

文章编号:0253-9993(2013)S1-0082-06

二级新型悬臂式挡土墙主动土压力计算方法

王景环^{1,2}, 卢义玉^{1,2}, 郭建强³, 杜鹏^{1,2}, 黄辉^{1,2}

(1. 重庆大学 煤矿灾害动力学与控制国家重点实验室 重庆 400030; 2. 复杂煤层瓦斯开采国家地方联合工程实验室, 重庆 400030; 3. 重庆大学 土木工程学院 重庆 400045)

摘要:基于土的塑性极限分析理论,考虑滑裂面上填土黏聚力及填土与二级新型悬臂式挡土墙背接触面上的黏着力,研究了挡土墙土压力受力分析模式,取墙后滑动土体的水平薄层单元进行受力分析,建立极限状态下悬臂式挡土墙主动土压力的一阶微分方程,给出了土压力强度、土压力合力、土压力作用点的理论计算公式。研究表明,二级新型悬臂式挡土墙上墙应力分布呈抛物线形状;下墙的应力分布类似于梯形分布,最大值出现在挡墙的底部,最小值出现在挡墙的中部。通过有限元数值分析法研究其受力变形特点,数值分析表明:二级挡土墙卸荷作用比较明显,且土自重二级挡土墙中得到了充分的利用;挡土墙主动土压力分布与模拟结果基本一致。

关键词:二级悬臂式挡土墙;主动土压力;计算方法;有限元;极限状态

中图分类号:U417.11;TU432 **文献标志码:**A

Active earth pressure calculation method of two level new structure of cantilever retaining wall

WANG Jing-huan^{1,2}, LU Yi-yu^{1,2}, GUO Jian-qiang³, DU Peng^{1,2}, HUANG Hui^{1,2}

(1. Laboratory for Coal Mine Disaster Dynamic Sand and Control, Chongqing University, Chongqing 400030, China; 2. National & Local Joint Engineering Laboratory of Gas Drainage in Complex Coal Seam, Chongqing 400030, China; 3. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: Based on soil plasticity and limit analysis theory, the consideration of the cohesion force on the sliding plane, the adhesive force on the interface of between soil and two level structure of cantilever retaining wall, the model of earth pressure was studied. After forcing analysis to horizontal slice element of sliding soil behind the retaining wall, the first order differential equations for active earth pressure on the retaining wall were set up under limit state, then the strength of the limit state earth pressure for retaining wall with mode of translation, the resultant force of earth pressure and its application point were obtained. The results show that the stress distribution of upper and lower part of two level new structure of cantilever retaining wall are observed to present a parabola style and trapezium distribution separately. The maximum and minimum respectively occurred in the bottom and middle of retaining wall. Then, the deformations of retaining back and stresses of backfill were analyzed by elastoplastic numerical calculation model to simulate construction conditions. The numerical analysis results indicate that unloading effect about two level new structure of cantilever retaining wall is obvious. It is also proved that the gravitational stress is fully utilized and the stress distribution under limit state has a satisfying agreement with the simulation numerical.

Key words: two level structure of cantilever retaining wall; active earth pressure; calculation method; FEM; limit state

