文章编号: 1000-6788(2012)12-2619-10 中图分类号: O211.6 文献标志码: A

常弹性方差模型下保险人的最优投资策略

荣喜民, 范立鑫

(天津大学 理学院, 天津 300072)

摘　要 假设风险资产价格服从常弹性方差 (CEV) 模型, 保险人面临的风险过程是带漂移的布朗运动. 投资过程与承保风险过程完全相关. 根据随机最优控制理论, 建立保险基金投资问题的 HJB 方程. 由于该方程是非线性偏微分方程, 不易求解, 因此采用 Legendre 变换将其转换成对偶问题进行研究. 最后针对特定参数值分别得到以 CARA 和 CRRA 效用函数为目标的保险人的最优投资策略, 这样的投资策略更符合金融市场的实际要求.

关键词 保险基金; CEV 模型; 效用函数; 随机控制理论; HJB 方程; Legendre 变换

Insurer's optimal investment strategy under constant elasticity of variance model

RONG Xi-min, FAN Li-xin

(School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract Research insurance funds investment based on constant elasticity of variance (CEV) model, consider a model which the risky asset is modeled by CEV model and the aggregate claims are modeled by a Brownian motion with drift. As employment of premium is different from ordinary, which means that the insurer should keep an eye on underwrite risk when he use insurance funds, assume that investment risk has a linear correlation with underwrite risk. According to stochastic control theory, derive the HJB equation related with insurance problem. This equation is non-linear partial differential equation, yet it is difficult to solve it, change primary problem to the dual problem by using Legendre transform. Through setting the parameter values, the optimal investment strategy for an insurer with CARA or CRRA utility function is presented and the relevant analysis is given, which provides important practical significance for an insurer to invest.

Keywords insurance fund; CEV model; utility function; stochastic optimal control; HJB equation; Legendre transform

1 引言

1.1 保险基金投资

随着保险业的发展, 保险规模的扩大, 通过收取保费聚集的保险基金不会一次性付出, 总是有一部分处于积累状态, 这部分积累资金的投资运作, 就派生出保险资金的融通功能. 自主地运用保险资金, 可以使保险业的经营效果与物质利益进一步挂钩, 促进保险业产生增加盈利的内在动因, 不断扩大保险愿望量. 保险基金投资通过增加盈利提高保险系统的经济实力, 从而降低保险系统的运营风险, 支持进一步扩大业务量. 这样一种良性循环使保险事业得以兴旺发达.

保险基金的投资不同于一般的资金运用, 有其特殊性, 它在考虑投资收益和投资风险的同时, 还要警惕来自背后的承保风险. 这就要求保险公司要能够在迅速满足保险赔付的前提下, 使资金达到最为合理的使用. 因此, 我国《保险法》规定: 保险公司的资金运用必须稳健, 遵循安全性原则, 以保证资金的保值增值. 目前很多国家也都建立了复杂的投资监管体系, 以约束保险公司对风险性资产的投资. 所以在保险投资的研究中,

收稿日期: 2010-08-27
资助项目: 天津市自然科学基金 (09JCYBLJC01800)
作者简介: 荣喜民 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向: 金融数学、金融工程; 范立鑫 (1985–), 女, 硕士研究生, 研究方向: 金融数学.

必须考虑承保风险的影响, 并且将所投资金分成风险投资与无风险投资, 兼顾资金的安全性与收益性. 目前, 保险基金的投资问题已成为保险精算的一个重要研究内容. 在许多发达国家里, 保险资金进行风险投资无论是在理论研究方面, 还是在实际运作中都已经有了很大的发展. 而我国保险基金进行风险投资的理论研究和实际操作还刚刚起步, 保险公司的法纪、法规、资金管理与运用、保费的确定与收取、损失的鉴定与赔偿等方面都还很不完善. 随着我国市场经济的不断完善和发展, 保险业的竞争也将更加激烈. 保险公司要在竞争中求生存, 除了加强管理和优质服务以外, 还必须对保险精算问题进行深入的研究, 以更加灵活、优化的手段进行风险投资. 本文试图将更符合市场实际要求的 CEV 模型引入保险基金投资的研究中, 得到保险人的最优投资策略.

1.2 研究现状

在认为风险资产 (如股票) 价格是连续变化的情形下, 很多学者运用随机控制方法及鞅方法对保险投资问题做了研究. Browne[1] 用连续的几何布朗运动模拟保险公司的盈余过程, 最早研究了 CARA 效用函数最大化以及破产概率最小化目标下的最优投资策略问题. Hipp 和 Taskar[2] 用复合 Poisson 模型模拟盈余过程, 得到以最小化破产概率为目标的保险人的最优投资策略. Hipp 和 Plum[3] 用经典的 Cramér-Lundberg 模型刻画保险盈余过程, 并假设保险基金仅投资于风险资产, 证明了在该模型下, 以最小化破产概率为目标的最优投资策略的存在性, 当赔付分布是指数分布时, 得到最优投资策略的显性表示. 随后, Liu 和 Yang[4] 对该模型进行了改进, 引入无风险资产, 得到不同赔付分布下以最大化生存概率为目标的保险人的最优投资策略的数值结果. Hipp 和 Schmidli[5] 指出, 如果保险人累积保费 (初始资金) 足够大, 当赔付过程是复合 Poisson 过程时, 使得破产概率最小的投资于风险资产的最优策略是一常数. Yang 和 Zhang[6] 将目标函数一般化, 假设赔付过程是跳跃 - 扩散过程, 用 HJB 方程研究了使保险人期望效用最大化的投资策略. Wang[7] 利用不同方法将其推广到赔付过程是一般的单增的纯跳跃过程, 由于效用函数是指数函数的特点, Wang 指出最优投资策略与赔付过程无关, 而这是不现实的. Wang 和 Xia 等 [8] 用鞅方法得到了与赔付过程有关的最优投资策略, 并求得其显性表达.

