

doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2011.02.010

# 二维翼型绕流计算中预处理和多重网格方法的应用

梁子轩, 丁珏, 翁培奋

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

**摘要:** 结合 Turkel 矩阵预处理方法和多重网格方法, 发展一种适合低速粘性流动计算的高效数值方法. 通过对 Navier-Stokes 方程的时间导数项实施 Turkel 矩阵预处理, 使得可压缩 Navier-Stokes 方程在低速情况下的系统刚性得到改善. 为进一步加速收敛, 提高计算效率, 采用多重网格的 3 层 V 循环方式, 对 RAE2822 超临界翼型的低速粘性绕流流场进行数值模拟. 计算结果表明, 该预处理及多重网格方法能够大幅度地提高低速粘性流场的收敛性能, 具有较高的计算精度, 能够将可压缩 Navier-Stokes 方程的马赫数计算区域扩展到低速不可压缩区域, 对于低速粘性流场的计算非常有效.

**关键词:** 低速流动; 多重网格; 预处理; 隐式求解

中图分类号: O 355

文献标志码: A

文章编号: 1007-2861(2011)02-0158-06

## Application of Preconditioning and Multi-grid Technique to Two-Dimensional Flow Calculation

LIANG Zi-xuan, DING Jue, WENG Pei-fen

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

**Abstract:** Turkel preconditioning matrix and multi-grid technique are combined to develop an efficient method suitable for numerical computation of low-speed viscous flow. Rigidity of the system of compressible Navier-Stokes equations is improved using the Turkel preconditioning matrix, thus the compressible range of Mach of two-dimensional flow is extended for low-speed flows. By using the LU-SGS (lower-upper symmetric Gauss-Seidel) implicit method and introducing preconditioning methods together with a multigrid scheme, an RAE2822 airfoil is simulated at low Reynolds number and a small angle of attack. Numerical results show that the preconditioning methods and multi-grid technique can greatly improve convergence of viscous flows. Besides, the above method can extend the computational domain of Mach number of compressible Navier-Stokes equations to a low-speed incompressible area, which is effective in calculating low-speed viscous flows.

**Key words:** low speed flow; multi-grid; preconditioning method; implicit method

低速不可压缩流动的数值模拟一直是计算流体力学 (computational fluid dynamics, CFD) 研究中的

活跃领域之一. 在低速流动情况下, 流场近似为不可压缩, 如果采用可压缩控制方程来求解, 往往会出现

收稿日期: 2009-11-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10802046)

通信作者: 丁珏 (1973 ~), 女, 副研究员, 研究方向为环境流体力学、空气动力学. E-mail: dingjue\_lu@shu.edu.cn

收敛缓慢、计算精度低等问题.其原因在于:①此时速度与音速相比很小,条件数太大;②时间相关的流体力学方程组的对流项系数矩阵的几个特征值不处于同一数量级,方程组奇异.为了使流场的计算能够快速收敛到定常解,同时使得时间推进方法可以有效地模拟不可压缩流动,目前主要采用2种方法:拟压缩性方法<sup>[1]</sup>和预处理方法<sup>[2]</sup>.

20世纪80年代,Choi等<sup>[3]</sup>采用预处理方法成功求解了定常粘性流动.国内也有诸多学者针对不同的问题对预处理方法进行了深入研究.韩忠华<sup>[4]</sup>运用预处理方法对旋翼进行了高效的数值计算;黄典贵<sup>[5]</sup>尝试了一种新的预处理方法,成功地进行了可压缩、不可压缩、高马赫数与低马赫数流场的计算.

多重网格方法是一种非常有效的加速收敛技术,对于求解线性椭圆方程是一种最优值方法,对求解 Euler 方程也有较好的收敛效果.近年来,多重网格法被广泛应用到加速收敛 Navier-Stokes 方程的求解中,并取得了显著的成效.例如,杨爱明等<sup>[6]</sup>采用多重网格方法有效计算了旋翼跨声速无粘流场.

基于以上讨论,本研究将 Turkel<sup>[7]</sup>的预处理矩阵和多重网格方法相结合,发展了一种适合低速流动计算的高效数值方法——时间积分采用隐式 LU-SGS(lower-upper symmetric Gauss-Seidel)方法<sup>[8]</sup>,对流项通量采用 Jameson 等<sup>[9]</sup>提出的有限体积法进行离散,同时对人工粘性项进行修正.通过对 RAE2822 翼型的低速绕流进行数值模拟,对比分析在预处理方法和多重网格法相结合时的计算效率,同时对计算所得的流场压力分布和实验值进行比较.

