第 16 卷 第 2 期
2010 年 4 月
上 海 大 学 学 报 (自 然 科 学 版)
JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)
Vol. 16 No. 2
Apr. 2010

doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2010.02.012

半退化型离散哈密顿系统强极限点型的判定

周美秀[1,2], 王欣阵[1], 綦建刚[3]

(1. 浙江长征职业技术学院,浙江 杭州 310012; 2. 浙江教育学院,浙江 杭州 310012;
3. 山东大学威海分校,山东 威海 264209)

摘要: 讨论奇异的半退化型离散哈密顿系统,通过算子的谱理论得到该系统为强极限点型的判别准则.

关键词: 差分算子;极限点型;强极限点型.

中图分类号: O 175.75　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1007-2861(2010)02-0170-04

Strong Limit-Point Criteria for Semi-Degenerate Discrete Hamiltonian Systems

ZHOU Mei-xiu[1,2], WANG Xin-zhen[1], QI Jian-gang[3]

(1. Zhejiang Changzheng Vocational and Technical College, Hangzhou 310012, Zhejiang, China;
2. Zhejiang Education Institute, Hangzhou 310012, Zhejiang, China;
3. Shandong University at Weihai, Weihai 264209, Shandong, China)

Abstract: Sufficient conditions for strong limit-point case of semi-degenerate discrete Hamiltonian systems are obtained by using the spectral theory of self-adjoint operators in a Hilbert space.

Key words: difference operator; limit-point case; strong limit-point case

奇异离散哈密顿系统

$$\boldsymbol{J}\Delta \boldsymbol{y}(t) = [\lambda \boldsymbol{W}(t) + \boldsymbol{Q}(t)]\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}(t)),\quad t \in [0, +\infty) \cap \mathbf{Z}, \tag{1}$$

式中,Δ 为向前差分算子,即 $\Delta \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(t+1) - \boldsymbol{y}(t)$;$\boldsymbol{R}$ 为部分右移算子,即 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}(t)) = (\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}(t+1), \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}(t) = (\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}(t), \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{J}$ 为 $2n \times 2n$ 的标准辛单位矩阵,即 $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{I}_n & 0 \end{pmatrix}$;$\boldsymbol{W}(t)$ 为权矩阵函数且满足 $\boldsymbol{W}^*(t) = \boldsymbol{W}(t) \geqslant \boldsymbol{0}$($\boldsymbol{W}(t)$ 为半正定矩阵);$\boldsymbol{Q}(t)$ 为势矩阵函数且满足 $\boldsymbol{Q}^*(t) = \boldsymbol{Q}(t)$. 分别记

$$\boldsymbol{W}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1(t) & \boldsymbol{W}_3(t) \\ \boldsymbol{W}_3^* & \boldsymbol{W}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{C}(t) & \boldsymbol{A}^*(t) \\ \boldsymbol{A}(t) & \boldsymbol{B}(t) \end{pmatrix},$$

式中,* 表示矩阵的转置共轭. 该系统满足下述基本条件:

(1) 确定性条件[1],即对所有的 $\lambda \in \mathbf{C}$,系统(1)的所有非平凡解 y 都满足

$$\sum_{t=0}^{\infty} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})^*(t)\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})(t) > 0. \tag{2}$$

容易证明,确定性条件等价于控制性条件,即对于充

收稿日期:2009-07-10
基金项目:山东省自然科学基金资助项目(Y2008A02)
通信作者:周美秀(1969 ~),女,副教授,研究方向为微分方程. E-mail:zwy950120@163.com

分大的 $k\geqslant 0$,

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{y}_2(t)=0, & t\in[1,k],\\ \Delta\boldsymbol{y}_2(t)=-\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{y}_2(t), & t\in[0,k+1],\end{cases}\tag{3}$$

有且仅有解 $\boldsymbol{y}_2(t)\equiv\boldsymbol{0}$[2].

(2) 唯一性条件,$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[0,\infty)\cap\mathbf{Z}$ 为非奇异的.

