

基于小波分析的股市波动的多重分形辨识

罗世华, 周 斌, 李 颖

(江西财经大学 信息管理学院, 南昌 330013)

摘 要 以上证指数和深圳成分指数日收盘价的时间序列为样本, 利用小波分析方法剔除序列的噪声干扰, 对序列保留的波动趋势进行多重分形辨识. 通过 WTMM (小波变换模极大) 计算配分函数, 尺度函数和多重分形谱等, 全面细致的量化了序列的局部及不同层次的波动奇异性. 计算结果表明: 去除噪声干扰后, 中国现行证券市场的波动呈现显著的多重分形特征.

关键词 WTMM; 小波分析; 股市波动; 多重分形

Stock market volatility based on wavelet analysis identification of multifractal

LUO Shi-hua, ZHOU Bin, LI Ying

(School of Information Management, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang 330013, China)

Abstract The Shanghai Composite Index and Shenzhen Component Index on the closing price time series as a sample, using the wavelet analysis eliminate noise sequence, sequence to retain the fluctuations of the multifractal trends identified. By WTMM (wavelet transform modulus maxima) calculate the partition function, scaling function and multifractal spectra, a comprehensive and detailed quantification of the sequence of the fluctuations at different levels of local and singularity. The results show that: after the removal of noise, Chinese current stock market existing securities significant fluctuations in the market multifractal characteristics.

Keywords WTMM; wavelet analysis; stock market volatility; multifractal

1 引言

证券市场是一个复杂的非线性演化系统, 证券市场的波动受到货币、财政、税制、外部环境、突发事件等诸多纷繁复杂的因素影响, 这些影响因素之间有着复杂的耦合关系, 对市场波动的影响有着不同的时滞和强度. 基于数据驱动分析, 研究其内在非线性波动规律^[1], 对市场发展预测^[2]等方面的研究具有重要的理论价值. 随着分形几何理论应用研究的不断深入, 将非线性时间序列研究的利器——分形时间序列分析方法引入到证券市场的波动研究, 成为近十年来证券波动研究的一个新兴而有趣的研究领域. 许多学者对金融时间序列的单分形过程进行了大量的研究, 即用一个简单的, 唯一的参数比如 Hurst 指数、分形维来刻画出证券市场非线性波动特征的宏观概貌^[3-7]. 然而, 单分形研究本质上是对股市市场非线性波动特征的一种统计平均刻画, 并没有考虑在某一时刻的局部特性或不同层次、不同局域条件形成的各种复杂的精细结构, 自然也就无法对其进行精确的分析和刻画. 而采用多重分形则可以研究交易数据在分形子集的分布, 对于实际股票价格变化的不规则性或奇异性常随时间和其他一些条件的变动而变动, 如何刻画序列的细节波动, 需要用多重分形的相关时变参数来动态把握和刻画. 国内外有许多学者对股票市场的局部非线性特征辨识进行了大量实证研究^[8-13], 现有研究表明, 全球主要证券市场的波动, 均在一定程度上表现出了局部波动不一致等多重分形特征. 上述文献的研究中大多都采用算法比较稳定的 MF-DFA (多重分形消除趋势波动) 分析方法完成辨识研究, 但是这一方法的缺点就是计算特别复杂、对参数的敏感性极大, 而且大多研究都忽略了噪声

收稿日期: 2011-06-17

资助项目: 国家自然科学基金 (60964005, 70901036, 61263014); 江西省自然科学基金 (20122BABZ01023)

作者简介: 罗世华 (1975-) 江西泰和人, 男, 博士, 硕士生导师, 研究方向: 复杂系统非线性特征辨识与应用; 周斌 (1984-) 江西进贤人, 男, 硕士, 研究方向: 金融计量; 李颖 (1989-) 江西进贤人, 女, 硕士, 研究方向: 金融计量.