挡墙后主动土压力的计算一直是学术界关注的焦点,常用的研究方法主要有极限平衡法^[1-2]、极限分析法^[3]、特征线法^[4-5]和数值模拟法^[6-7]。文献

[1-2]采用对数螺旋线及直线组成的复合破坏面分析挡土墙的地震土压力问题,但在计算过程中事先假设了土压力的作用点位置。文献[3]利用运动学的

极限分析结合拟静力分析法得到了静力和动力土压力系数的上限解,但分析中也假设了土压力的作用点高度。文献[4-5]利用滑移线法结合拟静力分析得到了挡土墙极限状态下的土压力系数,也采用了土压力作用在 1/3 墙高处的假设。文献[6-7]采用有限元软件分析挡土墙极限主动和被动土压力及周围土体的变形特性,但存在模型的选取和假设是否合理等问题。顾慰慈^[8]基于极限平衡原理推导了黏性土主动土压力的精确解,但对超载和开裂的处理比较复杂;胡晓军^[9]对该精确解进行了改进;林智勇等^[10]进一步应用微分层解析法得到了黏性土主动土压力的解析解,但文中采用朗肯土压力理论的土体开裂深度,未考虑墙背倾斜和墙土间黏聚力的影响,特别当采用微分层解析法时,还会因未能详尽考虑土体开裂区域,引起土压力分布值、合力值及作用点位置计算结果的偏差;李永刚^[11]利用水平层分析法,基于主应力拱的概念对墙背竖直且墙后填土水平情况下无黏性土的土压力分布进行了考察,给出大主应力拱方程,并分析了土压力的分布规律;张永兴等^[12]用改进的库伦极限平衡理论研究主动土压力理论,讨论了填土内摩擦角、墙土摩擦角和挡土墙位移比对土侧压力系数、土压力强度、土压力合力、土压力合力作用点的影响;王奎华等^[13]利用变分的方法求解滑裂面方程和主动土压力计算公式,通过工程测试对比说明了该公式的可行性。

笔者考虑填土与墙体之间的关系,认为挡土墙土压力是由墙后填土在极限平衡状态下出现的滑动楔体产生,采用类似于有减压平台的挡土墙进行整体的土压力计算。在该滑动楔体上沿竖向取水平薄层作为微分单元体,通过作用在单元体上的水平力、平均竖向力,建立挡土墙极限状态主动土压力基本方程,并结合整个滑楔体的力矩平衡条件,将其用于水平微分单元体求解挡土墙极限状态主动土压力,分别建立了挡土墙土压力强度、土压力合力、土压力作用点的理论计算公式,改进了现有计算方法的不足,明确了土压力的分布特征、合力作用点位置,并提出了二级悬臂式挡土墙主动土压力实用计算模型。

1 主动土压力分析及公式推导

1.1 力学分析模型

设想从土体 $ABCF$ 中取出一个厚度为 dz , 距填土表面的深度为 z 的微分土层 $abcd$, 则在该微分土层上的作用力如图 1 所示。

在微分土层上作用有土层的重力 g , 作用方向竖直向下;土层顶面的竖直正应力 q , 均匀分布

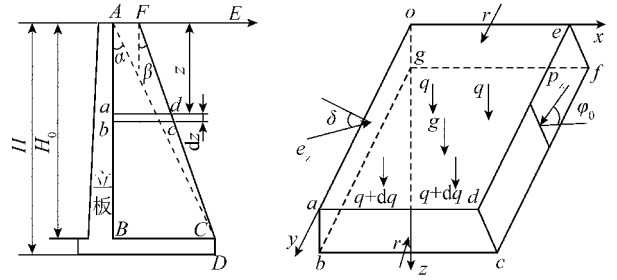


图 1 土压力简化计算模型

Fig. 1 Simplified calculation model of earth pressure

在土层顶面 $oade$ 上,作用方向向下;土层底面的的竖直正应力 $(q+dz)$, 均匀分布在土层底面 $bcfg$ 上,作用方向向上;在计算墙面 $defc$ 上作用有主动土压力 p_z , 均匀分布在面积 $defc$ 上,作用方向指向立板, φ_0 为计算墙面上土压力 p_z 与墙面法线之间的夹角,位于法线的上方;在靠立板的平面 $oabg$ 上,作用有侧向土压力 e_z , 均匀分布在 $oabg$ 面上,作用方向指向填土,作用线与 $oabg$ 平面的法线成 δ 角,位于法线的下方;考虑到沿挡土墙长度方向,土体之间无相对位移,故在土层两侧平面 $abcd$ 和 $oefg$ 上法向反力 r ,作用方向指向土层。

1.2 上挡墙土压力理论推导

建立如图 1 所示的坐标系,其中 β 为计算墙面与竖直面之间的夹角; φ 为填土的内摩擦角; δ 为填土与立板背面之间的摩擦角; b_0 为墙顶面上 AF 的长度; α 为立板背面(靠填土面)与竖直面之间的夹角; e_z 为作用在立板上的侧向土压力; p_z 为作用在计算墙面上的填土主动土压力强度; γ 为填土的容重; z 为计算点距填土表面的深度; c 为填土的凝聚力; q_0 为作用在填土表面的均布荷载; K_a 为主动土压力系数。