上述研究有一个共同特点, 即他们均假设风险资产价格服从几何布朗运动模型. 几何布朗运动模型假设风险资产价格的波动率为常数, 因此其不能很好地描绘实际市场引伸波幅的不对称性. 常方差弹性 (CEV) 模型是几何布朗运动的一个自然扩充,

与几何布朗运动模型相比, CEV 模型假设波动率弹性为常数, 考虑了风险资产价格的时间依赖性, 更符合金融市场的实际要求. CEV 模型最早由 Cox 和 Ross[9] 提出. 随后, CEV 模型被广泛应用于期权定价中. Cox[10] 在假设标的资产价格服从 CEV 模型的情况下研究了期权定价问题; Davydov 和 Linetsky[11] 对障碍期权和回望期权建立了 CEV 模型, 深入探究估价和套期保值; 吴云等 [12] 利用二叉树为股价服从 CEV 模型的几何亚式期权进行了定价; 秦洪元等 [13] 研究了 CEV 模型下有交易成本的期权定价, 得到期权价格的数值结果. 此外, 国内很多学者开始关注 CEV 模型在养老基金管理研究中的应用. 肖建武等 [14] 针对 CEV 模型, 在追求指数效用函数最大化的条件下, 研究了退休前和退休后两个阶段的最优投资决策; Gao[15] 在考虑 DC 年金合同下, 研究了在退休前和退休后两个阶段以 CARA 和 CRRA 效用函数为目标的最优投资策略. Gu 和 Yang[16] 等研究了 CEV 模型下再保险的最优投资策略. 但目前, CEV 模型还没有直接被引入保险基金的投资中. 本文试图在标的资产服从 CEV 模型的情况下研究保险人的最优投资策略, 这将更具有实际意义.

2 CEV 模型下保险人的最优投资策略

假设市场上仅有两种资产: 无风险资产和风险资产. 不失一般性, 设初始时刻为 0, 记无风险资产价格为 B_t, 满足如下方程:

$$\mathrm{d}B_t = r_0 B_t \mathrm{d}t \tag{1}$$

其中, r_0 表示无风险利率.

记风险资产价格为 S_t, 服从 CEV 模型, 即:

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + k S_t^{\gamma} \mathrm{d}W_t^{(1)} \tag{2}$$

其中, μ 表示风险资产的期望收益率, $\{W_t^{(1)}, t \geq 0\}$ 为定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的标准布朗运动, $k > 0$ 为常数, γ 是弹性因子, 且 $\gamma \leq 0$.

记 R_t 为承保部门面临的风险过程, 满足方程:

$$\mathrm{d}R_t = \alpha \mathrm{d}t + \beta \mathrm{d}W_t^{(2)} \tag{3}$$

其中, $\beta \geq 0$, α 表示承保部门的承保收益率, $\{W_t^{(2)}, t \geq 0\}$ 为定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的另一标准布朗运动. 由于保险基金的投资不同于一般的资金运用, 它在考虑投资收益和风险的同时, 还要警惕来自背后的承保风险. 故在保险基金投资的研究中, 必须考虑承保与投资间风险的相关性. 设 $E[W_t^{(1)}W_t^{(2)}] = \rho t$, ρ 表示风险的相关性. 本文仅就 $\rho = \pm 1$ 进行研究, 即假设承保风险与投资风险是完全正相关 $(\rho = 1)$ 或完全负相关 $(\rho = -1)$. 此时 $\rho^2 = 1$.

因此, 保险人的财富过程 V_t 为

$$\mathrm{d}V_t = \{V_t[\pi_t(\mu - r_0) + r_0] + \alpha\}\mathrm{d}t + V_t \pi_t k S_t^\gamma \mathrm{d}W_t^{(1)} + \beta \mathrm{d}W_t^{(2)} \tag{4}$$

其中, π_t 表示 t 时刻保险人的投资策略, 即其投资于风险资产的资金比例.

保险人的目标函数为 $\max_{\{\pi_t, 0 \leq t \leq T\}} E[u(V_T)]$, 其中, T 表示最终时刻, $u(\cdot)$ 表示效用函数. 我们的工作就是要找到使保险人最终财富期望效用最大化的最优投资策略 π^*.

本文采用随机控制方法求解上述模型, 记 $H(t,s,v) := \max_\pi E[u(V_T)|S_t = s, V_t = v], (t,s,v) \in [0,T] \times R_+ \times R_+$ 且 $s|_{t=0} = s_0, v|_{t=0} = v_0$, 则该最优化问题的 HJB 方程为

$$\begin{aligned} & H_t + \mu s H_s + (\alpha + v r_0) H_v + \frac{1}{2} k^2 s^{2+2\gamma} H_{ss} + \frac{1}{2} \beta^2 H_{vv} + \beta \rho s^{1+\gamma} H_{sv} k + \\ & \sup_\pi \left\{ \pi^2 \left(\frac{1}{2} H_{vv} v^2 k^2 s^{2\gamma} \right) + \pi [H_v v(\mu - r_0) + H_{vv} \beta v k s^\gamma \rho + H_{sv} k^2 v s^{1+2\gamma}] \right\} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

其中, $H_t, H_s, H_v, H_{ss}, H_{vv}, H_{sv}$ 表示函数 H 关于时间 t, 风险资产价格 s, 总财富 v 的一阶和二阶偏导数. 对

$$\pi^2 \left(\frac{1}{2} H_{vv} v^2 k^2 s^{2\gamma} \right) + \pi [H_v v(\mu - r_0) + H_{vv} \beta v k s^\gamma \rho + H_{sv} k^2 v s^{1+2\gamma}]$$

关于 π 求一阶偏导数, 可得最优投资策略 π^*,

$$\pi^* = -\frac{H_v(\mu - r_0) + H_{vv} \beta k s^\gamma \rho + H_{sv} k^2 s^{1+2\gamma}}{H_{vv} v k^2 s^{2\gamma}} \tag{6}$$

将其代回 (5) 式, 经整理得

$$H_t + \mu s H_s + (\alpha + v r_0) H_v + \frac{1}{2} k^2 s^{2+2\gamma} H_{ss} + \frac{1}{2} \beta^2 H_{vv} + \beta \rho k s^{1+\gamma} H_{sv} - \frac{[H_v(\mu - r_0) + H_{vv} \beta k s^\gamma \rho + H_{sv} k^2 s^{1+2\gamma}]^2}{2 H_{vv} k^2 s^{2\gamma}} = 0 \tag{7}$$