当权矩阵函数 $\boldsymbol{W}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_1(t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W}_1(t)>0$ 时,系统(1)称为半退化型的离散哈密顿系统,写成分量形式为

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(t)x(t+1)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\\ \Delta\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{C}(t)-\lambda\boldsymbol{W}_1(t))\boldsymbol{x}(t+1)-\\ \qquad\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t).\end{cases}\tag{4}$$

可以验证,在等价变换 $\boldsymbol{x}_1(t)=\boldsymbol{W}^{1/2}(t-1)\cdot\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{u}_1(t)=\boldsymbol{W}^{-1/2}(t-1)\boldsymbol{u}(t)$ 后,系统(4)转化为权矩阵 $\boldsymbol{W}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 的系统,写成分量形式为

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t+1)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\\ \Delta\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{C}(t)-\lambda\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}(t+1)-\\ \qquad\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t).\end{cases}\tag{5}$$

目前,许多学者研究了离散哈密顿系统的振动性、Lyapunov 不等式、不共轭性等问题[3-5],然而对于奇异离散哈密顿系统亏指数的研究正处于起步阶段. Atkinson[1]给出二阶形式自伴的差分方程也具有极限点型和极限圆型的分类,并建立了几个判定定理. 随后 Hinton, Clark 和 Gesztesy 等[2,6-9]也得到一些不错的结果. 最近,Clark 等[10]和史玉明[11]分别给出离散哈密顿系统的 Titchmarsh-Weyl 理论. 在文献[11]研究结果的基础上,本研究得到半退化型离散哈密顿系统是强极限点型的判别准则.

1　预备知识

为了表述本研究的主要结果,首先给出有关的定义和记号. 用 $l[0,\infty)$ 表示序列空间,即 $l[0,\infty):=\{\boldsymbol{y}:\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{y}(t)\}_{t=0}^{\infty}\subseteq\mathbf{C}^{2n}\}$. L_W^2 表示加权平方可和空间,$L_W^2:=\{\boldsymbol{y}\in l[0,\infty):\sum_{s=0}^{\infty}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})^*(s)\cdot\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})(s)\mathrm{d}s<\infty\}$.

引入内积$(\cdot,\cdot)$,

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}):=\sum_{s=0}^{\infty}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{g})^*(s)\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})(s)\mathrm{d}s,\quad \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in L_W^2.\tag{6}$$

由于 $\boldsymbol{W}(t)$ 可能是奇异的,引入下述等价关系:

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}\Leftrightarrow\sum_{s=0}^{\infty}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})^*(s)\boldsymbol{W}(s)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g})(s)=0,\quad \boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in L_W^2.$$

易知,L_W^2 为希尔伯特空间. 定义形式差分算子为

$$L(\boldsymbol{y})(t)=\boldsymbol{J}\Delta\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y})(t),$$

相应的最大差分算子 H 和最小差分算子 h 分别定义为

$$D(H):=\{\boldsymbol{y}\in L_W^2:\exists\boldsymbol{f}\in L_W^2,\text{s.t.}(L\boldsymbol{y})(t)=\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})(t),t\in[0,\infty)\cap\mathbf{Z}\},H\boldsymbol{y}:=\boldsymbol{f};$$

$$D(h):=\{\boldsymbol{y}\in D(H):\exists n\in\mathbf{N},\text{s.t.}\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{y}(t)=0,t\geqslant n+1\},h\boldsymbol{y}:=H\boldsymbol{y}.$$

史玉明[11]给出一类离散哈密顿系统亏指数的定义,并且得到以下引理.

引理 1[11]　系统(4)为极限点型的充分必要条件是

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{z}^*(t)\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}(t)=0,\forall\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in D(H),\tag{7}$$

式中,$D(H)$ 为最大差分算子 H 的定义域.

连续型哈密顿系统是强极限点型的概念是由 Everitt 等在研究亏指数问题时首先提出的. 本研究基于连续型哈密顿系统的强极限点型的定义[12],给出离散哈密顿系统强极限点型的定义.

定义 1　对于系统(4),如果对任意的 $\boldsymbol{y}_i(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_i(t)\\ \boldsymbol{u}_i(t)\end{pmatrix}\in D(H)$, $i=1,2$,有

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}_1^*(t)\boldsymbol{u}_2(t)=0,$$

则称该系统为强极限点型的,其中 $D(H)$ 是最大算子 H 的定义域.

