第 32 卷第 12 期　　系统工程理论与实践　　Vol.32, No.12
2012 年 12 月　　Systems Engineering — Theory & Practice　　Dec., 2012

文章编号: 1000-6788(2012)12-2611-08　　中图分类号: F810.5　　文献标志码: A

信用债券的最优投资策略

卞世博[1], 刘海龙[2], 张晓阳[3]

(1. 上海立信会计学院 风险管理研究院, 上海 201620; 2. 上海交通大学 安泰经济与管理学院, 上海 200052;
3. 中国工商银行 资产管理部, 北京 100140)

摘　要 研究了一个代表性投资者投资于信用债券、股票以及银行存款的最优配置问题. 利用简约化模型对信用债券进行定价, 并给出其价格的动态过程, 通过鞅方法给出了此优化问题的解析解. 结果表明: 只有当信用债券的跳跃风险溢价大于 1, 即市场对跳跃风险进行风险补偿时, 投资者才会持有信用债券; 否则, 投资者对信用债券的最优投资为零.

关键词 信用债券; 简约化模型; 跳跃风险; 最优投资; 鞅方法

Optimal investment strategies for defaultable bond

BIAN Shi-bo[1], LIU Hai-long[2], ZHANG Xiao-yang[3]

(1. Risk Management Research Institute, Shanghai Lixin University of Commerce, Shanghai 201620, China;
2. Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200052, China;
3. Department of Asset Management, ICBC, Beijing 100140, China)

Abstract The problem of a representative investor how to optimally allocate her wealth among the following securities: A defaultable bond, a stock and a bank account was researched. Modeled the defaultable bond price through the reduced-form model and solved the dynamics of its price. Using martingale approach, obtained a closed-form solution to this optimal problem. From the solution it is clear that for a jump-risk premium greater than one, namely the market pricing the jump risk in the defaultable bond, the investor optimally invests a positive amount in the defaultable bond. On the other hand, the investor optimally invests nothing in the defaultable bond.

Keywords defaultable bond; reduced-form model; jump risk; optimal investment; martingale approach

1 引言

近年来, 随着我国资本市场的不断发展和完善, 越来越多的经济主体通过发债来解决自身的融资问题, 信用债券市场得到了迅猛的发展. 截至 2009 年底, 信用债券的市场规模已超过 3 万亿. 信用债券是指除国债、央行票据以外的非国家信用债券投资品种, 包括政府机构债、政策性金融机构金融债、公司债、企业债等. 由于信用债券并不是以国家信用作为担保, 因而存在一定的违约风险, 收益率同国债相比相对较高, 但投资风险同股票相比还是相对较低. 在投资组合中加入信用债券可以拓展投资者的风险收益前沿, 进一步分散投资风险, 提高投资者的经济福利. 信用债券正逐渐受到众多投资者的青睐.

目前, 关于信用债券的理论研究主要集中在定价领域, 很少有文献涉及信用债券最优投资策略的研究, 仅有少数国外学者对此问题进行了一些探索性的研究. 国内学者对此问题尚未展开研究.

Korn 和 Kraft[1]、Kraft 和 Steffensen[2] 率先研究了信用债券的最优投资问题, 他们采用 Merton[3] 的结构化模型对信用债券进行定价, 以弹性和久期作为控制变量, 通过求解 HJB 方程, 得到了最优投资策略. 结构化模型存在一个缺点, 即信用债券的定价建立在公司价值已知的基础上, 而一般投资者往往观测不到公司价值, 使得模型中的参数往往很难用实际数据进行估计. 因而, 在此框架下得到的投资策略缺乏实用性.

针对结构化模型对信用债券定价的不足, 学者们开始在 Jarrow 和 Turnbull[4] 的简约化模型框架下, 研究信用风险对最优资产组合的影响. Walder[5] 研究了随机利率下, 投资者如何对国债和信用债券进行最优配

收稿日期: 2010-08-08
资助项目: 国家自然科学基金 (71273169); 上海市教委科研创新项目 (12YS154)
作者简介: 卞世博, 助理研究员, 博士, E-mail: bsb@lixin.edu.cn; 刘海龙, 教授, 博士生导师.

置, 利用 Malliavin 微分和蒙特卡洛模拟, 求解出投资者的最优投资策略. Hou 和 Jin[6]、Hou[7] 分别研究了固定利率和随机利率情况下, 投资者如何对股票、银行存款和信用债券进行最优配置, 并通过随机控制的方法求出了最优投资策略的解析解.

