a_{ik}^{-}>\lambda$，则 $a_{ik}^{+}>\lambda$，也就是 $a_{ik}>[\lambda, \lambda]$，即 $a_{ki}<[1-\lambda, 1-\lambda]$ 成立。显然可得

$$\frac{1}{a_{ij}^{-}}-1 \geqslant \frac{1}{\lambda}-1,\ \frac{1}{a_{jk}^{-}}-1 \geqslant \frac{1}{\lambda}-1,$$

$$\frac{1}{a_{ji}^{-}}-1 \leqslant \frac{1}{1-\lambda}-1,\ \frac{1}{a_{kj}^{-}}-1 \leqslant \frac{1}{1-\lambda}-1 \quad (8)$$

由公式(3)和(8)知

$$(\frac{\lambda}{1-\lambda})(\frac{\lambda}{1-\lambda})(\frac{1}{a_{ik}^{-}}-1) \geqslant (\frac{1}{a_{ji}^{-}}-1)(\frac{1}{a_{ki}^{-}}-1)(\frac{1}{a_{ik}^{-}}-1)$$

$$=(\frac{1}{a_{ij}^{-}}-1)(\frac{1}{a_{jk}^{-}}-1)(\frac{1}{a_{ki}^{-}}-1) \geqslant (\frac{1-\lambda}{\lambda})(\frac{1-\lambda}{\lambda})(\frac{1}{a_{ki}^{-}}-1) \quad (9)$$

即

$$a_{ik}^{-}<\frac{\lambda^3}{\lambda^3+(1-\lambda)^3}$$

很容易证明当 $0<\lambda\leqslant0.5$ 时，

$$\frac{\lambda^3}{\lambda^3+(1-\lambda)^3}\leqslant\lambda$$

恒成立。即

$$a_{ik}^{-}<\frac{\lambda^3}{\lambda^3+(1-\lambda)^3}\leqslant\lambda\leqslant a_{ik}^{-}$$

矛盾。即 $a_{ik}^{-}\leqslant\lambda$ 成立。

所以命题成立。

定理3说明，当 $0.5\leqslant\lambda\leqslant1$，若 $a_{ij} \geqslant [\lambda, \lambda]$，$a_{jk} \geqslant [\lambda, \lambda]$，则 $a_{ik}^{+} \geqslant \lambda$，即至少 a_{ik} 中的最大值 a_{ik}^{+} 比 λ 大；$0<\lambda\leqslant0.5$，若 $a_{ik} \leqslant [\lambda, \lambda]$，$a_{jk} \leqslant [\lambda, \lambda]$，则至少 a_{ik} 中的最小值 a_{ik}^{-} 比 λ 小。

定义4　区间数互补判断矩阵中的元素若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足如下条件：

$$a_{ij} \geqslant [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ a_{jk} \geqslant [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow a_{ik}^{+} \geqslant \frac{1}{2};\text{或者}$$

$$a_{ij} \leqslant [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ a_{jk} \leqslant [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Rightarrow a_{ik}^{+} \leqslant \frac{1}{2}$$

则称矩阵具有弱传递性。

由定理3，若令 $\lambda=\frac{1}{2}$，即可得到推论1。

推论1　一致性区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 具有弱传递性。

4　区间数互补判断矩阵的排序方法研究

假设 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots\omega_n)^T$ 是区间数互补判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量，其中 $\omega_i=[\omega_i^{-}, \omega_i^{+}]$，$i\in N$ 则当 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一致性矩阵时，对任意的 $i,j\in N$，有(1)式成立，即

$$\begin{cases} a_{ij}^{-}(\omega_i^{-}+\omega_j^{+})=\omega_i^{-} \\ a_{ij}^{+}(\omega_i^{+}+\omega_j^{-})=\omega_i^{+} \end{cases} \quad (10)$$