因此, 要得到最优投资策略 π^*, 只需求解 (7) 式. 注意到 (7) 式为非线性偏微分方程, 不易求解. 与 Josson 和 Sircar[17] 及 Gao[15] 相似, 对原函数 $H(t,s,v)$ 做 Legendre 变换, 记

$$\hat{H}(t,s,z) = \sup_{v>0} \{H(t,s,v) - zv | 0 < v < \infty\}, \quad g(t,s,z) = \inf_{v>0} \{v | H(t,s,v) \geq zv + \hat{H}(t,s,z)\}$$

故易知 $\hat{H}(t,s,z) = H(t,s,g) - zg$, 对 $\hat{H}(t,s,z)$ 求各阶偏导数, 有

$$H_t = \hat{H}_t, \quad H_s = \hat{H}_s, \quad \hat{H}_z = -g \tag{8}$$

又由于 $H_v = z$, 因此,

$$H_{vv} g_z = 1 \Rightarrow H_{vv} = -\frac{1}{\hat{H}_{zz}}, \quad H_{sv} = -\frac{\hat{H}_{sz}}{\hat{H}_{zz}}, \quad H_{ss} = \hat{H}_{ss} - \frac{\hat{H}_{sz}^2}{\hat{H}_{zz}} \tag{9}$$

将 (8), (9) 式代回 (7) 式, 整理得

$$\hat{H}_t + \mu s \hat{H}_s + (\alpha + g r_0) z + \frac{1}{2} k^2 s^{2+2\gamma} \hat{H}_{ss} - \frac{z^2(\mu - r_0)^2}{2k^2 s^{2\gamma}} \hat{H}_{zz} - \frac{z(\mu - r_0)\beta\rho}{k s^\gamma} - \hat{H}_{sz} s z(\mu - \gamma_0) = 0 \tag{10}$$

注意到 $\hat{H}_z = -g$, 对上式两边关于 t 求导, 有

$$g_t + r_0 s g_s - (\alpha + g r_0) + \frac{1}{2} k^2 s^{2+2\gamma} g_{ss} + \frac{z^2(\mu - r_0)^2}{2k^2 s^{2\gamma}} g_{zz} + \left[\frac{(\mu - r_0)^2}{k^2 s^{2\gamma}} - r_0 \right] z g_z - g_{sz} s z (\mu - r_0) + \frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k s^\gamma} = 0 \tag{11}$$

而最优投资策略可以表示为

$$\pi^* = \frac{g_s k^2 s^{1+2\gamma} - g_z z(\mu - r_0) - \beta \rho k s^\gamma}{v k^2 s^{2\gamma}} \tag{12}$$

其中, $\rho^2 = 1$. 故将对 (7) 的求解转化成对其对偶问题 (11) 的求解.

3 特殊效用函数下保险人的最优投资策略

3.1 CRRA 效用函数下保险人的最优投资策略

设保险人的效用函数 $u(\cdot)$ 为幂效用函数, 即 $u(v)=\frac{v^p}{p}$, $p<1$, $p\neq 0$, 易知 $g(T,s,z)=(u')^{-1}(z)$, 故边界条件为

$$g(T,s,z)=z^{\frac{1}{p-1}} \tag{13}$$

注意到 (11) 式中含有 $s^{2\gamma+2}, s^{-2\gamma}$, 故作变量代换, 设 (11) 式的解为

$$g(t,s,z)=z^{\frac{1}{p-1}}f(t,y)+h(t,y),\quad y=s^{-2\gamma} \tag{14}$$

将 (14) 式代入 (11) 式, 经整理得,

$$z^{\frac{1}{p-1}}\left\{f_t-2\gamma r_0 y f_y-r_0 f+k^2\gamma(2\gamma+1)f_y+2k^2\gamma^2 y f_{yy}+\frac{(2-p)(\mu-r_0)^2 y f}{2(p-1)^2k^2}+\frac{1}{p-1}\left[\frac{(\mu-r_0)^2 y}{k^2}-r_0\right]f\right.$$
$$\left.+\frac{2\gamma(\mu-r_0)yf_y}{p-1}\right\}+\left\{h_t+[k^2\gamma(2\gamma+1)-2\gamma r_0 y]h_y+2k^2\gamma^2 y h_{yy}-r_0 h+\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{k}\sqrt{y}-\alpha\right\}=0.$$

因上述方程对任意 z 均成立, 故有

$$f_t-2\gamma r_0 y f_y-r_0 f+k^2\gamma(2\gamma+1)f_y+2k^2\gamma^2 y f_{yy}+\frac{(2-p)(\mu-r_0)^2 y f}{2(p-1)^2k^2}+\frac{1}{p-1}\left[\frac{(\mu-r_0)^2 y}{k^2}-r_0\right]f+\frac{2\gamma(\mu-r_0)yf_y}{p-1}=0 \tag{15}$$

$$h_t+[k^2\gamma(2\gamma+1)-2\gamma r_0 y]h_y+2k^2\gamma^2 y h_{yy}-r_0 h+\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{k}\sqrt{y}-\alpha=0 \tag{16}$$

其中 $(t,y)\in[0,T]\times R^+$, $y|_{t=0}=s_0^{-2\gamma}$, 且由边界条件 (13) 知, $f(T,y)=1, h(T,y)=0$.

对于线性偏微分方程 (15), 设方程的解为

$$f(t,y)=A(t)\mathrm{e}^{B(t)y} \tag{17}$$

由 $f(T,y)=1$ 知 $A(T)=1$, $B(T)=0$.

将 (17) 式代入 (15) 式, 等式两边同除 $A(t)\mathrm{e}^{B(t)y}$, 整理得,

$$\left[\frac{A_t}{A(t)}+k^2\gamma(2\gamma+1)B(t)-\frac{r_0}{p-1}-r_0\right]+y\left\{B_t+\left[\frac{2\gamma(\mu-r_0)}{p-1}-2\gamma r_0\right]B(t)+2k^2\gamma^2B^2(t)+\frac{(\mu-r_0)^2p}{2(p-1)^2k^2}\right\}=0.$$

上述方程对任意 y 均成立, 故有

$$\frac{A_t}{A(t)}+k^2\gamma(2\gamma+1)B(t)-\frac{r_0}{p-1}-r_0=0 \tag{18}$$

$$B_t+\left[\frac{2\gamma(\mu-r_0)}{p-1}-2\gamma r_0\right]B(t)+2k^2\gamma^2B^2(t)+\frac{(\mu-r_0)^2p}{2(p-1)^2k^2}=0 \tag{19}$$

关于方程 (18),(19) 的求解, 见附录. 求得

$$B(t)=k^{-2}I(t) \tag{20}$$

$$A(t)=\mathrm{e}^{[\lambda_1\gamma(2\gamma+1)+\frac{r_0p}{1-p}](T-t)}\left\{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}\right\}^{\frac{2\gamma+1}{2\gamma}} \tag{21}$$

其中 $I(t)=\frac{\lambda_1-\lambda_1\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}$, $\lambda_{1,2}=\frac{(\mu-pr_0)\pm\sqrt{(1-p)(\mu^2-r_0^2p)}}{2\gamma(1-p)}$.