为了模型的简便, 在 Walder[5]、Hou 和 Jin[6] 以及 Hou[7] 的模型中, 均假设投资者投资于一个信用债券组合, 且这个组合满足 Jarrow, Lando 和 Yu[8] 提出的 "条件分散性 (conditional diversification)" 假设. Jarrow 等证明当市场上信用债券的数量趋近于无穷, 且各债券之间的违约相互独立时, 市场不会对跳跃风险进行补偿. Jarrow 等将这种跳跃风险溢价的渐进消失性就称为 "条件分散性". 一个满足 "条件分散性" 假设的信用债券组合将不再具有跳跃风险 (跳跃风险已被组合分散掉), 因而, Walder[5]、Hou 和 Jin[6] 以及 Hou[7] 的模型也就无法揭示跳跃风险对信用债券最优投资策略的影响.

实际上, 一个满足 "条件分散性" 假设的信用债券组合并不存在, 因为这个组合所要包含的债券数量需要趋近于无穷. Elton 等 [9] 以及 Driessen[10] 的实证研究也表明跳跃风险溢价显著地存在于信用证券市场. 因此, 在现实中跳跃风险是投资者投资于信用债券时无法回避的风险.

为了使所研究的问题更符合实际, 分析跳跃风险对最优投资策略的影响, 本文将在简约化模型的框架下, 研究投资者配置于一个信用债券、股票和银行存款的最优投资问题. 由于投资组合中的信用债券不再是一个多样化的组合, 因此, "条件分散性" 的假设不复存在, 此时投资组合的风险来源为信用债券的跳跃风险以及股票收益的波动风险. 将跳跃风险引入至投资组合并揭示了跳跃风险溢价与信用债券最优投资策略之间的关系是本文与以往文献的显著不同和主要创新. 研究结果表明: 只有当信用债券的跳跃风险溢价大于 1, 即市场对跳跃风险有风险补偿时, 投资者才会持有信用债券; 当信用跳跃风险溢价等于 1, 即市场对跳跃风险没有风险补偿时, 投资者对信用债券的最优持有为零.

2 金融市场模型

2.1 信息结构

假设金融市场是一个无摩擦、无套利的完全竞争市场, 金融资产可以被连续性交易. 在市场上, 所有投资者都是价格接受者, 即单个投资者的投资决策并不能改变金融资产的价格. 假设存在一个完备的概率空间 (Ω, G, Q). Q 是真实概率 P 的等价鞅概率测度 (风险中性概率测度). $W^Q(t)$ 是定义在概率空间上的标准布朗运动, $F=(F_t)_{t\geq 0}$ 是由 $W^Q(t)$ 生成的滤波, 满足通常条件. 令 τ 为概率空间上的一个非负随机变量, 代表信用债券的违约时间. 假设 $G(\tau=0)=0$, $Q(\tau>0)>0$. 定义一个右连续过程 H, $H(t)=1_{\{\tau\leq t\}}$, 其中 $1_{\{\tau\leq t\}}$ 为示性函数. $H=(H_t)_{t\geq 0}$ 是由 $H(t)$ 生成的滤波, 满足通常条件. $G=(G_t)_{t\geq 0}$ 被称作扩大的滤波 (enlarged filtration), $G_t=F_t\vee H_t$.

2.2 各资产价格的动态过程

假设一个代表性投资者的投资集为: 零息信用债券、股票和银行存款等三种资产. 下面将对这三种资产价格的动态过程进行描述.

设一个零息信用债券的到期日为 T_1, 票面价值为 1, 违约时间为 τ. 当 $\tau\in(T_1,\infty)$ 时, 债券不发生违约, 投资者于到期日收回债券的票面价值. 当 $\tau\in(0,T_1)$ 时, 债券违约, 债券的市场价值将变为零, 但投资者可以按照债券违约前的市场价值收回部分投资 [11]. 由此可以得到, 概率 Q 下零息信用债券的价格为:

$$p\left(t,T_1\right)=1_{\{\tau>t\}}\times \mathrm{e}^{-\left(r+h^Q\iota\right)\left(T_1-t\right)}+1_{\{\tau\leq t\}}\left(1-\iota\right)\mathrm{e}^{-\left(r+h^Q\iota\right)\left(T_1-\tau\right)}\mathrm{e}^{r(t-\tau)} \tag{1}$$

其中, r 为无风险短期利率, h^Q 为过程 τ 的风险中性违约强度, ι 为违约损失率, 假设它们均为常数.

定义 1 令 h^Q 是风险中性违约强度, 则非负随机过程 $M^Q\left(t\right)=H\left(t\right)-\int_0^t\left(1-H\left(u-\right)\right)h^Q\mathrm{d}u$ 是一个在概率 Q 下的鞅, 其中 $H\left(u-\right)=\lim_{s\uparrow u}H\left(u\right)=1_{\{\tau\leq u\}}$.