干扰方面的影响, 我们知道多重分形研究的本质是辨识复杂系统内部的局部或者不同尺度下的非线性特征等精细结构, 如果建模数据受到噪声等其它因素的“污染”, 分析结构的可靠性和精确性就会受到影响. 为了消除这方面的影响, 本文将小波多尺度分析方法和多重分形方法相融合, 利用多尺度分解消除建模数据中的噪声等“污染”因素, 再利用 WTMM(小波变换模极大值) 框架下的多重分形辨识, 完成对证券市场的局部波动特征的精确辨识研究. 本文采用的 WTMM 方法, 不仅能解决上述算法复杂的难题, 而且这种方法计算的结果与理论值吻合好、对参数的敏感性小. 周宇欢、傅强等^[14] 在研究湍流的多重分形谱时, 已经证明 WTMM 分析方法的有效性. 所以本文据此选择 WTMM 分析方法对我国股票市场的多重分形结构进行分析. 上证指数和深成指数是中国股市的“体温计”, 基本能客观反映中国股市宏观面的活动情况, 故本文选取上证指数和深成指数 1991 年 4 月 3 日至 2011 年 4 月 1 日日收盘价指数序列作为样本空间, 通过小波分析剔除样本的噪声干扰, 对修正的序列, 在新的框架上计算尺度函数, 多重分形谱等具有时变性质的参数以探讨我国股市波动的多重分形特征, 即股票价格变化的局部不规则性或奇异性. 实证结果表明我国股票市场具有可靠而显著的多重分形特征, 研究结果对市场波动的预测^[2] 具有积极的理论和应用价值.

2 小波分析剔除股票价格序列的噪声干扰

股票市场中的实测数据常常受到噪声等诸多因素的干扰, 而且噪声和局部波动往往耦合在一起, 因此, 如何选择合适的方法, 在过滤掉噪声的同时能够将系统的局部波动特性保留下来, 对后续的辨识研究至关重要. 时间序列的滤波有传统的低通滤波器、小波分辨滤波等诸多选择. 当信号和噪声的频谱分离较好时, 传统的滤波和小波等现代滤波手段都可以获得理想的效果. 但是, 当信号本身的频率未知且与噪声的频谱叠加, 常见的低通滤波等传统方法往往容易在去噪的同时, 将有价值的信号成分一并去除, 而小波分析去噪由于可以灵活选择不同的分解尺度和采取软域值等手段, 非常适合去除频谱未知的复杂工业系统实际获取时间序列的噪声, 所以本文选择其作为去噪工具^[15].

2.1 小波多分辨分析

由粗及精对事物的逐级分析称为多分辨率分析^[16-17], 它是小波变换联系工程应用的重要方法. 设闭子区间序列 $\{V_j\}_{j \in Z}$ 为满足条件的 $L^2(R)$ 的一个多分辨率分析, $\varphi(t)$ 为多分辨率的尺度函数, $\{\phi_{j,k}(t)\}_{j,k \in Z}$ 为 $L^2(R)$ 的标准正交基. $\phi(t)$ 为小波函数, $f_s^j(t)$ 是信号 $f(t)$ 在尺度空间 V_j 上的概貌信号, $f_d^j(t)$ 是信号 $f(t)$ 在小波空间 W_j 上的细节信号, 则有正交小波分解公式:

$$f_s^j(t) = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(t), k \in Z \quad (1)$$

$$f_d^j(t) = \sum_k d_{j,k} \varphi_{j,k}(t), k \in Z \quad (2)$$

其中 $c_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle$ 称为尺度系数, $d_{j,k} = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle$ 称为小波系数.

若 $f(t) \in L^2(R)$, $L^2(R) = \sum_{j=-\infty}^j W_j \oplus V_j$ 则:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (3)$$

当 $J \rightarrow +\infty$ 时, 则离散正交小波变换合成公式为:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^j \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \quad (4)$$

以下是基于多分辨率分析消除噪声干扰的步骤^[18]: 1) 信号的小波分解: 选择合适的小波和恰当的分解层数 N , 对目标信号进行 N 层的小波分解. 2) 对分解后的高频系数进行阈值化: 对分解的每一层, 选择适当的阈值, 对这一层的高频系数进行阈值量化处理. 3) 重构信号: 根据小波分解的第 N 层近似的低频系数和经过阈值量化后的高频系数, 重构信号.