为便于后面讨论, 记

$$K(t)=1-\frac{2\gamma(1-p)I(t)}{\mu-r_0},\quad K_1(t)=1+\frac{2(1-p)I(t)}{\mu-r_0},\quad d(t)=-\alpha\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}}{r_0}\right].$$

本文仅就 $\beta=0$ 或 $\gamma=-1$ 的情况进行研究.

定理 1 假设保险人的效用函数为 CRRA, 若无风险资产价格、风险资产价格、赔付过程, 分别服从 (1),(2),(3) 式, 则保险人期望效用最大的最优投资策略为:

1) 当 $\beta=0$ 时,

$$\pi^*=\frac{\mu-r_0}{(1-p)k^2s^{2\gamma}}\left(1-\frac{d(t)}{v}\right)K(t) \tag{22}$$

2) 当 $\gamma=-1$ 时, CEV 模型为绝对扩散模型, 最优投资策略

$$\pi^*=\frac{\mu-r_0}{(1-p)k^2s^{-2}}\left(1-\frac{d(t)}{v}\right)K_1(t)-\frac{[2I(t)s^3+(\frac{\mu-r_0}{1-p}-k^2)s](\mu-r_0)\beta(t-T)+\beta\rho k^2 s}{vk^3} \tag{23}$$

证明 1) 当 $\beta=0$ 时, (16) 式变为

$$h_t+[k^2\gamma(2\gamma+1)-2\gamma r_0y]h_y+2k^2\gamma^2yh_{yy}-r_0h-\alpha=0 \tag{24}$$

设上述方程的解为

$$h(t,y)=m(t) \tag{25}$$

将其代入 (24), 得 $m_t-r_0m(t)-\alpha=0$. 由边界条件 $h(T,y)=m(T)=0$, 易得 $m(t)=-\alpha[\frac{1-\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}}{r_0}]=d(t)$.

因此, 由 (12) 式, 可知保险人的最优投资策略:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{g_sk^2s^{1+2\gamma}-g_zz(\mu-r_0)}{vk^2s^{2\gamma}}=\frac{k^2s^{1+2\gamma}(-2\gamma s^{-2\gamma-1}f_yz^{\frac{1}{p-1}})-z(\mu-r_0)\frac{f}{(p-1)z}z^{\frac{1}{p-1}}}{vk^2s^{2\gamma}}\\ &= \frac{-2\gamma k^2B(t)(g(t,s,z)-m(t))+\frac{\mu-r_0}{1-p}(g(t,s,z)-m(t))}{vk^2s^{2\gamma}}\\ &= \frac{\mu-r_0}{(1-p)k^2s^{2\gamma}}\left(1-\frac{m(t)}{v}\right)\left(1-\frac{2\gamma(1-p)I(t)}{\mu-r_0}\right)=\frac{\mu-r_0}{(1-p)k^2s^{2\gamma}}\left(1-\frac{d(t)}{v}\right)K(t).\end{aligned}$$

注意到上述最优投资策略与 Gao[15] 中, 在 CRRA 效用函数下, 退休前年金最优投资策略类似.

2) 当 $\gamma=-1$ 时, (16) 式变为

$$h_t+[k^2+2r_0y]h_y+2k^2yh_{yy}-r_0h+\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{k}\sqrt{y}-\alpha=0 \tag{26}$$

设上述方程的解为

$$h(t,y)=e(t)+\sqrt{y}n(t) \tag{27}$$

将 (27) 代入 (26) 式, 经整理得

$$(e_t-r_0e(t)-\alpha)+\sqrt{y}\left[n_t+\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{k}\right]=0.$$

由于上述方程对任意 y 均成立, 故

$$e_t-r_0e(t)-\alpha=0 \tag{28}$$

$$n_t+\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{k}=0 \tag{29}$$

由边界条件 $e(T)=0,n(T)=0$, 易得

$$e(t)=-\alpha\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-r_0(T-t)}}{r_0}\right]=d(t),\quad n(t)=-\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{k}(t-T) \tag{30}$$

因此, 由 (12) 式, 可知保险人的最优投资策略:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{g_sk^2s^{1+2\gamma}-g_zz(\mu-r_0)-\beta\rho ks^{\gamma}}{vk^2s^{2\gamma}}\\ &= \frac{k^2s^{-1}[2sB(t)(g(t,s,z)-h(t,y))+sy^{-\frac{1}{2}}n(t)]-z(\mu-r_0)\frac{g(t,s,z)-h(t,y)}{(p-1)z}-\beta\rho ks^{-1}}{vk^2s^{-2}}\\ &= \frac{k^2s^{-1}[2sB(t)(g(t,s,z)-e(t)-sn(t))+n(t)]-(\mu-r_0)\frac{g(t,s,z)-e(t)-sn(t)}{(p-1)}-\beta\rho ks^{-1}}{vk^2s^{-2}}\\ &= \frac{2k^2B(t)(g(t,s,z)-e(t))+\frac{1}{1-p}(g(t,s,z)-e(t))}{vk^2s^{-2}}-\frac{[2I(t)s^3+(\frac{\mu-r_0}{1-p}-k^2)s]n(t)+\beta\rho ks}{vk^2}\\ &= \frac{(\mu-r_0)s^2}{(1-p)k^2}(1-\frac{d(t)}{v})K_1(t)-\frac{[2I(t)s^3+(\frac{\mu-r_0}{1-p}-k^2)s]n(t)+\beta\rho ks}{vk^2}.\end{aligned}$$

将 $n(t)$ 代入, 命题即得证.