对 (1) 式利用伊藤定理, 并利用定义 1 的结果, 可以得到概率 Q 下零息信用债券价格的动态过程:

$$\mathrm{d}p\left(t,T_1\right)=p\left(t,T_1\right)\left(r\mathrm{d}t-\left(1-H\left(t\right)\right)\iota\mathrm{d}M^Q\left(t\right)\right) \tag{2}$$

假设在概率 Q 下股票和银行存款的价格分别满足如下动态过程:

$$\mathrm{d}S\left(t\right)=S\left(t\right)\left(r\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W^Q\left(t\right)\right) \tag{3}$$

$$\mathrm{d}B\left(t\right)=rB\left(t\right)\mathrm{d}t \tag{4}$$

2.3 财富的动态过程

假设投资者的初始财富为 x, 投资期限为 $[0,T]$, 假设 $T<T_1$. 投资策略为 $\pi\left(t\right)=\left(\pi_S\left(t\right),\pi_p\left(t\right)\right)'$, $t\in$

$[0,T]$, 其中 $\pi_S(t)$ 和 $\pi_p(t)$ 分别表示投资者在期限 $[0,T]$ 投资于股票和信用债券的金额所占总财富的比例, $1-\pi_S(t)-\pi_p(t)$ 为投资于银行存款的金额所占总财富的比例. 自融资的投资策略下, 财富的动态过程可以写作:

$$\mathrm{d}X(t)=\pi_S(t)\,\mathrm{d}S(t)+\pi_p(t)\,\mathrm{d}p(t,T_1)+(1-\pi_S(t)-\pi_p(t))\,\mathrm{d}B(t) \tag{5}$$

将 (2)、(3)、(4) 代入 (5) 则得到:

$$\mathrm{d}X(t)=X(t-)\left(r\mathrm{d}t+\pi_S\sigma\mathrm{d}W^Q(t)-(1-H(t))\,\pi_p\iota\mathrm{d}M^Q(t)\right) \tag{6}$$

可以发现折现的财富动态过程是一个鞅过程:

$$\mathrm{d}\left(\frac{X(t)}{B(t-)}\right)=\frac{X(t)}{B(t-)}\left(\pi_S\sigma\mathrm{d}W^Q(t)-(1-H(t))\,\pi_p\iota\mathrm{d}M^Q(t)\right) \tag{7}$$

由此可知: $E^Q\left(\frac{X(t)}{B(t-)}\right)=\frac{X(0)}{B(0)}=x$. 其中, E^Q 为风险中性概率 Q 下的期望.

由于投资者是在真实概率 P 下进行资产配置决策, 最大化其效用, 因此需要将概率测度从风险中性概率测度 Q 转化为真实概率测度 P. 在无套利市场假设下, 由 Girsanov 定理[1]可知存在一个 Radon-Nikoyn 密度鞅过程 $Z(t)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$, 使得

$$E^P\left(Z(t)\frac{X(t)}{B(t-)}\right)=E^Q\left(\frac{X(t)}{B(t-)}\right)=x \tag{8}$$

其中, E^P 为真实概率 P 下的期望, $Z(t)$ 则应满足如下条件:

$E^P(Z(T^*))=1$, 同时 $Z(t)=Z_W(t)\,Z_H(t)$,

$Z_W(t)=\exp\left(-\int_0^t\lambda\mathrm{d}W(u)-\frac{1}{2}\int_0^t\lambda^2\mathrm{d}u\right)$,

$Z_H(t)=\exp\left(\int_0^t\ln\mu\mathrm{d}H(u)-\int_0^t h^P(\mu-1)(1-H(u))\,\mathrm{d}u\right)$,

其中, λ 为股票风险的市场价格, $\mu=\frac{h^P}{h^Q}$, μ 为跳跃风险的市场价格, h^P 为真实概率 P 下的违约强度; $W(t)=W^Q(t)-\int_0^t\lambda\mathrm{d}u$ 是真实概率 P 下的布朗运动, $M(t)=M^Q(t)-h^P\int_0^t(\mu-1)(1-H(u))\,\mathrm{d}u$ 是真实概率 P 下的鞅.

3 最优投资策略

投资者通过将其财富进行动态配置, 以实现基于最终财富的期望效用最大化. 令 $U(X)$ 为投资者的效用函数, $J(X)$ 为实施最优投资策略 π^* 后的最大化效用, 则投资者所面临的最优化问题为:

$$J(X)=\sup_{\pi}E^P(U(X(T)))\quad \text{s.t.}\quad E^P\left(Z(t)\frac{X(t)}{B(t-)}\right)=x \tag{9}$$

本文将利用鞅方法 (martingale approach) 来求解此问题[2], 先求解一般效用函数形式下的最优投资策略, 再假定 CRRA 效用函数以求出该问题的解析解.