2.2 小波去噪

本文选取上证指数, 深圳成分指数 1991 年 4 月 3 日到 2011 年 4 月 1 日收盘价数据. 上证指数共 4898 个样本数据, 深圳成分指数共 4926 个样本数据. 我们首先选择 Db-8 小波对原始序列 $X(n)$ 进行多分辨率分解到第 3 层, 然后用分解的第 3 层低频系数和经过阈值处理后的每一层的高频系数重构得到修正的序列 $Y(n)$,

这样就可以通过对序列 $Y(n)$ 的分析, 来了解股市波动的局部奇异性、不同层次的波动奇异性存在与否, 即进行多重分形结构辨识. 图 1 给出了上证指数和深圳成分指数原始时序图和去噪后的时序图.

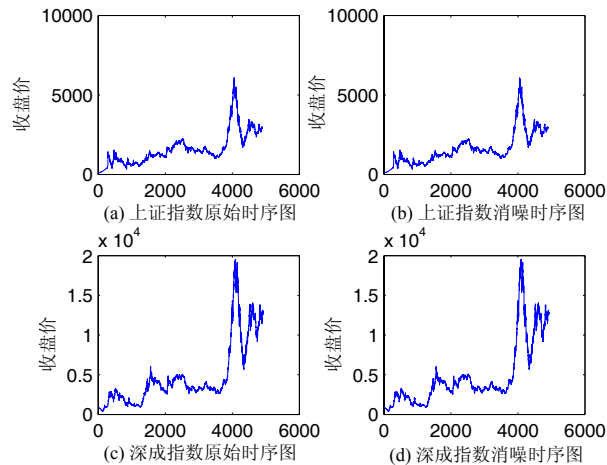


图 1 基于多分辨分析剔除指数收盘价序列的噪声干扰

3 多重分形分析^[19]

对于已经证明具有单分形特征的非线性过程, 进一步检验该过程是否具有多重分形特征, 需要计算一些广义分形参数来刻画过程的局部分形特征, 如果这些参数具有时变或域变特性, 说明过程具有多重分形性质, 表现出比理想单分形过程更加复杂和不规则的波动特征. 下面给出本文将要检验的主要的广义分形参数.

3.1 尺度函数

定义 1 若过程 $X(t), t \in T$ 具有平稳增量且满足

$$E(|X(t + \Delta t) - X(t)|^q) = c(q)(\Delta t)^{\tau(q)+1}, \forall t \in T, q \in Q \quad (5)$$

则称 $X(t)$ 是一个多重分形过程. 其中 $\tau(q)$ 常称为多重分形过程的尺度函数或质量指数, $\tau(q)$ 是关于 q 的非线性函数, 若 $\tau(q)$ 关于 q 是线性的, 则 (5) 式描述的多重分形过程就退化成单分形过程.

3.2 多重分形谱

定义 2 给定函数 $X(t)$, 假设它在 t 时刻的某个邻域有定义, 若 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 函数的波动满足

$$|X(t + \Delta t) - X(t)| = C_t(\Delta t)^{\alpha(t)} \quad (6)$$

则不断重复将区间 $[0, T]$ 划分成 b^k 个等长的子区间 (k 为划分的阶段), $N_k(\alpha)$ 为 (第 k 阶段划分) 包含 $\alpha(t)$ 的子区间个数, 若

$$f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{\log N_k(\alpha)}{\log(b^k)} \right] \quad (7)$$