由作用于微分单元体水平方向力的平衡条件 $\sum x = 0$, 并结合图 1 中的几何关系得

$$e_z \frac{\sin(90^\circ - \alpha - \delta)}{\cos \alpha} dz - p_z \frac{\sin(90^\circ - \beta - \varphi_0)}{\cos \beta} dz = 0 \quad (1)$$

$$p_z = \gamma z K_a - 2c \sqrt{K_a} + q_0 K_a \quad (2)$$

同理可得 $\sum y = 0$

即

$$r - r = 0 \quad (3)$$

垂直方向力平衡,即 $\sum z = 0$, 略去二阶微量后,简化得

$$q [b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] - (q + dz) [b_0 + (z + dz)(\tan \beta - \tan \alpha)] - e_z \frac{\cos(90^\circ - \alpha - \delta)}{\cos \alpha} dz +$$

$$p_z \frac{\cos(90^\circ - \beta - \varphi_0)}{\cos \beta} dz + \gamma [b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] dz = 0 \quad (4)$$

略去二阶微量后,上式变为

$$\begin{aligned} & -dq [b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] - \\ & q(\tan \beta - \tan \alpha) dz - e_z \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos \alpha} dz + \\ & p_z \frac{\sin(\beta + \varphi_0)}{\cos \beta} dz + \\ & \gamma [b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] dz = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

将式(1)代入式(6)得

$$\begin{aligned} & -dq [b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] - \\ & q(\tan \beta - \tan \alpha) dz + p_z \frac{\cos(\beta + \varphi_0)}{\cos \beta} \times \\ & [\tan(\beta + \varphi_0) - \tan(\alpha + \delta)] dz + \\ & \gamma [b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] dz = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

将式(6)除以 $[b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)] dz$, 则得

$$\begin{aligned} & \frac{dq}{dz} + q \frac{(\tan \beta - \tan \alpha)}{[b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)]} = \\ & \gamma + p_z \frac{\cos(\beta + \varphi_0)}{\cos \beta} [\tan(\beta + \varphi_0) - \tan(\alpha + \delta)] \times \\ & \frac{1}{[b_0 + z(\tan \beta - \tan \alpha)]} \quad (7) \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} \lambda = \frac{b_0}{\tan \beta - \tan \alpha} \\ \zeta = K_a \frac{\cos(\beta + \varphi_0)}{\cos \beta} \frac{[\tan(\beta + \varphi_0) - \tan(\alpha + \delta)]}{(\tan \beta - \tan \alpha)} \\ \mu = q_0 - \frac{2c}{\sqrt{K_a}} \end{cases} \quad (8)$$

则式(7)可简写为

$$\frac{dq}{dz} + \frac{1}{\lambda + z} q = \gamma + \frac{(\gamma z + \mu)\zeta}{\lambda + z} \quad (9)$$

再令

$$\begin{cases} Q(z) = \frac{1}{\lambda + z} \\ F(z) = \gamma + \frac{(\gamma z + \mu)\zeta}{\lambda + z} \end{cases}$$

则式(9)可进一步简写为

$$\frac{dq}{dz} + Q(z)q = F(z) \quad (10)$$

式(10)为一阶非齐次线性方程,其通解为

$$q = e^{-\int_0^z Q(z) dz} \left(\int_0^z F(z) e^{\int_0^z Q(z) dz} dz \right) + C \quad (11)$$

式(11)中各部分的积分为

$$\begin{aligned} & \int_0^z Q(z) dz = \int_0^z \frac{1}{\lambda + z} dz = \ln \frac{\lambda + z}{\lambda} \\ & e^{\int_0^z Q(z) dz} = \frac{\lambda + z}{\lambda} \\ & \int_0^z F(z) e^{\int_0^z Q(z) dz} dz = \\ & \int_0^z \left[\gamma + \frac{\gamma z + \mu \zeta}{\lambda + z} \right] \frac{\lambda + z}{\lambda} dz = \\ & \left[\frac{\gamma + \mu \zeta}{\lambda} \left(\lambda z + \frac{1}{2} z^2 \right) + \frac{\gamma \zeta}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \lambda z^2 + \frac{1}{3} z^3 \right) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