3.1 最大化一般效用函数

假设效用函数 U 是严格递增且凹的函数, 则效用函数的导数 U' 是严格递减且连续的, 因而存在一个严格递减且连续的反函数使得: $I(U'(X))=X, 0<X<\infty,\ \ U'(I(Y))=Y, 0<Y<U'(0)$.

定义 U 的对偶函数: $\tilde{U}(Y)\triangleq\sup\limits_{X\in\mathbb{R}}(U(X)-XY)$. 则当 $X=I(Y)$ 时, $\tilde{U}$ 取最大值, 即:

$$U(X)-XY\le U(I(Y))-YI(Y) \tag{10}$$

当且仅当 $X=I(Y)$ 时, 上式为等式.

将 $Y(x)$ 看做最优化问题约束条件的拉格朗日乘数, 可以将带约束条件的最优化问题 (9) 转化为无约束条件的最优化问题:

$$E^P(U(X(T)))+Y(x)\left(x-E^P(N(T)X(T))\right) \tag{11}$$

其中, $N(t)=\frac{Z(t)}{B(t)}$. 对 (11) 利用 (10) 的结果可得:

$$xY(x)+E^P(U(X(T))-Y(x)N(T)X(T))\le xY(x)+E^P(U(I(Y(x)N(T)))-Y(x)N(T)I(Y(x)N(T)))$$

当且仅当

$$X(T)=I(Y(x)N(T)) \tag{12}$$

1. 具体证明详见 Kusuoka[12].

2. 有关鞅方法的具体细节可以参见 Cox 和 Huang[13]、Duffie[14].

为等式. 此时, $X(T)$ 为最优的最终财富.

利用 $X(T)$、$E^P\left(N(T)X(T)\right)$ 的鞅性质以及伊藤定理, 可以得到 $\mathrm{d}\left(\frac{X(t)}{B(t-)}\right)$ 的另一个表达式, 将此与 (7) 式进行比较, 即可以得到最优的投资策略 π^*. 具体结果由命题 1 给出.

命题 1 令 x 为投资者初始财富, $X(T)$ 为 T 时刻的最终财富, 当投资者的预算约束满足: $E^P\left(N(t)X(t)\right) = x, x>0$, 则存在最优一个投资策略 π^*, 使得投资者的最终财富效用最大化:

$$\pi_S^*\sigma\frac{X(t)}{B(t-)}=\frac{\phi_1(t)+\eta(t)\lambda}{Z(t)} \tag{13}$$

$$(1-H(t))\,\pi_p^*\iota\frac{X(t)}{B(t-)}=-\frac{\phi_2(t-)+(1-\mu)\eta(t)}{\mu Z(t)} \tag{14}$$

其中,

$$\eta(t)=E^P\left(N(T)\,I\left(Y(x)\,N(T)\right)|F_t\right) \tag{15}$$

$$\mathrm{d}\eta(t)=\phi_1(t)\,\mathrm{d}W(t)+\phi_2(t)\,\mathrm{d}M(t) \tag{16}$$

证明 见附录 A.

命题 1 给出了投资者资产配置最优化问题的一般解. ϕ 和 η 的函数形式仍未确定. 为了得到 ϕ 和 η 的具体函数形式, 需要对投资者的效用函数形式进行进一步的假设. 在 3.2 节, 本文将假设投资者的效用函数为常数相对风险规避系数 (CRRA) 效用函数, 以得到投资者最优投资策略的解析解.

3.2 最大化 CRRA 效用函数

假设投资者的效用函数为 CRRA 效用函数, 满足形式: $U(X)=\frac{X^\gamma}{\gamma}$, $0<\gamma<1$. 此时 U' 的反函数为:

$$I(Y)=Y^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{17}$$

利用 (8)、(12) 和 (17) 可得:

$$x=E^P\left(N(T)\,I\left(Y(x)\,N(T)\right)\right)=Y(x)^{\frac{1}{\gamma-1}}E^P\left(N(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) \tag{18}$$

从而得到:

$$Y(x)=\left(\frac{x}{E^P\left(N(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{19}$$

将 (19) 带入 (12), 并利用 (17) 可以得到最优的最终财富:

$$X(T)=I\left(Y(x)\,N(T)\right)=\frac{x}{E^P\left(N(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)}N(T)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{20}$$

将 (20) 和 $N(T)$ 带入 (15), 可得到 CRRA 效用函数下的 η:

$$\eta(t)=\frac{x}{E^P\left(N(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)}E^P\left(N(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|F_t\right)=\frac{xN(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{E^P\left(N(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)}E^P\left(\left(\frac{N(T)}{N(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|F_t\right) \tag{21}$$

对 (21) 利用伊藤定理可得:

$$\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\eta(t-)}=\frac{\mathrm{d}N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}+\frac{\mathrm{d}\Sigma(t)}{\Sigma(t)} \tag{22}$$

其中,

$$\Sigma(t)=E^P\left(\left(\frac{N(T)}{N(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle|F_t\right) \tag{23}$$

为了得到最优投资策略, 下面主要的工作是得到 (22) 的表达式. 定理 1 和定理 2 给出了 $\frac{\mathrm{d}N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$ 和 $\frac{\mathrm{d}\Sigma(t)}{\Sigma(t)}$ 的表达式, 以此可以确定 $\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\eta(t-)}$, 将其和 (16) 进行比较即可得到 ϕ. 将 ϕ 带入命题 1, 就可以得到 CRRA 效用函数下投资者的最优投资策略.