但是在实际决策过程中, 所给的区间数互补判断矩阵往往并不是完全一致的, 即式(10)很难成立, 因此引入偏差函数

$$\begin{cases} g_{ij}^- = [a_{ij}^-(\omega_i^- + \omega_j^+) - \omega_i^-]^2 \\ g_{ij}^+ = [a_{ij}^+(\omega_i^+ + \omega_j^-) - \omega_i^+]^2 \end{cases} \tag{11}$$

显然, 上述偏差函数总是越小越好, 建立下述目标优化模型:

$$\min\ g_{ij}^- = [a_{ij}^-(\omega_i^- + \omega_j^+) - \omega_i^-]^2$$
$$\min\ g_{ij}^+ = [a_{ij}^+(\omega_i^+ + \omega_j^-) - \omega_i^+]^2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 0 \leqslant \omega_i^- \leqslant \omega_i^+ \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^- \leqslant 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^+,\ i,\ j \in N \end{cases}$$

由于每个目标函数总希望达到期望值均为 0, 并且目标函数之间没有偏好关系, 因此也可以建立下列简单的非线性规划模型 1:

$$\min J = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[a_{ij}^-(\omega_i^- + \omega_j^+) - \omega_i^-]^2 + [a_{ij}^+(\omega_i^+ + \omega_j^-) - \omega_i^+]^2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^- \leqslant 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^+ \\ 0 \leqslant \omega_i^- \leqslant \omega_i^+ \leqslant 1,\ i \in N \end{cases}$$

也可以引入下列偏差函数

$$\begin{cases} g_{ij}^- = | a_{ij}^-(\omega_i^- + \omega_j^+) - \omega_i^- | \\ g_{ij}^+ = | a_{ij}^+(\omega_i^+ + \omega_j^-) - \omega_i^+ | \end{cases} \tag{12}$$

显然, 上述偏差函数也总是越小越好, 类似于模型 1 的构造方法, 可得非线性规划模型 2:

$$\min J = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} | a_{ij}^-(\omega_i^- + \omega_j^+) - \omega_i^- | + [a_{ij}^+(\omega_i^+ + \omega_j^-) - \omega_i^+ |$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^- \leqslant 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^+ \\ 0 \leqslant \omega_i^- \leqslant \omega_i^+ \leqslant 1,\ i,j \in N \end{cases}$$

5　算例分析

设某个决策者针对方案集合$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$给出的区间数互补判断矩阵为

$$\begin{pmatrix} [0.5,0.5] & [0.2,0.4] & [0.3,0.6] & [0.5,0.7] \\ [0.6,0.8] & [0.5,0.5] & [0.7,0.9] & [0.6,0.8] \\ [0.4,0.7] & [0.1,0.3] & [0.5,0.5] & [0.7,0.8] \\ [0.3,0.5] & [0.2,0.4] & [0.2,0.3] & [0.5.0.5] \end{pmatrix}$$

根据模型 2, 利用“Matlab 优化工具箱”可求得:

$\omega_1 = [0.1234,\ 0.2147]$, $\omega_2 = [0.3619,\ 0.4583]$, $\omega_3 = [0.1120,\ 0.1901]$, $\omega_4 = [0.0906,\ 0.1370]$。这里利用文献[7]给出的区间数排序公式

$$p_{ij} = P(x_i \geqslant x_j) = \max\{1 - \max(\frac{\omega_j^+ - \omega_i^-}{l_{x_i} + l_{x_j}}, 0), 0\} \tag{13}$$

$$v_i = \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{j=1}^{n}p_{ij} + \frac{n}{2} - 1),\ i, j \in N \tag{14}$$