在比一个点更大范围内有定义而且取正数, 那么 $X(t)$ 是一个多重分形过程, $\alpha(t)$ 和 $f(\alpha)$ 分别称为过程 $X(t)$ 的 Holder 指数和多重分形谱. 在上述定义中, 局部 Holder 指数 $\alpha(t)$ 的大小决定着股市波动过程在某局部上的光滑或不规则程度, 连续变化的局部 Holder 指数, 描述了波动在不同时间局部上的不均匀性变化. 多重分形的最深刻本质就是局部尺度特征的多样性, 也就是其 Holder 指数取值具有多样性. 因此, 该定义从过程的局部行为特性出发提供了对多重分形过程更加直观的理解和解释. 多重分形谱 $f(\alpha)$ 表征了在股市波动过程中随机抽取的时点具有 Holder 指数 $\alpha(t)$ 的概率, 因而方便描述 Holder 指数 $\alpha(t)$ 的概率分布. 这样, 多重分形谱就成为检测过程是否存在多重分形结构的有力工具.

4 基于 WTMM 的多重分形谱的计算方法

4.1 小波变换模极大方法

小波变换模极大的思想最初是由 Mallat 和 Zhong^[20] 在信号处理的研究实践当中提出来的. 它是受到 Mallat^[21] 早期将信号做小波投影以提供一个多分辨率表示的启发而形成的, 随后, Muzy^[22] 将其成功用于对湍流的分析以解决在该过程中的实验数据处理问题. 同样, WTMM 方法也可以用来解决证券市场的实测数

据处理问题. 下面给出 WTMM 数学构架 [23].

$$W_f(a, b) = \int_{Rf(x)} \Psi^*_{(a,b)}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{Rf(x)} \Psi^* \left[\frac{x-b}{a} \right] dx \quad (8)$$

a 为尺度因子, b 为平移因子, $*$ 表示复共轭, $\Psi(x)$ 为母小波函数, 满足允许性条件. 一般常用的小波为 Gaussian 小波, 其定义为:

$$\Psi^N(x) = \frac{d^N}{dx^N} [\exp(-x^2/2)] \quad (9)$$

Gaussian 小波具有 n 阶消失矩, 此性质能够保证模极大曲线延伸到最细的尺度. 对于小波变换式 (8) 固定尺度参数 a 时, 在 x 的邻域内, 若 $|W_f(a, x_0)| > |W_f(a, x)|$, 则称 x_0 为 $W_f(a, b)$ 的一个局部极大值点. 这些极大值 x_0 的连线称为模极大线族, 简称模极大.

4.2 利用 WTMM 计算多重分形谱 [24]

对于由不同分形行为的子集叠加而成的具有非均匀分维分布的复杂奇异集合, 小波变换不仅反映了其构造域的局部变化特性, 而且可以用于直接提取其整体分形结构的谱域信息.

文献 [24] 指出, 对于一个多重分形, 其小波变换存在一些模极大值, 且其中 α 是

$$|W_f(a, b)| \sim a^{\alpha+1/2} \quad (10)$$

局部 Holder 指数 (奇异指数). 要注意应用的小波函数当 $N > \alpha$ 阶消失矩时 (10) 式才是成立的. 上文的高斯小波就满足此条件. 用 $\{b_l(a)\}_{l \in Z}$ 来表示尺度 a 对应的 $|W_f(a, b)|$ 极大值点的位置, 极大值点的个数满足:

$$N_\alpha(a) \sim a^{-f(\alpha)} \quad (11)$$

其中 $f(\alpha)$ 就是多重分形奇异谱. 定义配分函数 [15,22]:

$$Z(q, a) = \sum_l |W_f(a, b)| \sim a^{\tau(q)} \quad (12)$$

可以得到:

$$\tau(q) = \min(q(\alpha + 1/2) - f(\alpha)) \quad (13)$$

通过计算配分函数值得到尺度函数 $\tau(q)$, 就可以确定多重分形奇异谱 $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \min(q(\alpha + 1/2) - \tau(q)) \quad (14)$$

以上是利用 WTMM 计算多重分形奇异谱的理论基础, 下面给出其算法框架:

第一步: 选取适当的小波函数, 计算小波变换 $W_f(a, b)$ 选出其在每一尺度下的模极大值点. 需要说明的是, 为了度量所有奇异指数, 必须使用具有足够高阶消失矩的小波, 例如 Gaussian 小波.