定理 1 $N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ 的偏微分方程应满足:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}=\frac{\gamma}{(1-\gamma)}\left(\lambda\mathrm{d}W(t)\right)+\left(\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right)\mathrm{d}H(t)+[\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

证明　见附录 B.

定理 2　当 $W(t)$ 和 $H(t)$ 彼此之间相互独立时, $\Sigma(t)$ 的偏微分应满足:

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma(t)}{\Sigma(t)}=\left(\frac{\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1-\mathrm{e}^{h^P(T-t)}\right)+\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\mu)h^P+h^P(T-t)}}-1\right)\mathrm{d}H(t)+[\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

证明　见附录 C.

命题 2　CRRA 效用函数下, 当信用债券未发生违约, 即: $\tau>t$ 时, 投资者的最优投资策略 π^* 为:

$$\pi_S^*=\frac{1}{1-\gamma}\frac{\lambda}{\sigma} \tag{26}$$

$$\pi_p^*=\frac{\mu-\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-\dfrac{\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\mu)h^P+h^P(T-t)}+\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1-\mathrm{e}^{h^P(T-t)}\right)}+1}{\iota\mu} \tag{27}$$

证明　由命题 1 及定理 1 和定理 2, 就可直接得到命题 2.

可以发现股票的最优投资策略与 Merton 问题 [15] 的结果是一致的. 这是因为股票没有违约风险, 而且与信用债券也没有相关性, 因而投资者投资股票时不需要去对冲违约风险. 最优的股票投资策略只和投资者的风险规避系数 γ、股票风险价值 λ 以及股票的波动率 σ 有关. 由于假定 r 和 λ 为常数, 投资者的效用函数为 CRRA 效用函数, 最优的股票投资策略与投资者投资期限的长短无关, 即所谓的投资 “短视 (myopic)” 效应.

信用债券的最优投资策略为跳跃风险溢价的增函数, 在保持其他变量不变的情况下, 随着跳跃风险溢价的加大, 投资者将持有更多的信用债券. 这从直觉上也不难理解, 跳跃风险越大, 说明市场对违约风险的补偿也就越大, 信用债券的收益也就越高, 对投资者越具吸引力, 因而投资者会增加对其的持有. 信用债券的最优投资策略还是违约损失率的减函数, 在其他变量不变时, 信用债券的违约损失率越高, 信用债券违约后投资者能收回的投资成本就越低, 因而投资者为了避险, 会减少对信用债券的持有. 信用债券的最优投资策略与投资期限密切相关, 随着投资期限的增长, 若信用债券未发生违约, 投资者会加大对债券的持有, 这说明信用债券的最优投资策略不再具有短视效应.

4　数值分析

为了使结果更加直观, 本节将用数值分析的方式, 来讨论投资者最优投资策略的一些性质. 由于股票的最优投资策略与 Merton 问题 [15] 的结果是一致的, 这里不再赘述. 通过上节的结果可知, 信用债券未发生违约时的最优投资策略是跳跃风险溢价、违约损失率、违约强度、风险规避系数以及剩余投资期限的函数. 在此, 着重分析跳跃风险溢价和违约损失率对信用债券最优投资策略的影响. 假设跳跃风险溢价取 1–3, 违约损失率取 0.1–1, 违约强度为 0.03, 投资者为风险厌恶型, 风险规避系数为 0.5, 剩余投资期限为 1 年, 具体参数取值见表 1.

表 1　相关参数取值

μ	ι	h^P	γ	$T-t$
1–3	0.1–1	0.03	0.5	1

从图 1 可以直观的发现, 当信用债券跳跃风险溢价为 1, 即市场不会对信用债券的跳跃风险进行补偿时, 投资将不会持有任何的信用债券. 随着信用债券跳跃风险溢价的加大, 信用债券的最优持有将不断增大, 更高的跳跃风险溢价, 会吸引投资者对信用债券更多的持有, 这主要的体现了信用债券的高收益对投资者的吸引. 但是, 随着跳跃风险溢价的加大, 投资者对信用债券的边际持有将不断下降. 我们还可以发现, 当债券的违约损失率较高时, 投资者对信用债券的持有对跳跃风险溢价不是很敏感, 但是当违约损失率较低时, 信用债券的最优持有对跳跃风险溢价的变化就变得较为敏感, 跳跃风险溢价一个很小的扩大, 会大幅增加投资者对信用债券的持仓比重. 这可能是因为当违约损失率较高时, 投资者主要考虑的是信用债券所蕴含的投资风险; 而当违约损失率较低时, 投资者主要考虑的是信用债券的投资收益.