其中 $l_{x_i} = \omega_i^+ - \omega_i^-$, $i \in N$, $P = (p_{ij})_{n\times n}$为可能度矩阵, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$是可能度矩阵的排序向量。很容易得到 $v_1 = 0.2506$, $v_2 = 0.3750$, $v_3 = 0.2244$, $v_4 = 0.1499$。区间数 ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$ 的排序为 $\omega_2 \underset{1}{\geqslant} \omega_1 \underset{0.6062}{\geqslant} \omega_3 \underset{0.7992}{\geqslant} \omega_4$, 其中 $p_{21} = 1$, $p_{13} = 0.6062$, $p_{34} = 0.7992$。

最后用符号$\succ$表示方案$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$之间的可能度的优序关系, 得到相应的排序为 $X_2 \underset{1}{\succ} X_1 \underset{0.6062}{\succ} X_3 \underset{0.7992}{\succ} X_4$。

6　结语

由于区间数互补判断矩阵更符合人的心理习惯, 更容易为决策者掌握和接受, 所以对其基础理论的研究有重要的实际意义。严格强一致性与中分传递性是完全一致性区间数互补判断矩阵特有的重要性质, 它反映了人们思维的一致性。由于本文给出的区间数互补判断矩阵排序方法是建立在区间数互补判断矩阵一致性性质基础之上的, 因此, 与其它文献给出的排序方法相比较, 本文的算法更具有理论依据。

最后需要指出的是, 由于对某些实际问题的背景缺乏了解, 或者受自身知识结构等因素的限制, 很可能出现参与决策的某个专家对某些判断缺少把握、不感兴趣, 或对某些比较敏感的问题不想发表意见的情形, 这时得到的判断矩阵的元素必定会有残缺, 对于具有残缺判断信息的区间数互补判断矩阵的性质以及排序方法的研究[11], 将是一个很有意义的工作。

参考文献:

[1] Saaty T. L.. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2] José L., Bonifacio L.. Aggregation of fuzzy preferences: some rules of the mean[J]. Soc Choice Welfare, 2000, 17(4): 673-690.

[3] Herrera-Viedma E., Herrera F., Chiclana F. and Luque M.. Some issues on consistency of fuzzy preference rela-

tions[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154(1): 98- 109.

[4] 王绪柱,刘进生,魏毅强. 模糊判断矩阵的一致性及权重排序[J].系统工程理论与实践,1995,15(1):28- 35.

[5] 许先云,杨永清.不确定AHP判断矩阵的一致性逼近与排序方法[J].系统工程理论与实践,1998,18(2):19- 22.

[6] 李炳军,刘思峰.一种基于区间数判断矩阵的群决策新方法[J].中国管理科学,2004,12(6):109- 112.

[7] 徐泽水,达庆利. 一种基于可能度的区间判断矩阵排序法[J]. 中国管理科学,2003,11(2):63- 65.

[8] 吴江.群组区间数互补判断矩阵偏好信息的一种集结方法[J].系统工程理论与方法应用,2004,13(6):500- 503.

[9] Xu Z. S.. On compatibility of interval fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(3): 217- 225.

[10] Tanino T.. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(1): 117- 131.

[11] Xu Z. S.. A Procedure for Decision Making Based on Incomplete Fuzzy Preference Relation[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2005, 4(3): 175- 189.

Research on Consistency and Priority of Interval Number Complementary Judgment Matrix

GONG Zai-wu, LIU Si-feng

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: There is few research on properties of interval number complementary judgment matrix in literatures at home and abroad, so the priority approach research is short of the base of corresponding theory. For the reason that the flaws are given above, this paper conducts the research on properties and priority of interval number complementary judgment matrix. On the grounds of the definition of interval number complementary judgment matrix, this paper proposes concepts of complete consistency, restricted max-max transitivity and weak transitivity for interval number complementary judgment matrix, studies their relations which show that these concepts of consistency for interval number complementary judgment matrix are in accord with the consistency of human thinking. Based on the consistent propriety, nonlinear programming methods for priorities of interval number complementary judgment matrix which is illustrated by a numerical number are set up.

Key words: interval number complementary judgment matrix; complete consistency; restricted max-max transitivity; priority