注意到, 当 $\beta=0$ 时, 若 $\gamma=0$, 则 CEV 模型退化成传统的几何布朗运动模型, 由文献 [18] 知, 保险人的最优投资策略为

$$\pi^*=\left(1-\frac{d(t)}{v}\right)\frac{\mu-r_0}{(1-p)\sigma^2} \tag{31}$$

其中, σ 表示常数波动率. 与 (22) 式比较, 有如下推论:

推论 1 对 $\beta=0$, 保险人的最优投资策略 π^*, 有

1) 当保险人的风险厌恶程度 $p<0$ 时, CEV 模型下保险人投资于风险资产的比例小于几何布朗运动模型下保险人的投资比例.

2) 当保险人的风险厌恶程度 $0<p<1$ 时, CEV 模型下保险人投资于风险资产的比例大于几何布朗运动模型下保险人的投资比例, 且该投资比例随时间的增加而减小, 即随着时间的流逝, 保险人会逐步减少风险资产上的投资比例.

证明 1) 当 $p<0$ 时, 由于 $\lambda_{1,2}=\frac{(\mu-pr_0)\pm\sqrt{(1-p)(\mu^2-r_0^2p)}}{2\gamma(1-p)}$, 则

$$\lambda_1-\lambda_2=\frac{\sqrt{(1-p)(\mu^2-r_0^2p)}}{\gamma(1-p)}<0,\quad \lambda_1\lambda_2=\frac{p(\mu-r_0p)^2}{4\gamma^2(1-p)^2}<0,$$

故 $\lambda_1<0$, 且

$$I'(t)=\frac{2\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})\gamma^2\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}{(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)})^2},$$

则 $I'(t)>0$, 而 $I(T)=0$, 因此, $I(t)\le 0, K(t)\le 1$, 故由 (22) 和 (31) 式, 即知 CEV 模型下保险人投资于风险资产的比例较小.

2) 当 $0<p<1$ 时, 同理, 可得 $\lambda_1-\lambda_2<0, \lambda_1\lambda_2>0$, 故 $\lambda_1>0, I'(t)<0$, 由 $I(T)=0$, 即得 $I(t)>0, K(t)\ge 1$, 此时, CEV 模型下保险人投资于风险资产的比例较大. 此外, 由于

$$\frac{\partial\pi^*}{\partial t}=\frac{\mu-r_0}{(1-p)k^2s^{2\gamma}}\left[K'(t)(1-\frac{d(t)}{v})-K(t)\frac{d'(t)}{v}\right],$$

其中 $d'(t)=\alpha\mathrm{e}^{r_0(t-T)}>0$, 且 $K'(t)=\frac{2\gamma(p-1)I'(t)}{\mu-r_0}<0$.

故易知上式小于 0, 这就是说, 保险人投资于风险资产的比例随时间 t 的增大而减小.

推论 2 对于 $\gamma=-1$ 的情形, 考虑了保险人的承保风险, 则关于保险人的最优投资策略 π^*, 有

1) 当保险人的风险厌恶程度 $p<\min\{0,1-\frac{\mu-r_0}{k^2}\}$ 且 $\rho=-1$ 时, 相对于 $\beta=0$ 的情形, 考虑了承保风险后, 保险人投资于风险资产的比例增加了.

2) 当保险人的风险厌恶程度 $0<p<1$ 时, 若 $s^2\ge\frac{k^2-\frac{\mu-r_0}{1-p}}{2I(t)}$, 则保险人投资于风险资产的资金比例随着时间 t 的增大而逐步减小.

证明 1) 当 $p<\min\{0,1-\frac{\mu-r_0}{k^2}\}$ 且 $\rho=-1$ 时, 结合 (22), (23) 式, 即可得证.

2) 当 $0<p<1$ 时, 由推论 1 中 2) 的证明, 可知

$$\mathrm{d}\left[\frac{\mu-r_0}{(1-p)k^2s^{-2}}\left(1-\frac{d(t)}{v}\right)K_1(t)\right]\Big/\mathrm{d}t<0,$$

而

$$\begin{aligned}&\partial\left[\frac{[2I(t)s^3+(\frac{\mu-r_0}{1-p}-k^2)s](\mu-r_0)\beta(t-T)+\beta\rho k^2s}{vk^3}\right]\Big/\partial t\\ =&\ \frac{1}{vk^3}\left\{2I'(t)s^3(\mu-r_0)\beta(t-T)+\left[2I(t)s^3+\left(\frac{\mu-r_0}{1-p}-k^2\right)s\right](\mu-r_0)\beta\right\},\end{aligned}$$

其中, $I'(t)<0, s^2\ge\frac{k^2-\frac{\mu-r_0}{1-p}}{2I(t)}$, 故上式 ≥ 0, 因此, $\frac{\partial\pi^*}{\partial t}<0$, 即表示随着时间的推移, 保险人投资于风险资产的比例逐步减小.

3.2 CARA 效用函数下保险人的最优投资策略

设保险人的效用函数为指数效用函数, 即 $u(v)=-\frac{1}{q}\mathrm{e}^{-qv}$, $q>0$.

值得一提的是, 这个效用函数的绝对风险厌恶程度为常数, 它在保险学中占有重要地位, 这是因为在零效用原则下, 它是唯一一个效用函数, 可以使保费制定与公司初始资金无关.

同样, 边界条件 $g(T,s,z)=-\frac{1}{q}\ln z$, 据此设 (11) 式的解为

$$g(t,s,z)=-\frac{1}{q}b(t)(\ln z+m(t,s))+a(t) \tag{32}$$

由边界条件, 易知 $b(T)=1, m(T,s)=0, a(T)=0$. 将 (32) 代入 (11) 式, 经整理得

$$\begin{aligned}-\frac{1}{q}\ln z(b'(t)-r_0b(t))+(a_t-\alpha-r_0a(t))-\frac{1}{q}b(t)\Big[&m_t+r_0sm_s-r_0m+\frac{1}{2}k^2s^{2+2\gamma}m_{ss}+\frac{(\mu-r_0)^2}{2k^2s^{2\gamma}}\\ &-r_0+\frac{b_t}{b(t)}m(t,s)-\frac{1}{b(t)}\frac{(\mu-r_0)\beta\rho}{ks^{\gamma}}\Big]=0,\end{aligned}$$