图 2 描述了违约损失率对信用债券最优持有的影响. 随着违约损失率的增加, 投资者会减少对信用债券的持有. 从图 2 中还可以发现, 在同一个违约损失率下, 随着跳跃风险溢价的增加, 投资者会增加对信用债券的持有.

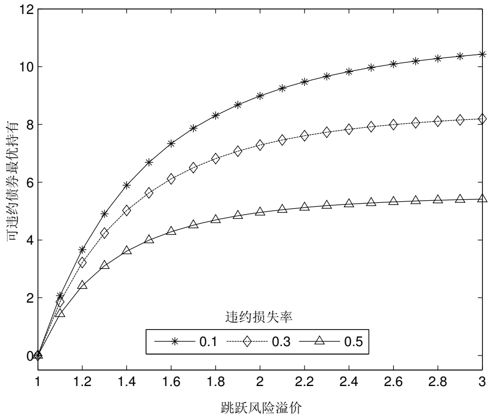

图 1 跳跃风险溢价对信用债券最优持有的影响

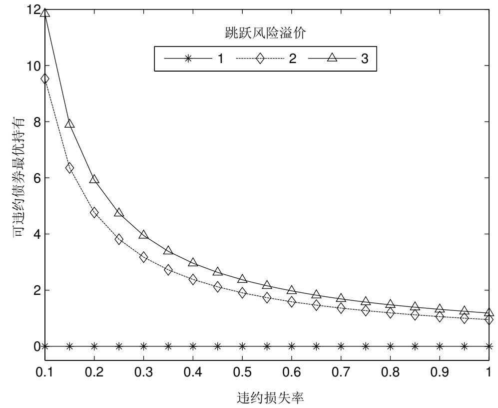

图 2 违约损失率对信用债券最优持有的影响

5 结论

本文研究了一个代表性投资者投资于一个信用债券、股票以及银行存款时的最优投资问题. 由于假设投资者仅投资一个信用债券, 因而信用债券的跳跃风险依然存在, 通过对其资产配置策略的研究, 可以揭示跳跃风险对最优投资策略的影响, 这是本文的主要创新点. 在简约化模型的框架下, 对信用债券进行定价, 并推导出其价格的动态方程. 通过假设投资者的效用函数为 CRRA 效用函数, 利用鞅方法得到了最优投资策略的解析解. 结果表明: 股票的最优投资策略与 Merton 问题 [15] 的结果是一致的, 这是因为股票并没有违约风险. 只有当跳跃风险溢价大于 1, 即市场对跳跃风险进行风险补偿时, 投资者才会持有信用债券, 并且最优持有量随着跳跃风险溢价的增加而增加. 此外信用债券的最优投资策略还是违约损失率的减函数, 投资期限的增函数.

参考文献

[1] Korn R, Kraft H. Optimal portfolios with defaultable securities: A firm value approach[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2003, 6(8): 793–819.

[2] Kraft H, Steffensen M. Portfolio problems stopping at first hitting time with application to default risk[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 63(1): 123–150.

[3] Merton R C. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates[J]. The Journal of Finance, 1974, 29(2): 449–470.

[4] Jarrow R A, Turnbull S M. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk[J]. The Journal of Finance, 1995, 50(1): 53–85.

[5] Walder R. Dynamic allocation of treasury and corporate bond portfolios[R]. FAME Research Paper, Switzerland, 2002.

[6] Hou Y, Jin X. Optimal investment with default risk[R]. FAME Research Paper, Switzerland, 2002.

[7] Hou Y. Integrating market risk and credit risk: A dynamic asset allocation perspective[R]. Working Paper, Yale University, 2003.

[8] Jarrow R A, Lando D, Yu F. Default risk and diversification: Theroy and applications[J]. Mathematical Finance, 2005, 15(1): 1–26.

[9] Elton J E, Gruber M J, Agrawal D, et al. Explaining the rate spread on corporate bonds[J]. The Journal of Finance, 2001, 56(1): 247–277.

[10] Driessen J. Is default event risk priced in corporate bonds?[J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(1): 165–195.

[11] Duffie D, Singleton K J. Modeling term structures of default risky bonds[J]. Review of Financial Studies, 1999, 12(4): 687–720.

[12] Kusuoka S. A remark on default risk models[J]. Advances in Mathematical Economics, 1999, 5(1): 69–82.

[13] Cox J C, Huang C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49(1): 33–83.