将式(12)代入通解求得:

$$q = \frac{\lambda}{\lambda + z} \left[\frac{\gamma}{\lambda} \left(\lambda z + \frac{1}{2} z^2 \right) + \frac{\zeta}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \gamma z^2 + \mu z \right) \right] + C \quad (13)$$

式(13)中的常数 C 可根据下列边界条件求得:在填土表面作用均布荷载 q_0 的情况下,当 $z=0$ 时, $q=q_0$,故由公式得 $C=q_0$;无荷载作用的情况下,当 $z=0$ 时 $q=0$,故由公式得 $C=0$ 。

同理可推出底板上的竖直土压力、实际墙背上的侧向土压力分别为:

(1)当填土表面作用均布荷载 q_0 时,作用在底板上的竖直方向的土压力、实际墙背上的侧向土压力为

$$\begin{aligned} q &= \frac{\lambda}{\lambda + H_0} \left[\frac{\gamma}{\lambda} \left(\lambda H_0 + \frac{1}{2} H_0^2 \right) + \right. \\ & \left. \frac{\zeta}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \gamma H_0^2 + \mu H_0 \right) \right] + q_0 + \frac{c}{\tan \varphi} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{1}{2} \gamma H_0^2 K_a + q H_0 K_a - 2c H_0 \sqrt{K_a} \right) \times \\ & \frac{\cos \alpha \cos(\beta + \varphi_0)}{\cos \beta \cos(\alpha + \delta)} \quad (15) \end{aligned}$$

(2)当填土表面无荷载作用时,作用在底板上的竖直方向的土压力、实际墙背上的侧向土压力

$$\begin{aligned} q &= \frac{\lambda}{\lambda + H_0} \left[\frac{\gamma}{\lambda} \left(\lambda H_0 + \frac{1}{2} H_0^2 \right) + \frac{\zeta}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \gamma H_0^2 + \mu H_0 \right) \right] + \\ & \frac{c}{\tan \varphi} \quad (16) \end{aligned}$$

$$E = \left(\frac{1}{2} \gamma H_0^2 K_a - 2c H_0 \sqrt{K_a} \right) \frac{\cos \alpha \cos(\beta + \varphi_0)}{\cos \beta \cos(\alpha + \delta)} \quad (17)$$

(3)作用在底板上的总的竖直土压力

$$Q = q [b_0 + H_0(\tan \beta - \tan \alpha)] \quad (18)$$

1.3 下挡墙土压力计算

首先要判定下墙是否会产生第2破裂面,产生第2破裂面满足 $\beta > \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$ 。为了简化土压力计

算以及数值模拟方便,将上墙作用等效均布荷载计算,具体见计算简图 2, h_0 为上挡墙荷载等效高度; Z_x, Z_y 分别为作用点位置; H_1 为立板高度; E_x, E_y 分别为作用在立板上的侧向土压力。当不产生第 2 破裂面时,悬臂式挡墙墙底与墙顶连线作为计算墙面进行计算, $\beta = \alpha_i, \beta_i = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ 。

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H_1 (H_1 + 2h_0) K_a \quad (19)$$

$$\alpha_i = \beta_i = 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_x &= E_a \cos(\alpha_i + \varphi) \\ E_y &= E_a \sin(\alpha_i + \varphi) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{H_1 \left(1 + \frac{h_0}{H_1 + 2h_0} \right)}{3} \\ Z_y &= B - Z_x \tan \alpha_i \end{aligned} \quad (22)$$

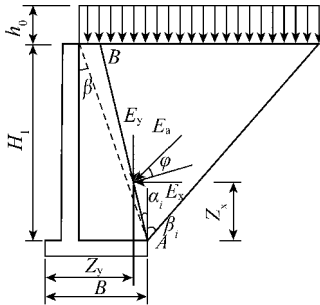


图 2 下墙土压力简化计算示意

Fig. 2 Simplified calculation scheme of earth pressure under wall

2 有限元分析

2.1 分析模型

将纵横比大的悬臂式挡土墙简化为二维的平面应变问题。采用适合于实际土体的二维弹塑性模型有限元分析。

2.2 本构模型^[14-17]