同样有

$$b'(t) - r_0 b(t) = 0 \tag{33}$$

$$a_t - \alpha - r_0 a(t) = 0 \tag{34}$$

$$m_t + r_0 s m_s - r_0 m + \frac{1}{2}k^2 s^{2+2\gamma} m_{ss} + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2 s^{2\gamma}} - r_0 + \frac{b_t}{b(t)} m(t,s) - \frac{1}{b(t)} \frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k s^\gamma} = 0 \tag{35}$$

对 (33) 式, 结合边界条件 $b(T) = 1$, 得

$$b(t) = \mathrm{e}^{r_0(t-T)} \tag{36}$$

同样, 由 (34) 式, 边界条件 $a(T) = 0$, 得

$$a(t) = -\alpha \left[\frac{1 - \mathrm{e}^{-r_0(T-t)}}{r_0}\right] \tag{37}$$

将 (36) 代入 (35) 式, 经整理得

$$m_t + r_0 s m_s + \frac{1}{2}k^2 s^{2+2\gamma} m_{ss} + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2 s^{2\gamma}} - r_0 - \mathrm{e}^{r_0(T-t)} \frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k s^\gamma} = 0 \tag{38}$$

注意到上式中含有 $s^{2+2\gamma}, s^{-2\gamma}$, 故作变量代换,

$$m(t,s) = J(t,y), \quad y = s^{-2\gamma}.$$

将上式代回 (38) 式, 经整理得

$$J_t + [k^2\gamma(2\gamma+1) - 2\gamma r_0 y] J_y + 2k^2\gamma^2 y J_{yy} + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2} y - r_0 - \mathrm{e}^{r_0(T-t)} \frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k} \sqrt{y} = 0 \tag{39}$$

为了便于后面的讨论, 记

$$K(t) = 1 + \frac{\mu - r_0}{2r_0}(1 - \mathrm{e}^{2\gamma r_0(t-T)}), \quad K_1(t) = 1 + \frac{\mu - r_0}{2r_0}(1 - \mathrm{e}^{2r_0(T-t)}).$$

本文仅就 $\beta = 0$ 或 $\gamma = -1$ 的情况进行研究.

定理 2 假设保险人的效用函数是 CARA, 若无风险资产价格、风险资产价格、赔付过程, 分别服从 (1), (2), (3) 式, 则保险人期望效用最大的最优投资策略为:

1) 当 $\beta = 0$ 时, 最优投资策略

$$\pi^* = \frac{b(t)(\mu - r_0)}{qvk^2 s^{2\gamma}} \widetilde{K}(t) \tag{40}$$

其中, $b(t)$ 为 (36) 式.

2) 当 $\gamma = -1$ 时, CEV 模型为绝对扩散模型, 最优投资策略

$$\pi^* = \frac{b(t)s^2(\mu - r_0)}{qvk^2} \widetilde{K}_1(t) - \frac{s\beta(\mu - r_0)(T-t)}{qvk} - \frac{\beta\rho s}{vk} \tag{41}$$

证明 当 $\beta = 0$ 时, (39) 式变为

$$J_t + [k^2\gamma(2\gamma+1) - 2\gamma r_0 y] J_y + 2k^2\gamma^2 y J_{yy} - \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2} y - r_0 = 0 \tag{42}$$

设上述方程的解为

$$J(t,y) = w(t) + z(t) y \tag{43}$$

则 $J_t = w_t + z_t y, J_y = z(t), J_{yy} = 0$, 将其代入 (42) 式, 经整理得

$$[w_t + k^2\gamma(2\gamma+1) z(t) - r_0] + y\left[z_t - 2\gamma r_0 z(t) + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2}\right] = 0 \tag{44}$$

因上述方程对任意 y 均成立, 因此

$$w_t + k^2\gamma(2\gamma+1) z(t) - r_0 = 0, \quad z_t - 2\gamma r_0 z(t) + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2} = 0 \tag{45}$$

因而, 易得

$$z(t) = \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2}\left[\frac{1 - \mathrm{e}^{2\gamma r_0(t-T)}}{2\gamma r_0}\right] \tag{46}$$

将其代入 (45) 式, 等式两边积分, 由边界条件 $w(T) = 0$, 即得

$$w(t) = \left[\frac{(2\gamma+1)(\mu - r_0)^2}{4r_0} - r_0\right](T-t) - \frac{(2\gamma+1)(\mu - r_0)^2}{8\gamma r_0^2}(1 - \mathrm{e}^{2\gamma r_0(t-T)}) \tag{47}$$

则由 (12) 式, 保险人的最优投资策略:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{g_s k^2 s^{1+2\gamma} - g_z z(\mu - r_0)}{vk^2 s^{2\gamma}} = \frac{-\frac{k^2}{q}b(t)m_s s^{1+2\gamma} + \frac{1}{q}b(t)(\mu - r_0)}{vk^2 s^{2\gamma}} = \frac{b(t)}{qvk^2 s^{2\gamma}}[(\mu - r_0) + 2\gamma k^2 J_y] \\ &= \frac{b(t)(\mu - r_0)}{qvk^2 s^{2\gamma}}\left[1 + \frac{2\gamma k^2}{\mu - r_0}z(t)\right] = \frac{b(t)(\mu - r_0)}{qvk^2 s^{2\gamma}}K(t).\end{aligned}$$

注意到上述最优投资策略与 Gao[15] 中, 在 CRRA 效用函数下, 退休前年金最优投资策略类似.