## 1 控制方程及计算网格

微分形式的二维 Navier-Stokes 方程可表示为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y}, \quad (1)$$

式中,

$$\mathbf{E} = [\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uH]^T,$$

$$\mathbf{F} = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho vH]^T,$$

$$\mathbf{U} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E]^T.$$

对式(1)进行积分,并应用高斯定理将对流项体积积分转化为面积分,得到积分形式的 Navier-Stokes 方程为

$$\iint_V \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial V} \mathbf{H}_v \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2)$$

式中,

$$\mathbf{H} = \mathbf{E}\mathbf{i} + \mathbf{F}\mathbf{j}, \quad \mathbf{H}_v = \mathbf{E}_v\mathbf{i} + \mathbf{F}_v\mathbf{j},$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$  分别为沿  $x, y, z$  3 个坐标轴方向的单位向量.

计算网格采用 C 形网格,如图 1 所示,网格的大小为 181(弦向)×61(法向),翼型表面占据 120 个网格单元.在 3 层多重网格计算中,最稀疏的网格为 46×16,其中翼型表面占据 5 个网格单元,第一层网格距离物面的距离约为  $1.0 \times 10^{-6}$  倍弦长,附面层内大约有 18~21 层左右的网格单元,同时对翼尖和翼根的网格进行局部加密.

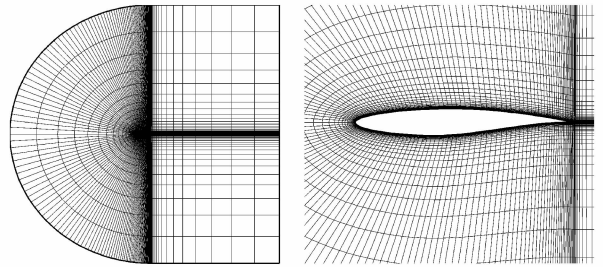


图1 计算网格

Fig. 1 C-shape meshes for RAE2822

## 2 数值计算方法

### 2.1 预处理技术

通常情况下,为保持预处理形式相对简单,更好地计算粘性问题的,一般采用原始变量  $\mathbf{Q} = (P, u, v, T)^T$  进行求解,即式(1)可转换为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y}. \quad (3)$$

令  $\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}}, \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{U}}, \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ , 则式(3)可转换为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right). \quad (4)$$

令  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{M}$ , 则式(4)可转换为

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right). \quad (5)$$

本研究采用 Turkel<sup>[7]</sup>发展的一种适用于计算粘性流动的预处理矩阵,具体形式为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2 Ma_r^2}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon u}{\rho c^2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon v}{\rho c^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c^2}{\beta^2 Ma_r^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon u}{\rho \beta^2 Ma_r^2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon v}{\rho \beta^2 Ma_r^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\beta Ma_r$  是与当地马赫数有关的量,  $c$  为当地音速,  $\varepsilon$  为自由参数, 取 1 或 0. 为了避免预处理矩阵在驻点附近存在奇异性, 需要施加人工控制. Turkel<sup>[7]</sup> 给出的控制方法的基本原理是使得  $\beta^2 Ma_r^2$  在驻点附近大于 0, 其中

$$\beta^2 Ma_r^2 = \min \left\{ \max \left[ k_1 c^2 Ma^2 \left( 1 + \frac{1 - Ma_0^2}{Ma_0^4} Ma^2 \right), k_2^2 (u_\infty^2 + v_\infty^2) \right], c^2 \right\}.$$

预处理方程为

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right). \quad (6)$$

## 2.2 空间离散

空间离散采用 Jameson 中心有限体积法<sup>[9]</sup>, 对于网格单元  $(i, j)$ , 定义

$$\mathbf{U}_{i,j} = \frac{1}{V_{i,j}} \iint_{V_{i,j}} \mathbf{U}_{i,j} dV, \quad (7)$$

则式(1)的半离散形式为

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} + \mathbf{R}_{i,j} = 0, \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{R}_{i,j} = \frac{1}{V_{i,j}} (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_v)$ . 式(1)中的第二项为无粘项的积分, 第三项为粘性项的积分, 分别记作  $\mathbf{Q}_{i,j}$  和  $\mathbf{Q}_{v,i,j}$ , 其中非粘性项的离散参考文献[10], 粘性通量  $\mathbf{Q}_{v,i,j}$  和无粘通量  $\mathbf{Q}_{i,j}$  的计算相似.