第二步: 通过 (12) 式计算配分函数 $Z(q, a)$.

第三步: 用线性回归计算尺度函数 $\tau(q)$: $\log_2 Z(q, a) \approx \tau(q) \log_2 a + C(q)$.

第四步: 通过 (14) 式计算多重分形奇异谱.

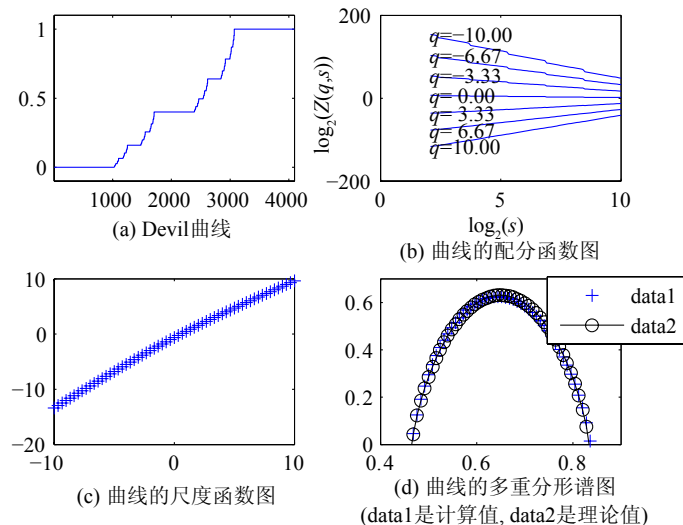


图 2 基于 WTMM 方法的 Devil 曲线多重分形辨识

4.3 WTMM 方法的有效性检验

利用 matlab 软件和 wavelab 工具箱画出 Cantor 二分集序列 (生成元为 0.6,0.4) 的累计轮廓序列, 也就是 Devil (魔鬼) 曲线. 图 2 是使用 WTMM 方法对其的计算结果图, 小波函数选用高斯函数的一阶导数, 序列的个数为 4096 个. 通过图 2 的子图 (d) 可以看出: 计算值 data1 与理论值 data12 吻合的很好 (注: 理论值的计算参考文献 [14]).