2) 当 $\gamma = -1$ 时, (39) 式变为

$$J_t + [k^2 + 2r_0 y]J_y + 2k^2 y J_{yy} + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2}y - r_0 - \mathrm{e}^{r_0(T-t)}\frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k}\sqrt{y} = 0 \tag{48}$$

设上述方程的解为

$$J(t, y) = c(t) + i(t)y + x(t)y \tag{49}$$

则边界条件为 $c(T) = 0, i(T) = 0, x(T) = 0$, 且

$$J_t = c_t + \sqrt{y}i_t + x_t y, \quad J_y = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}i(t) + x(t), \quad J_{yy} = -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}}i(t).$$

将其代入 (48) 式, 经整理得,

$$[c_t + k^2 x(t) - r_0] + \sqrt{y}\left(i_t + r_0 i(t) - \mathrm{e}^{r_0(T-t)}\frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k}\right) + y\left[x_t + 2r_0 x(t) + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2}\right] = 0.$$

因上述方程对任意 y 成立, 故

$$c_t + k^2 x(t) - r_0 = 0 \tag{50}$$

$$i_t + r_0 i(t) - \mathrm{e}^{r_0(T-t)}\frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k} = 0 \tag{51}$$

$$x_t + 2r_0 x(t) + \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2} = 0 \tag{52}$$

由 (52) 式及边界条件 $x(T) = 0$, 得

$$x(t) = \frac{(\mu - r_0)^2}{2k^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{2r_0(T-t)} - 1}{2r_0}\right] \tag{53}$$

将上式代入 (50), 等式两边积分, 由边界条件 $c(T) = 0$, 得

$$c(t) = \left[\frac{(\mu - r_0)^2}{4r_0} + r_0\right](t - T) - \frac{(\mu - r_0)^2}{8r_0^2}(1 - \mathrm{e}^{2r_0(T-t)}) \tag{54}$$

对于方程 (51), 设其解为 $i(t) = i(t)\mathrm{e}^{r_0(T-t)}$, 将其代入方程 (51), 得

$$i(t) = \frac{(\mu - r_0)\beta}{k}(T - t),$$

故

$$i(t) = -\frac{(\mu - r_0)\beta\rho}{k}(T - t)\mathrm{e}^{r_0(T-t)} \tag{55}$$

则由 (12) 式, 可知最优投资策略:

$$\begin{aligned}\pi^* &= \frac{g_s k^2 s^{-1} - g_z z(\mu - r_0) - \beta\rho k s^{-1}}{vk^2 s^{-2}} = \frac{-\frac{k^2 s^{-1}}{q}b(t)m_s + \frac{1}{q}b(t)(\mu - r_0) - \beta\rho k s^{-1}}{vk^2 s^{-2}} \\ &= \frac{-\frac{k^2 s^{-1}}{q}b(t)(2sJ_y) + \frac{1}{q}b(t)(\mu - r_0) - \beta\rho k s^{-1}}{vk^2 s^{-2}} = \frac{-\frac{2k^2}{q}b(t)[\frac{1}{2}s^{-1}i(t) + x(t)] + \frac{1}{q}b(t)(\mu - r_0) - \beta\rho k s^{-1}}{vk^2 s^{-2}} \\ &= \frac{b(t)(\mu - r_0)}{qvk^2 s^{-2}}\left(1 - \frac{2k^2}{(\mu - r_0)}x(t)\right) - \frac{b(t)si(t)}{qv} - \frac{\beta\rho s}{vk} = \frac{b(t)s^2(\mu - r_0)}{qvk^2}K_1(t) - \frac{s\beta(\mu - r_0)(T - t)}{qvk} - \frac{\beta\rho s}{vk}.\end{aligned}$$

注意到, 当 $\beta = 0$ 时, 若 $\gamma = 0$, CEV 模型退化成传统的几何布朗运动模型, 由 Devolder[18] 知, 保险人的最优投资策略为

$$\pi^* = \frac{(\mu - r_0)}{qv\sigma^2}\mathrm{e}^{r_0(t-T)} \tag{56}$$

其中, σ 表示常数波动率. 与 (40) 式比较, 有如下推论:

推论 3 对于 $\beta = 0$ 的情形, 关于保险人的最优投资策略 π^*, 有

1) CEV 模型下保险人投资于风险资产的比例小于几何布朗运动模型下保险人的投资比例.

2) 若 $\gamma < -\frac{1}{2}$, 则保险人投资于风险资产的比例随时间的增加而增加, 即随着时间的流逝, 保险人会逐步增加风险资产上的投资比例.

证明 1) 由 (40) 和 (56) 式, 可知, 要证明结论, 仅需比较 $K(t)$ 的大小, 显然, $K(t) \le 1$, 故命题得证.

2) 由 (40) 式, 当 $\gamma < -\frac{1}{2}$ 时, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi^*}{\partial t} &= K'(t)\frac{(\mu-r_0)}{qvk^2s^{2\gamma}}\mathrm{e}^{r_0(t-T)} + r_0K(t)\frac{(\mu-r_0)}{qvk^2s^{2\gamma}}\mathrm{e}^{r_0(t-T)} = \frac{(\mu-r_0)}{qvk^2s^{2\gamma}}\mathrm{e}^{r_0(t-T)}(K'(t)+r_0K(t))\\ &= \frac{(\mu-r_0)}{qvk^2s^{2\gamma}}\mathrm{e}^{r_0(t-T)}\left[\left(-\gamma-\frac{1}{2}\right)(\mu-r_0)\mathrm{e}^{2\gamma r_0(t-T)} + \frac{\mu+r_0}{2}\right] > 0.\end{aligned}$$

因此, 保险人投资于风险资产的比例会随着时间 t 的增加而逐渐增大.

推论 4 对于 $\gamma = -1$ 的情形, 随着时间的推移, 保险人投资于风险资产的资金比例逐步增大.

证明 由推论 3 中 2) 的证明, 知 $\frac{b(t)s^2(\mu-r_0)}{qvk^2}K_1(t)$ 关于 t 的导数大于 0, $\frac{\partial \pi^*}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}[\frac{b(t)s^2(\mu-r_0)}{qvk^2}K_1(t)]}{\mathrm{d}t} + \frac{s\beta(\mu-r_0)}{qvk} > 0$, 故保险人投资于风险资产的资金比例随时间 t 的增加而增加.

4 结束语

假设市场上仅存在两种资产: 风险资产和无风险资产. 风险资产价格服从 CEV 模型, 保险人的风险过程服从带漂移的布朗运动, 两者之间存在相关性, 以期望效用最大化为目标建立保险基金投资的模型. 采用随机控制的方法对上述模型求解. 根据最优性原理, 建立保险投资问题的 HJB 方程. 采用 Legendre 变换将原问题转化成其对偶问题求解. 最后, 对特定的 β, γ 等参数的值, 分别得到了以 CRRA 和 CARA 效用函数为目标的保险人的最优投资策略. 同时, 也对最优投资策略进行了简单的分析, 这对保险人运用保险基金投资具有积极的指导作用.