由定义 1 和引理 1 可知,系统是强极限点型必是极限点型的. 类似于文献[12]中引理的证法,可得以下引理.

引理 2　系统(5)是强极限点型的当且仅当

$$\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{u}(t)=0,\forall\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in D(H).\tag{8}$$

引理 3　对任意的 $\lambda_0\in\mathbf{R}$,定义算子 H_{λ_0} 为

$$H_{\lambda_0}:=H-\lambda_0\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{R},$$

其定义域为

$$D(H_{\lambda_0})=\{\boldsymbol{y}\in L_W^2:\exists\boldsymbol{f}\in L_W^2,\text{s.t.}(L\boldsymbol{y})(t)=\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f})(t),t\in[0,\infty)\},$$

那么 $D(H)=D(H_{\lambda_0})$,且 H 是(强)极限点型的当且仅当 H_{λ_0} 是(强)极限点型的.

由最大算子 H 的定义域 $D(H)$ 可知,对任意的 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in D(H)$,存在 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in L_W^2$, 满足

$$H(\boldsymbol{y})(t)=\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}),$$

即

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t+1)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\\ \Delta\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t+1)-\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{g}(t+1),\end{cases}$$

因此,

$$\begin{aligned}&\Delta(\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{u}(t))=\boldsymbol{x}^*(t+1)\Delta\boldsymbol{u}(t)+\\&\Delta\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t+1)-\\&\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{g}(t+1)+\\&\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}^*(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)=\\&\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t+1)+\boldsymbol{u}^*(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)-\\&\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{g}(t+1).\end{aligned}\tag{9}$$

文献[11]中给出系统(5)是极限点型的判别准则.

定理1 设$\boldsymbol{C}(t)$是有下界的,$\boldsymbol{B}(t)\geqslant b(t)\boldsymbol{I}_n\geqslant 0$,且$\|\boldsymbol{A}(t)\|\leqslant a(t)$,$t\in\mathbf{N}$,如果存在一个常数$M>0$,满足$Mb(t)\geqslant a^2(t)$且

$$\sum_{t=0}^{\infty}\sqrt{b(t)}=\infty,\tag{10}$$

那么系统(5)是极限点型的.

对于Hermit矩阵$\boldsymbol{C}(t)$,如果存在两个有限常数a,b,满足$a\boldsymbol{I}_n\leqslant\boldsymbol{C}(t)\leqslant b\boldsymbol{I}_n$,那么称$\boldsymbol{C}(t)$是有界的;如果只满足左边不等式,那么称$\boldsymbol{C}(t)$是有下界的;如果只满足右边不等式,那么称$\boldsymbol{C}(t)$是有上界的.

$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$和向量$\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$的范数分别定义为

$$\|\boldsymbol{A}\|:=\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\boldsymbol{x}\|:=(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}=\Big(\sum_{j=1}^{n}|\boldsymbol{x}_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\lambda_{\min}\boldsymbol{A}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的最小特征值.易知,若$\boldsymbol{A}$是$n\times n$厄米的($\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}$),则对任意的$\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{C}^n$,有$\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\geqslant\lambda_{\min}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}^*\boldsymbol{\xi}$.

由确定性条件(2)可知,对于系统(5)的任意非平凡解$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{u}\end{pmatrix}$,都存在一个$m\in\mathbf{N}$,使得对于$t\geqslant m$,$t\in\mathbf{N}$,有

$$\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{x}^*(s+1)\boldsymbol{x}(s+1)>0.\tag{11}$$

2 主要定理及证明

定理2 当定理1的条件成立时,系统(5)是强极限点型的.