采用弹塑性模型、相关联的流动法则, Mohr-Coulomb 屈服准则较为符合岩土和混凝土材料的屈服和破坏特征,故采用 Mohr-Coulomb 屈服准则。在塑性屈服以前服从弹性应力-应变关系,塑性屈服以后,应力与应变增量均服从弹塑性本构关系。

2.3 荷载模型

在挡土墙有限元分析范围内,由于没有外力(墙面风荷载相对较小,可以忽略,对计算结果影响不大),只有重力的作用,故荷载只考虑重力荷载。

2.4 有限元网格

采用平面应变的有限元进行分析,同时考虑地基岩层的变形影响。选用单元类型的原则是:用最少数

目的单元达到最高的计算精度且使运算时间最少。另外为了避免出现病态刚度矩阵,提高计算精度,必须使相邻单元之间的刚度不能相差过于悬殊,划分有限元网格时,在土与挡土墙结构物之间加一过渡单元。故采用 Adina 在计算时所用的是平面四节点等参元和 Gauss 积分方式^[16],划分网格时采用映射网格划分,如图 3 所示,在填土范围内以及计算墙面内网格加密,有限元网格边界约束条件:顶部表面自由,两侧边界水平约束,底边界竖向均约束。

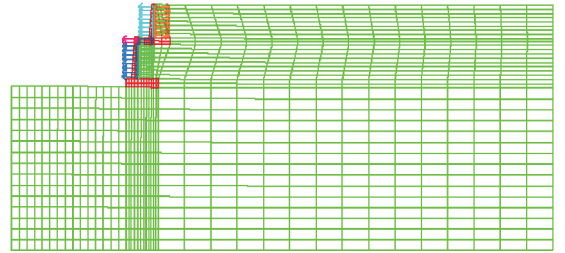


图 3 悬臂式挡墙网格划分

Fig. 3 Grid partition figure of cantilever retaining wall

2.5 材料计算参数

结合贺家坪连接线工程中 K5+360 ~ K5+470 段实际二级挡土墙结构的设计资料,从安全的角度给出了数值分析的各项参数(表 1)。挡墙实际墙背与填土之间的摩擦因数为 0.3,计算如图 4 所示。

表 1 数值分析参数汇总

Table 1 Parameters summary of numerical analysis

项目	杨氏弹性模量 E/MPa	泊松比 ν	容重 $\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	黏聚力 c/kPa	内摩擦角 $\varphi/(\circ)$
墙背天然土	8.0	0.25	20	35	28
墙背填土	3.5	0.28	18	0	30
地基土	8.0	0.25	19	35	28
钢筋混凝土	25 000.0	0.22	25	3 000	58