[14] Duffie D. Dynamic Asset Pricing Theory[M]. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996.

[15] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(3): 247–257.

[16] Bardhan I, Chao X L. Martingale analysis for assets with discontinuous returns[J]. Mathematics of Operations Research, 1995, 20(1): 243–256.
[17] Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

附录 A 命题 1 的证明

证明 参照 Bardhan 和 Chao[16], 首先定义一个非负过程:

$$\frac{X(t)}{B(t)}=\frac{1}{Z(t)}E^{P}\left(N(T)X(T)|F_{\mathrm{t}}\right)=\frac{\eta(t)}{Z(t)}\tag{A.1}$$

其中, $\eta(t)=E^{P}\left(N(T)X(T)|F_{t}\right)$. $\eta(t)$ 是一个鞅且平方可积. 利用鞅表示定理[3]可得:

$$\eta(t)=x+\int_{0}^{t}\phi_{1}(u)\mathrm{d}W(u)+\int_{0}^{t}\phi_{2}(u)\mathrm{d}M(u).$$

由 Girsanov 定理可知: $Z(t)=Z_{W}(t)Z_{H}(t)$. 其中, $Z_{W}(t)=1-\int_{0}^{t}Z_{W}(u)\lambda\mathrm{d}W(u)$, $Z_{H}(t)=1+\int_{0}^{t}Z_{H}(u-)(\mu-1)\mathrm{d}M(u)$.

对 (A.1) 利用伊藤定理, 可得:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\frac{X(t)}{B(t)}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{\eta(t)}{Z(t)}\right)&=\frac{1}{Z(t-)}\mathrm{d}\eta(t)-\left(\frac{\eta(t-)}{Z^{2}(t-)}\right)\mathrm{d}Z(t)+\left(\frac{\eta(t-)}{Z^{3}(t-)}\right)\mathrm{d}Z(t)\mathrm{d}Z(t)\\&\quad-\frac{1}{Z^{2}(t-)}\mathrm{d}\eta(t)\mathrm{d}Z(t)+\frac{\eta(t)}{Z(t)}-\frac{\eta(t-)}{Z(t-)}-\frac{\Delta\eta(t)}{Z(t-)}+\frac{\eta(t-)}{Z^{2}(t-)}\Delta Z(t)\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\mathrm{d}Z(t)=Z(t-)\left(-\lambda\mathrm{d}W(t)+(\mu-1)\mathrm{d}M(t)\right)\tag{A.3}$$

$$\mathrm{d}Z(t)\mathrm{d}Z(t)=-Z^{2}(t-)\lambda^{2}\mathrm{d}t\tag{A.4}$$

$$\mathrm{d}\eta(t)\mathrm{d}Z(t)=-Z(t-)\phi_{1}\lambda\mathrm{d}t\tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\eta(t)}{Z(t)}-\frac{\eta(t-)}{Z(t-)}-\frac{\Delta\eta(t)}{Z(t-)}+\frac{\eta(t-)}{Z^{2}(t-)}\Delta Z(t)\\=&\left(\frac{\eta(t)-\eta(t-)+\eta(t-)-\mu\eta(t-)}{\mu Z(t-)}\right)\mathrm{d}H(t)-\left(\frac{\phi_{2}(t-)}{Z(t-)}-\frac{\eta(t)-(\mu-1)\eta(t-)}{Z(t-)}\right)\mathrm{d}H(t)\\=&\left((1-\mu)\frac{\phi_{2}(t-)-(\mu-1)\eta(t-)}{\mu Z(t-)}\right)\mathrm{d}H(t)\end{aligned}\tag{A.6}$$

将 (A.3)–(A.6) 带入 (A.2) 可得:

$$\mathrm{d}\left(\frac{X(t)}{B(t)}\right)=\frac{\phi_{1}(t)+\eta(t-)\lambda}{Z(t-)}\mathrm{d}W^{Q}(t)+\frac{\phi_{2}(t-)+(\mu-1)\eta(t-)}{\mu Z(t-)}\mathrm{d}M^{Q}(t)\tag{A.7}$$

将 (A.7) 与 (7) 比较即可得到命题 1.