证明 因为对任意的$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in D(H)$,存在$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in L_W^2$,从而由式(9)得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{u}(t+1)=\boldsymbol{x}^*(0)\boldsymbol{u}(0)+\\&\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{x}^*(s+1)\boldsymbol{C}(s)\boldsymbol{x}(s+1)+\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{u}^*(s)\cdot\\&\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)-\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{x}^*(s+1)\boldsymbol{g}(s+1).\end{aligned}\tag{12}$$

记$h(t)=\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{u}(t)$,$\varphi(t)=\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{x}(t)$,$\psi(t)=\boldsymbol{u}^*(t)\boldsymbol{u}(t)$,则式(12)可化为

$$\begin{aligned}&h(t+1)=h(0)+\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{x}^*(s+1)\boldsymbol{C}(s)\boldsymbol{x}(s+1)+\\&\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{u}^*(s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{u}(s)-\sum_{s=0}^{t}\boldsymbol{x}^*(s+1)\boldsymbol{g}(s+1).\end{aligned}\tag{13}$$

因为$\boldsymbol{C}(t)$是有下界的,由引理3,不妨设$\boldsymbol{C}(t)\geqslant 0$.注意到$\boldsymbol{B}(t)\geqslant 0$,$\boldsymbol{y},\boldsymbol{f}\in L_W^2$,由式(13)可知,当$t\to\infty$时,$h(t)$的极限存在,且$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)\leqslant\infty$.

易证$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$.否则,不妨假设$\lim\limits_{t\to\infty}|h(t)|=2l>0$,则由极限的保号性可知

$$|h(t)|\geqslant l,\ \exists N\in\mathbf{N},\ \forall t\geqslant N.\tag{14}$$

从而由$h(t)$的定义可知$\varphi(t)>0(t\geqslant N)$.令$H(t)=\mathrm{Re}\,h(t)$,则由式(13)得

$$H(t+1)\geqslant K+\sum_{s=0}^{t}b(s)\psi(s),\tag{15}$$

式中,K为一个确定的实常数.由于

$$\begin{aligned}&|h(t)|^2=|\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{u}(t)|^2\leqslant\\&\boldsymbol{x}^*(s)\boldsymbol{x}(s)\boldsymbol{u}^*(s)\boldsymbol{u}(s)=\phi(t)\psi(t),\end{aligned}\tag{16}$$

结合式(14)和(16)可知,对于任意的$t\geqslant N$,有

$$\sum_{s=N}^{t}b(s)\psi(s)\geqslant\sum_{s=N}^{t}\frac{b(s)|h(s)|^2}{\phi(s)}\geqslant l^2\sum_{s=N}^{t}\frac{b(s)}{\phi(s)}.\tag{17}$$

利用Cauchy不等式,结合式(10)和(11)可知

$$\sum_{s=N}^{t}\frac{b(s)}{\phi(s)}\geqslant\frac{\Big[\sum\limits_{s=N}^{t}\sqrt{b(s)}\Big]^2}{\sum\limits_{s=N}^{t}\phi(s)}\to\infty,\ t\to\infty.\tag{18}$$

又由式(15),(17),(18)可知,当$t\to\infty$时,$H(t)\to\infty$.

令$r(t)=\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{u}(t)$,$\tilde{R}(t)=\mathrm{Re}\,r(t)$,则由$\Delta\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t+1)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{x}^*(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}^*(t)\boldsymbol{B}(t)\cdot\\&\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t),\end{aligned}$$

从而

$$\tilde{R}(t)=H(t)+\boldsymbol{u}^*(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)+$$

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t)). \quad (19)$$

由定理给出的条件 $\|\boldsymbol{A}(t)\| \leqslant a(t)$,可得

$$|\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{A}^*(t)\boldsymbol{u}(t))| \leqslant \|\boldsymbol{A}(t)\| \cdot |\boldsymbol{x}(t+1)||\boldsymbol{u}(t)| \leqslant a(t)\sqrt{\phi(t+1)\psi(t)},$$

于是由式(15)和(19)及平均值不等式,得到

$$\tilde{R}(t) \geqslant K + \sum_{s=0}^{t} b(s)\psi(s) - a(t)\sqrt{\phi(t+1)\psi(t)} \geqslant K + \sum_{s=0}^{t} b(s)\psi(s) - M - \frac{1}{4M}a^2(t)\phi(t+1)\psi(t). \quad (20)$$

注意到定理中的条件 $Mb(t) \geqslant a^2(t)$ 以及正项级数的性质 $\sum_{s=0}^{\infty}\phi(s) < \infty \Rightarrow \phi(t) \to 0, t \to \infty$,结合式(17),(18),(20)知,存在 $N_1(N_1 \geqslant N)$,使得

$$\tilde{R}(t) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{s=N_1}^{t} b(s)\psi(s) =: \frac{1}{2}G(t). \quad (21)$$