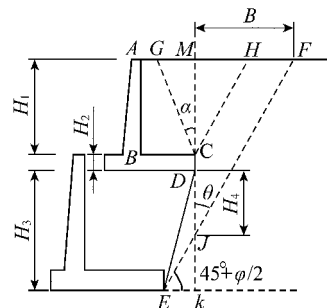


图 4 土压力计算

Fig. 4 Calculation diagram of earth pressure

3 有限元结果对比分析

挡土墙水平应力如图 5 所示,从图中可以看出,土颗粒之间及与墙相互摩擦作用,导致上墙底板内、

下墙踵板内均处产生了较大正应力;上墙趾与立板交接处产生了较大的压应力,墙后的水平应力分布较均匀;下墙墙趾处土体中应力相对较大。



图 5 悬臂式挡土墙水平应力云图

Fig. 5 Horizontal stress nephogram of cantilever retaining wall

上、下墙立板处水平应力如图 6 所示,从图 6 可看出,类似于三角形的土压力分布,上、下墙 0.75 m

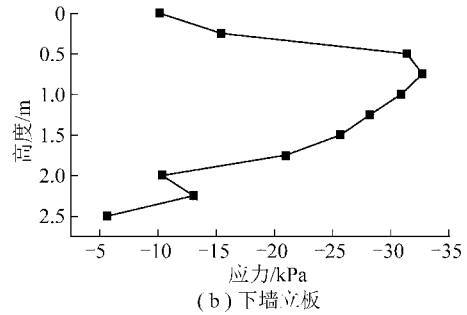
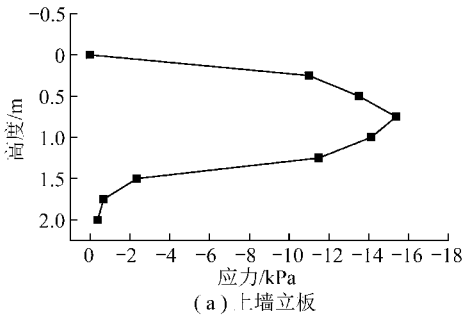


图 6 立板水平应力

Fig. 6 Horizontal stress of made board

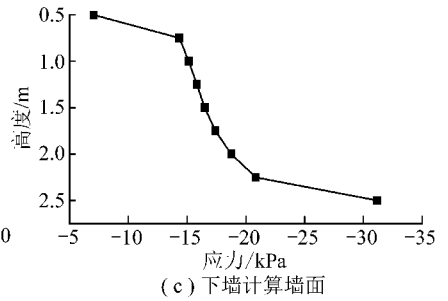
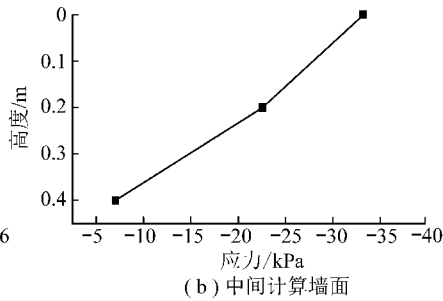
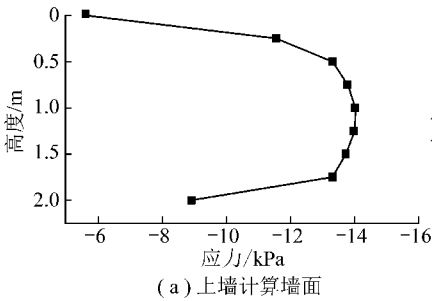


图 7 计算墙面水平应力

Fig. 7 Horizontal stress of calculation metope

对比图 6(b)、图 7(c) 得知:① 下墙面与立板之间应力相差较大;② 填土传递作用力随填土高度线性变化规律区别较大。对比图 6(a)、7(a) 得知,上墙计算墙面应力与上墙立板应力相比并不相差很大,可能的原因是与挡墙的高度有关。

4 结 论

(1) 二级悬臂式挡墙上墙应力分布呈抛物线形状;下墙的应力分布类似于梯形分布,最大值出现在挡墙的底部,最小值出现在挡墙的中部。

(2) 数值分析表明:二级挡墙卸荷作用比较明显

处均呈现拐点,大小随墙高的增加而减小,且在 2.25 m 处有个极值点;上墙立板的土压力 13.9 kN/m,解析计算结果 9.68 kN/m;下墙立板土压力 37.5 kN/m,解析计算结果 33.725 kN/m。通过对比分析,有限元计算结果同解析计算结果比较吻合,表明上下墙的局部简化计算合理。

从计算墙面的应力图 7 中可以看出,上、中、下墙计算墙面的应力分布区别明显:① 上墙计算墙面应力 0.50 m 处以上随墙高增加而增加,在 0.50 ~ 1.75 m 应力呈抛物线分布,而在 2 m 处应力变小,整体分布呈抛物线;② 中墙呈折线退减分布;③ 下墙计算墙面呈梯形分布,下墙计算墙面顶点处有一定的应力作用,应该是上墙墙底应力传递所致,下墙计算墙面最大应力发生在底部。