本文只是对 CEV 模型下保险基金的投资问题进行了初步地探究, 还有些问题有待进一步解决, 如多个服从 CEV 模型的资产的投资等, 今后将进一步深入研究.

参考文献

[1] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20: 937–958.

[2] Hipp C, Taskar M. Stochastic control for optimal new business[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 26: 185–192.

[3] Hipp C, Plum M. Optimal investment for insurers[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27: 215–228.

[4] Liu C S, Yang H. Optimal investment for an insurer to minimize its probalitity of ruin[J]. North American Actuarial Journal, 2004, 8: 11–31.

[5] Hipp C, Schmidli H. Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2004, 5: 321–335.

[6] Yang H, Zhang L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37: 615–634.

[7] Wang N. Optimal investment for an insurer with exponential utility preference[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40: 77–84.

[8] Wang Z W, Xia J M, Zhang L H. Optimal investment for an insurer: The martingale approach[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40: 322–334.

[9] Cox J C, Ross S A. The valuation of options for alternative stochastic processes[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 4: 145–166.

[10] Cox J C. The constant elasticity of variance option pricing model[J]. The Journal of Portfolio Management, 1996, 22: 16–17.

[11] Davydov D, Linetsky V. The valuation and hedging of barrier and lookback option under the CEV process[J]. Management Science, 2001, 47: 949–965.

[12] 吴云, 何建敏. 服从 CEV 的几何亚式期权的定价研究 [J], 系统工程理论与实践, 2003, 23(4): 32–36.
Wu Y, He J M. Study on the solution of geometric asian option pricing model under the CEV process[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2003, 23(4): 32–36.

[13] 秦洪元, 郑振龙. CEV 模型下有交易成本的期权定价 [J]. 南方经济, 2007, 9: 38–45.
Qin H Y, Zheng Z L. Option pricing with transaction costs under CEV model[J]. South China Journal of

Economics, 2007, 9: 38–45.

[14] 肖建武, 尹少华, 秦成林. 养老基金投资组合的常方差弹性 (CEV) 模型和解析决策 [J]. 应用数学和力学, 2006, 27: 1312–1318.
Xiao J W, Yin S H, Qin C L. Constant elasticity of variance (CEV) model and analytical strategies for annuity contracts[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27: 1312–1318.

[15] Gao J. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45: 9–18.

[16] Gu M, Yang Y, Li S. Constant elasticity of variance model for proportional reinsurance and investment strategies[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, 46: 580–587.

[17] Jonsson M, Sircar R. Optimal investment problems and volatility homogenization approximations[J]. Modern Methods in Scientific Computing and Applications NATO Science Series, 2002, 75: 255–281.

[18] Devolder P, Princep M B, Fabian I D. Stochastic optimal control of annuity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33: 227–238.

附录

关于方程 (18)、(19) 的求解. 为方便计算, 记

$$a=-2\gamma^2,\quad b=2\gamma r_0-\frac{2\gamma(\mu-r_0)}{p-1}=\frac{2\gamma(pr_0-\mu)}{p-1},\quad c=-\frac{p(\mu-r_0)^2}{2(1-p)^2},$$

则 (19) 式可表示为

$$B_t=k^2aB^2(t)+bB(t)+\frac{c}{k^2},\quad B(T)=0,$$

两边积分, 得

$$t+C=\int\frac{1}{k^2aB^2(t)+bB(t)+\frac{c}{k^2}}\mathrm{d}B(t)=\frac{1}{ak^2(m_1-m_2)}\int\left(\frac{1}{B(t)-m_1}-\frac{1}{B(t)-m_2}\right)\mathrm{d}B(t),$$

其中, C 为常数, m_1,m_2 为方程 $ak^2x^2+bx+\frac{c}{k^2}=0$ 的根, 即 $m_{1,2}=\frac{(\mu-pr_0)\pm\sqrt{(1-p)(\mu^2-r_0^2p)}}{2\gamma k^2(1-p)}$.

故

$$B(t)=\frac{m_1-m_2\mathrm{e}^{ak^2(m_1-m_2)(t+c)}}{1-\mathrm{e}^{ak^2(m_1-m_2)(t+c)}}.$$

由 $B(T)=0$ 知 $\mathrm{e}^C=\frac{m_1}{m_2}\mathrm{e}^{-ak^2(m_1-m_2)T}$, 代回上式, 经整理得,

$$B(t)=\frac{m_1-m_1\mathrm{e}^{ak^2(m_1-m_2)(t-T)}}{1-\frac{m_1}{m_2}\mathrm{e}^{ak^2(m_1-m_2)(t-T)}},$$

为方便计算, 记 $\lambda_1=k^2m_1$, $\lambda_2=k^2m_2$,

$$B(t)=k^{-2}\frac{\lambda_1-\lambda_1\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}=k^{-2}I(t),$$

故 (18) 式可表示为

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{A(t)}=\frac{r_0p}{p-1}t-\gamma(2\gamma+1)I(t),$$

对上式两边积分, 得

$$\int\frac{\mathrm{d}A(t)}{A(t)}=\frac{r_0p}{p-1}\mathrm{d}t-\gamma(2\gamma+1)\int I(t)\mathrm{d}t,$$

因

$$\int I(t)\mathrm{d}t=\lambda_1t+\frac{1}{2\gamma^2}\ln(\lambda_2-\lambda_1\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)})+C_1,$$

其中, C_1 是常数, 故

$$A(t)=\exp\left\{\left[\frac{r_0p}{p-1}-\lambda_1\gamma(2\gamma+1)\right]t\right\}[\lambda_2-\lambda_1\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}]^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}\mathrm{e}^{C_1}.$$

由边界条件, $A(T)=1$, 得

$$\mathrm{e}^{C_1}=\exp\left\{-\left[\frac{r_0p}{p-1}-\lambda_1\gamma(2\gamma+1)\right]T\right\}(\lambda_2-\lambda_1)^{-\frac{2\gamma}{2\gamma+1}},$$

因而

$$A(t)=\mathrm{e}^{[\lambda_1\gamma(2\gamma+1)+\frac{r_0p}{1-p}](T-t)}\left\{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1\mathrm{e}^{2\gamma^2(\lambda_1-\lambda_2)(T-t)}}\right\}^{\frac{2\gamma+1}{2\gamma}}.$$