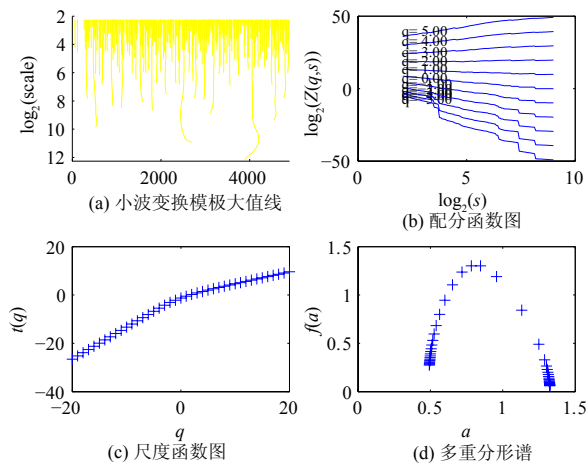


图 3 基于 WTMM 方法的上证指数多重分形辨识

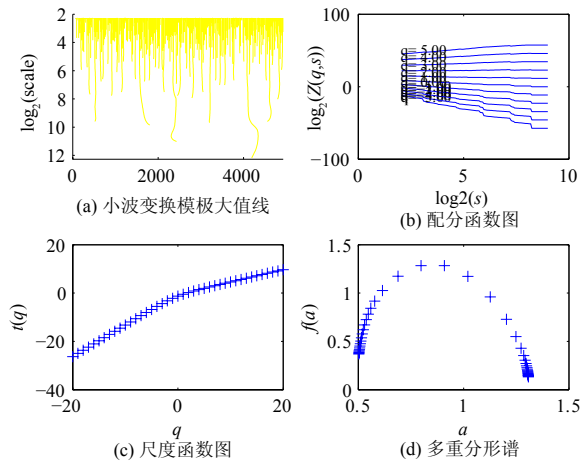


图 4 基于 WTMM 方法的深成指数多重分形辨识

5 股市波动的多重分形实证研究

对 2.2 中已完成去噪的样本序列, 选用 Gaussian 连续小波, 利用 WTMM 方法对其进行多重分形仿真研究. 仿真结果如图 3-图 4. 图 3 和图 4 中展示出了: 对去噪后的信号进行连续小波变换得到的小波变换模的极大值点再连接这些极大值点得到的小波变换模的极大值线图, 通过 WTMM 方法得到的配分函数图, 通过线性拟合得到的尺度函数图, 经过变换得到的多重分形谱图. 其中图 3 是上证指数相关仿真结果图, 图 4 是深成指数的仿真结果图. 图 3 的 d 子图和图 4 的 d 子图清晰表明: 当 α 在一定范围变化时, 多重分形谱函数 $f(\alpha)$ 图像显著非线性, 说明利用多分辨分解剔除噪声后, 基于 WTMM 框架进行的中国股票市场多重分形特征辨识, 辨识结果更加稳健可靠. 从波动序列的尺度函数图亦可以看出: 序列的尺度函数 $\tau(q)$ 和 q 都呈现一种非线性的关系, 再次验证中国证券市场多重分形结构的存在, 奇异谱 $f(\alpha)$ 的最大宽度 $\Delta\alpha = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ 是多重分形的一个重要参量, 它描述了测度分布的非均匀的程度和系统发展是否充分的程度, 一般来说, $\Delta\alpha$ 越大表明概率分布越不均匀, $\Delta\alpha$ 越小分形区分布越均匀. 而本文的实证结果显示上证指数波动序列多重分形谱的 $\Delta\alpha = 0.85$, 深圳成分指数波动序列 $\Delta\alpha = 0.82$, 从而表明中国股票市场的波动序列的分形分布十分不均匀.

6 结论与展望

本文利用多分辨分析去除原始序列噪声, 并在此基础上, 借助 WTMM 框架完成中国证券市场波动局部奇异性多重分形辨识, 主要有以下结论: 1) 利用多分辨分析消除了序列噪声的同时凸现序列的波动成分, 使得后续多重分形的辨识工作更加稳定可靠; 2) 新框架下仿真结果表明, 中国股票市场具有显著可靠的多重分形特征, 这些时变参数对市场波动的预测研究有重要价值; 3) 较之于 MF-DFA 框架下的辨识计算, 利用 WTMM 理论进行证券市场多重分形特征提取, 计算更加简洁且易于使用.

我们在研究中发现: 利用 WTMM 可以方便的近似求出多分形谱, 但是由于它采用了配分函数, 在 q 取负值时, 会将微小的计算误差放大, 因此可以看到在负值区的值起伏很大, 而在正值区相对平稳, 用 WTMM 计算出来的值和解析值有一定的误差. 因此在准确分析 $q < 0$ 的情况时, 会由于微小计算误差导致计算结果与实际情况有较大的误差, 如何更好地找出能准确反映复杂系统奇异指数的区间, 有待于后续不断的研究.

参考文献

- [1] 陈国进, 王占海. 我国股票市场连续性波动与跳跃性波动实证研究 [J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1554-1562.