且土的自重二级挡墙中得到了充分的利用。考虑计算简化和数值模拟与实际工况有一定差异。

(3) 推导了主动土压力理论计算公式具有一定的工程意义,但由于土压力计算的复杂性,有待于实测值进一步验证。

(4) 挡土墙主动土压力分布规律与模拟结果基本一致,数值模拟简化与实际工况有一定差异,故解析解及其与有限元计算结果存在一定的误差。

参考文献:

[1] Morrison E E, Ebeling R M. Limit equilibrium computation of dy-

- dynamic passive earth pressure [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1995, 32: 481-487.
- [2] Subba Rao K S, Choudhury D. Seismic passive earth pressures in soils [J]. Journal of Geotechnical and Geo-environmental Engineering, 2005, 131(1): 131-135.
- [3] Soubra A H. Static and seismic passive earth pressure coefficients on rigid retaining structures [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2000, 37: 463-478.
- [4] Cheng Y M. Seismic lateral earth pressure coefficients for c-soils by slip line method [J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30: 661-670.
- [5] Kumar J. Seismic passive earth pressure coefficients for sands [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, 38: 876-881.
- [6] Benmebarek S, Khelifa T, Benmebarek S. Numerical evaluation of 3D passive earth pressure coefficients for retaining wall subjected to translation [J]. Computer and Geotechnics, 2008, 35: 47-60.
- [7] Day R A, Potts D M. The effect of interface properties on retaining wall behaviour [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1998, 22: 1021-1033.
- [8] 顾慰慈. 挡土墙土压力计算 [M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2000.
- Gu Weici. Calculation of earth pressure acting on retaining wall [M]. Beijing: China Building Materials Industry Press, 2000.
- [9] 胡晓军. 粘性土主动土压力库仑精确解的改进 [J]. 岩土工程学报, 2006, 28(8): 1049-1052.
- Hu Xiaojun. Improvement on coulumb accurate solution of active earth pressure to cohesive soil [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(8): 1049-1052.
- [10] 林智勇, 戴自航, 苏美选. 复杂条件下挡土墙主动土压力解析解 [J]. 岩土工程学报, 2008, 30(4): 555-559.
- Lin Zhiyong, Dai Zihang, Su Meixuan. Analytical solution of active earth pressure acting on retaining walls under complicated conditions [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(4): 555-559.
- [11] 李永刚. 挡土墙被动土压力研究 [J]. 岩土力学, 2003, 24(2): 273-276.
- Li Yonggang. Study on passive earth pressure of retaining wall [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003, 24(2): 273-276.
- [12] 张永兴, 陈林. 挡土墙非极限状态主动土压力分布 [J]. 土木工程学报, 2011, 44(4): 112-119.
- Zhang Yongxing, Chen Lin. Active earth pressure on retaining walls in non-limit state [J]. China Civil Engineering Journal, 2011, 44(4): 112-119.
- [13] 王奎华, 马少俊, 吴文兵. 挡土墙后曲面滑裂面下黏性土主动土压力计算 [J]. 西南交通大学学报, 2011, 46(5): 732-738.
- Wang Kuihua, Ma Shaojun, Wu Wenbing. Active earth pressure of cohesive soil backfill on retaining wall with curved sliding surface [J]. Journal Southwest Jiaotong University, 2011, 46(5): 732-738.
- [14] Owen D R J, Hilden E. 塑性力学有限元——理论与应用 [M]. 曾国平, 刘忠, 译. 北京: 兵器工业出版社, 1989.
- Owen D R J, Hilden E. Finite element plastic mechanics: theory and application [M]. Zeng Guoping, Liu Zhong, trans. Beijing: Weapon Industry Press, 1989.
- [15] Goodman R E, Taylor R L, Brekle T. A model for the mechanics of jointed rock [J]. J. Am. Soc. Civ. Eng., 1968, 94(SM3): 637-659.
- [16] 朱伯芳. 有限单元法原理和应用 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1997.
- Zhu Bofang. Principle and application of finite element method [M]. Beijing: China Water Power Press, 1997.
- [17] 潘昌实. 隧道力学数值分析 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1995.
- Pan Changshi. Numerical calculation for tunnel mechanics [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1995.