由于中心平均有限体积公式不具备耗散性, 因此, 本研究所加入的人工粘性项  $\mathbf{D}_{i,j}$  由二、四阶混合导数组成, 即

$$\mathbf{D}_{i,j} = (D_\xi^2 + D_\eta^2 - D_\xi^4 - D_\eta^4) \mathbf{U}_{i,j}, \quad (9)$$

其中二、四阶导数分别定义为

$$\mathbf{D}_x^2 \mathbf{U}_{i,j} = \nabla_x [ (\bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)}) \Delta_x ] \mathbf{U}_{i,j},$$

$$\mathbf{D}_x^4 \mathbf{U}_{i,j} = \nabla_x [ (\bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)}) \Delta_x \nabla_x \Delta_x ] \mathbf{U}_{i,j},$$

式中,  $\Delta_x, \nabla_x$  分别为  $x$  方向的向前差分算子和向后差分算子, 变量系数  $\bar{\lambda}$  定义为

$$\bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} [ (\lambda_x)_{i,j} \Phi_{i,j} + (\lambda_x)_{i+1,j} \Phi_{i+1,j} ],$$

式中,  $\Phi_{i,j} = 1 + \left( \frac{(\lambda_\eta)_{i,j}}{(\lambda_\xi)_{i,j}} \right)^\sigma$ ,

$$(\lambda_x)_{i,j} = \left| \frac{1}{2} \mathbf{q}_{i,j} \cdot (\mathbf{S}_{i-\frac{1}{2},j} + \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2},j}) \right| + a_{i,j} \left| \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{i-\frac{1}{2},j} + \mathbf{S}_{i+\frac{1}{2},j}) \right|,$$

其中  $\sigma = 0.5$ ,  $\lambda$  为 Jacobin 矩阵的谱半径.

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(4)}$  是与压强梯度相关的压力敏感性因子, 有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)} = k^{(2)} \max(\mathbf{v}_{i,j}, \mathbf{v}_{i+1,j}),$$

$$\mathbf{v}_{i,j} = \left| \frac{p_{i-1,j} - 2p_{i,j} + p_{i+1,j}}{p_{i-1,j} + 2p_{i,j} + p_{i+1,j}} \right|,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)} = \max(0, k^{(4)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)}).$$

系数  $k^{(2)}, k^{(4)}$  的取值范围为

$$\frac{1}{4} \leq k^{(2)} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{128} \leq k^{(4)} \leq \frac{1}{32},$$

其他方向的定义同上.

由于加入了预处理矩阵, 原来的控制方程产生了变化, 对于中心格式人工耗散通量需要作必要的改动. 因此, 二、四阶差分算子定义改动为

$$\mathbf{D}_x^2 \mathbf{U}_{i,j} = \nabla_x [ (L_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(2)}) \Delta_x ] \mathbf{U}_{i,j}, \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_x^4 \mathbf{U}_{i,j} = \nabla_x [ (L_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \bar{\lambda}_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2},j}^{(4)}) \Delta_x \nabla_x \Delta_x ] \mathbf{U}_{i,j}, \quad (11)$$

式中,  $L_{i+\frac{1}{2},j}$  可通过对相邻网格单元作平均得到, 即

$$L_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (L_{i,j} + L_{i+1,j}).$$

## 2.3 时间推进方法

时间推进方法采用 LU-SGS<sup>[8]</sup> 隐式方法. 基于预处理技术的 LU-SGS 方法推导如下.