由式(17)和(18)可知,$G(t)$ 单调递增且趋于正无穷,从而由不等式

$$\phi(t+1)\psi(t) = \boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{x}(t+1)\boldsymbol{u}^*(t)\boldsymbol{u}(t) \geqslant |\boldsymbol{x}^*(t+1)\boldsymbol{u}(t)|^2 \geqslant \tilde{R}^2(t),$$

可得

$$\Delta G(t) = b(t+1)\psi(t+1) \geqslant b(t+1)\frac{|\tilde{R}(t+1)|^2}{\phi(t+2)} \geqslant \frac{1}{4}b(t+1)\frac{G^2(t+1)}{\phi(t+2)} \geqslant \frac{1}{4}b(t+1)\frac{G(t+1)G(t)}{\phi(t+2)}, t \geqslant N_1,$$

因此,

$$\frac{1}{G(t)} - \frac{1}{G(t+1)} = \frac{\Delta G(t)}{G(t)G(t+1)} \geqslant \frac{1}{4}\frac{b(t+1)}{\phi(t+2)}, t \geqslant N_1. \quad (22)$$

对式(22)两边从 N_1 到 t 逐项求和,有

$$\frac{1}{G(N_1)} - \frac{1}{G(t+1)} \geqslant \sum_{s=N_1}^{t}\frac{1}{4}\frac{b(s+1)}{\phi(s+2)} \geqslant \sum_{s=N_1+1}^{t+1}\frac{1}{4}\frac{b(s)}{\phi(s+1)} \geqslant \frac{1}{4}\frac{\left[\sum_{s=N_1+1}^{t+1}\sqrt{b(s)}\right]^2}{\sum_{s=N_1+1}^{t+1}\phi(s+1)}. \quad (23)$$

根据定理的条件 $\sum_{s=0}^{\infty}\sqrt{b(s)} = \infty$ 和 $\sum_{s=0}^{\infty}\phi(s) < \infty$,式(23)与 $G(t) \to \infty\ (t \to \infty)$ 矛盾,故 $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$. 由引理 2 可知,定理的结论成立.

参考文献:

[1] ATKINSON F V. Discrete and continuous boundary problems [M]. New York: Academic Press Inc, 1964: 32-51.

[2] QI J, CHEN S. Lower bound for the spectrum and the presence of pure point spectrum of a singular discrete Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl, 2004, 295(2):539-556.

[3] AGARWAL R P, AHLBRANDT C D, BOHNER M, et al. Discrete Hamiltonian systems [J]. A Survey, Dynam Systems Appl, 1999, 8(3):307-333.

[4] AHLBRANDT C D. Equivalence of discrete Euler equations and discrete Hamiltonian systems [J]. J Math Anal Appl, 1993, 180(4):498-517.

[5] AHLBRANDT C D, PETERSON A C. Discrete Hamiltonian systems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996:57-81.

[6] BOHNER M. Linear Hamiltonian difference systems: disconjugacy and Jacobi-type conditions [J]. J Math Anal Appl, 1996, 199(2):383-394.

[7] BOHNER M. Discrete linear Hamiltonian eigenvalue problem [J]. Comput Math Appl, 1998, 36(6):179-192.

[8] CHEN S, ERBE L. Oscillation results for second order scalar and matrix difference equations [J]. Comput Math Appl, 1994, 28(1/3):55-69.

[9] CHEN J, SHI Y. The limit circle and limit piont criteria for second order linear difference equations [J]. Computers Math Applic, 2004, 47(6/7):967-976.

[10] CLARK S L, GESZTESY F. On Weyl-Titchmarsh theory for singular finite difference Hamiltonian systems [J]. J Comput Appl, 2004, 171(1):151-184.

[11] SHI Y M. Weyl-Titchmarsh theory for a class of discrete linear Hamiltonian systems [J]. Linear Algebra Appl, 2006, 416(2):452-519.

[12] QI J, CHEN S. Strong limit-point classification of singular Hamiltonian expressions [J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132(7):1667-1674.

(编辑:孟庆勋)