- Chen G J, Wang Z H. Continuous volatility and jump volatility in China's stock market[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(9): 1554–1562.
- [2] 王文波, 费浦生, 羿旭明. 基于 EMD 与神经网络的中国股票市场预测 [J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(6): 1027–1033.
Wang W B, Fei P S, Yi X M. Prediction of China stock market based on EMD and neural network[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2010, 30(6): 1027–1033.
- [3] Lo A W. Long-term memory in stock market prices[J]. *Econometrica*, 1991, 59: 1279–1314.
- [4] Peters E E. *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*[M]. Economic Science Press, 2002.
- [5] Lux T, Marches M. Scaling and criticality in a stochastic multagent model of a financial market[J]. *Nature*, 1999, 397(11): 498–500.
- [6] 樊智, 张世英. 金融市场的效率与分形市场理论 [J]. *系统工程理论与实践*, 2002, 22(3): 13–19.
Fan Z, Zhang S Y. Efficiency of financial market and fractal market theory[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2002, 22(3): 13–19.
- [7] 曹广喜, 史安娜. 上证指数的分形特征分析 [J]. *生产力研究*, 2007, 12: 44–46.
Cao G X, Shi A N. The Shanghai composite index of the fractal characteristics analysis[J]. *Productivity Research*, 2007, 12: 44–46.
- [8] Calvet L, Fisher A. Multifractality in asset returns: Theory and evidence[J]. *The Review of Economics and Statistics*, 2002, 84: 381–406.
- [9] Onali E, Goddard J. Unifractality and multifractality in the Italian stock market[J]. *International Review of Financial Analysis*, 2009, 18: 154–163.
- [10] Stavroyiannis S, Makris I, Nikolaidis V. Non-extensive properties multifractality and inefficiency degree of the Athens Stock Exchange General Index[J]. *International Review of Financial Analysis*, 2010, 19(1): 19–24.
- [11] 黄谔蓉. 中国股票市场多重分形结构的实证研究 [J]. *当代财经*, 2004, 11: 53–56.
Huang Y R. China's stock market multifractal structure of empirical research[J]. *Contemporary Finance & Economics*, 2004, 11: 53–56.
- [12] 卢方元. 中国股市收益率的多重分形分析 [J]. *系统工程与理论实践*, 2004, 24(6): 50–54.
Lu F Y. The multifractal analysis on stock market returns in China[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2004, 24(6): 50–54.
- [13] 都国雄, 宁宣熙. 上海证券市场的多重分形特性分析 [J]. *系统工程与理论实践*, 2007, 27(10): 40–47.
Du G X, Ning X X. Multifractal analysis on Shanghai stock market[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2007, 27(10): 40–47.
- [14] 傅强, 周宇欢, 王亮. 湍流与蠕虫的 DNA 序列的多重分形谱分析 [J]. *解放军理工大学学报: 自然科学版*, 2010, 11(5): 572–577.
Fu Q, Zhou Y H, Wang L. Multi-fractal spectrum for signal time series of turbulence and worm DNA[J]. *Journal of PLA University of Sciences and Technology: Natural Science Edition*, 2010, 11(5): 572–577.
- [15] Giaouris D, Finch J W. Denoising using wavelets on electric drive applications[J]. *Electric Power Systems Research*, 2008, 78(4): 559–565.
- [16] 杨福生. *小波变换的工程分析与应用* [M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [17] 余俊. *证券市场的分形特征研究* [D]. 青岛: 青岛大学, 2008.
Yu J. Study on fractal characteristics in securities market[D]. Qingdao: Qingdao University, 2008.
- [18] 张德丰. *小波分析与工程应用* [M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.
- [19] 罗世华, 曾九孙. 基于多分辨率分析的高炉铁水含硅量波动多重分形辨识 [J]. *物理学报*, 2009, 58(1): 150–157.
Luo S H, Zeng J S. Multi-fractal identification of the fluctuation of silicon content in blast furnace hot metal based on multi-resolution analysis[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(1): 150–157.
- [20] Mallat S, Zhong S. Characterization of signals from multiscale edges[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1992, 14: 710–732.
- [21] Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, 11: 674–693.
- [22] Muzy J F, Bacry E, Arneodo A. Multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data[J]. *Phys Rev Lett*, 1991, 67: 3515–3518.
- [23] 马瑞恒, 李钊, 王伟策, 等. 基于小波变换模极大的爆破震动信号奇异谱分析 [J]. *爆炸与冲击*, 2004, 24(6): 529–533.
Ma R H, Li Z, Wang W C, et al. The singular spectrum analysis of blasting vibration signal based on WTMM[J]. *Explosion and Shock Waves*, 2004, 24(6): 529–533.
- [24] 陈颀, 陈凌. *分形几何学* [M]. 2 版. 北京: 地震出版社, 2005.