附录 B 定理 1 的证明

证明 令

$$Z_{W}(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=g_{1}(t)f_{1}(t)\tag{B.1}$$

$$Z_{H}(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=g_{2}(t)f_{2}(t)\tag{B.2}$$

则

$$N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=\prod_{i=1}^{2}g_{i}(t)\prod_{i=1}^{2}f_{i}(t)\tag{B.3}$$

其中,

$$f_{1}(t)=\exp\left(\frac{\gamma}{2(1-\gamma)^{2}}\int_{0}^{t}\lambda^{2}\mathrm{d}u\right)\tag{B.4}$$

$$f_{2}(t)=\exp\left(\int_{0}^{t}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\mu)-1+\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)h^{P}(1-H(u))\mathrm{d}u\right)\tag{B.5}$$

3. 详见 Protter[17].

$$g_1(t)=\exp\left(\frac{\gamma}{(1-\gamma)}\int_0^t \lambda \mathrm{d}W(u)-\frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)^2}\int_0^t \lambda^2 \mathrm{d}u\right) \tag{B.6}$$

$$g_2(t)=\exp\left(\int_0^t \ln \mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \mathrm{d}H(u)+\int_0^t\left(1-\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right) h^P(1-H(u)) \mathrm{d}u\right) \tag{B.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_1(t)}{g_1(t)}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\lambda \mathrm{d}W(t) \tag{B.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_2(t)}{g_2(t)}=\left(\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-1\right) \mathrm{d}H(t) \tag{B.9}$$

由于 $g_1(t)$、$g_2(t)$ 均为鞅过程, 因此可得:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{N(t)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}=\sum_{i=1}^2 \frac{\mathrm{d}g_i(t)}{g_i(t)}+[\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{B.10}$$

其中, $[\cdot]$ 表示与 $\mathrm{d}t$ 相关的一些项. 将 (B.8) 和 (B.9) 带入 (B.10) 即可得到定理 1.

附录 C 定理 2 的证明

证明 令

$$\Sigma(t)=E^P\left(\left(\frac{N(T)}{N(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle| F_t\right)=l_1(t,T)\, l_2(t,T) \tag{C.1}$$

其中,

$$l_1(t,T)=E^P\left(\left(\frac{Z_W(T)B(t)}{Z_W(t)B(T)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle| F_t\right)=E^P\left(\exp\frac{\gamma}{(1-\gamma)}\left(-\int_t^T \lambda \mathrm{d}W(u)-\frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2 \mathrm{d}u-\int_t^T r \mathrm{d}u\right)\middle| F_t\right) \tag{C.2}$$

$$l_2(t,T)=E^P\left(\left(\frac{Z_H(T)}{Z_H(t)}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\middle| F_t\right)=E^P\left(\exp\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\int_t^T \ln \mu \mathrm{d}H(u)+\int_t^T(1-\mu) h^P(1-H(u)) \mathrm{d}u\right)\middle| F_t\right) \tag{C.3}$$

由伊藤定理可知:

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma(t)}{\Sigma(t)}=\frac{\mathrm{d}l_1(t,T)}{l_1(t,T)}+\frac{\mathrm{d}l_2(t,T)}{l_2(t,T)}+[\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{C.4}$$

为了得到 $\frac{\mathrm{d}\Sigma(t)}{\Sigma(t)}$, 需要分别知道 $\frac{\mathrm{d}l_1(t,T)}{l_1(t,T)}$、$\frac{\mathrm{d}l_2(t,T)}{l_2(t,T)}$.

$$\begin{aligned} l_1(t,T) &= E^P\left(\exp\frac{\gamma}{(1-\gamma)}\left(-\lambda(W(T)-W(t))-\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)-r(T-t)\right)\middle| F_t\right) \\ &= \exp\frac{\gamma}{(1-\gamma)}\left(-\frac{1}{2}\lambda^2(T-t)-r(T-t)\right) \end{aligned} \tag{C.5}$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}l_1(t,T)}{l_1(t,T)}=[\cdot]\,\mathrm{d}t \tag{C.6}$$

其中, $[\cdot]$ 是和 $\mathrm{d}t$ 有关的项.

$$l_2'(t,T)=E^P\left(\exp\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\int_t^T \ln \mu \mathrm{d}H(u)+\int_t^T(1-\mu) h^P(1-H(u)) \mathrm{d}u\right)\middle| H(t)=1\right)=\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned} l_2(t-,T) &= E^P\left(\exp\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\int_t^T \ln \mu \mathrm{d}H(u)+\int_t^T(1-\mu) h^P(1-H(u)) \mathrm{d}u\right)\middle| H(t)=0\right) \\ &= \mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1-\mathrm{e}^{h^P(T-t)}\right)+\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\mu)h^P+h^P(T-t)} \end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\mathrm{d}l_2(t,T)=\left(l'_2(t,T)-l_2(t-,T)\right) \mathrm{d}H(t) \tag{C.9}$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}l_2(t,T)}{l_2(t-,T)}=\left(\frac{l'_2(t,T)}{l_2(t-,T)}-1\right) \mathrm{d}H(t)=\left(\frac{\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\mu^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(1-\mathrm{e}^{h^P(T-t)}\right)+\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\mu)h^P+h^P(T-t)}}-1\right) \mathrm{d}H(t) \tag{C.10}$$

将 (C.6) 和 (C.10) 带入 (C.4) 即可得到定理 2.