对时间导数项采用一阶差分, 方程离散后, 得

$$\mathbf{L} \frac{\mathbf{U}^{m+1} - \mathbf{U}^m}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{A}} \delta_x \mathbf{Q}^{m+1} + \tilde{\mathbf{B}} \delta_y \mathbf{Q}^{m+1} = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right), \quad (12)$$

式中, 指标  $m$  为子迭代步数. 将式(12)对流项线性

化,得

$$\mathbf{L} \frac{\Delta \mathbf{U}}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{A}} \delta_x (\mathbf{Q}^m + \mathbf{A}^m \Delta \mathbf{U}) + \tilde{\mathbf{B}} \delta_y (\mathbf{Q}^m + \mathbf{B}^m \Delta \mathbf{U}) = \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right), \quad (13)$$

式中,  $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{m+1} - \mathbf{U}^m$ ,  $\mathbf{A}^m, \mathbf{B}^m$  为对流通量对  $\mathbf{U}$  的 Jacobin 矩阵,即

$$[\mathbf{L} + \Delta t (\mathbf{A}^m \tilde{\mathbf{A}} \delta_x + \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{B}} \delta_y)] \Delta \mathbf{U} = -\Delta t \cdot \mathbf{R}_e, \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_e = \tilde{\mathbf{A}} \delta_x \mathbf{Q}^m + \tilde{\mathbf{B}} \delta_y \mathbf{Q}^m - \mathbf{M}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} \right).$$

预处理之后的控制方程为

$$[\mathbf{L} + \Delta t (\mathbf{A}^m \tilde{\mathbf{A}} \delta_x + \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{B}} \delta_y)] \Delta \mathbf{U} = -\Delta t \cdot \mathbf{R}_e. \quad (15)$$

将  $\mathbf{L}$  写成  $\mathbf{S}_e$ , 令  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^m \tilde{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{B}}$ , 有

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_e \mathbf{S}_e^{-1} \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_e^{-1} \bar{\mathbf{A}}.$$

对  $\hat{\mathbf{A}}$  采用最大特征值分裂,有

$$\hat{\mathbf{A}}^\pm = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{A}} \pm \chi \sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{I}), \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^+ + \hat{\mathbf{A}}^-,$$

$$\bar{\mathbf{A}}^\pm = \mathbf{S}_e \hat{\mathbf{A}}^\pm = \mathbf{S}_e \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{A}} \pm \chi \sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{A}} \pm \chi \sigma_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{S}_e),$$

式中,  $\chi$  取 1.01,  $\sigma_{\hat{\mathbf{A}}} = \max[|\lambda(\hat{\mathbf{A}})|]$ .

$\bar{\mathbf{B}}^\pm$  可按类似方法得到,同时在方程(15)两端乘以  $\mathbf{S}_e$ ,得

$$\left[ \frac{1}{\Delta t} + (\chi \sigma_{\bar{\mathbf{A}}} + \chi \sigma_{\bar{\mathbf{B}}}) \right] \Delta \mathbf{U} + \mathbf{S}_e^{-1} (\bar{\mathbf{A}}_{i+1}^- \Delta \mathbf{U}_{i+1} + \bar{\mathbf{B}}_{j+1}^- \Delta \mathbf{U}_{j+1}) - \mathbf{S}_e^{-1} (\bar{\mathbf{A}}_{i-1}^+ \Delta \mathbf{U}_{i-1} + \bar{\mathbf{B}}_{j-1}^+ \Delta \mathbf{U}_{j-1}) = -\mathbf{S}_e^{-1} \cdot \mathbf{R}_e. \quad (16)$$

式(16)可写成 LU-SGS 格式,即

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{D} + \mathbf{U}) \Delta \mathbf{U}_{i,j} = -\mathbf{S}_e^{-1} (\bar{\mathbf{A}}_{i-1}^+ + \bar{\mathbf{B}}_{j-1}^+), \quad (17)$$

式中,

$$\mathbf{L} = -\mathbf{S}_e^{-1} (\bar{\mathbf{A}}_{i-1}^+ + \bar{\mathbf{B}}_{j-1}^+),$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\Delta t} + [\chi \sigma_{\bar{\mathbf{A}}} + \chi \sigma_{\bar{\mathbf{B}}}],$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}_e^{-1} (\bar{\mathbf{A}}_{i+1}^- + \bar{\mathbf{B}}_{j+1}^-).$$

式(17)与 Navier-Stokes 方程的形式相同,可进行向前、向后扫描和流场更新求解.

## 2.4 多重网格法

多重网格法<sup>[6]</sup>就是利用一系列粗细不同的网格来求解同一离散问题.将迭代误差分为高频波动误

差和低频光滑误差,在细网格上利用有效的迭代方法消除高频波动误差,利用粗网格消除低频光滑误差.通过插值算子在粗网格与细网格间插值,最终达到一致收敛.多重网格法的两个主要过程就是限制和插值,限制是细网格向粗网格传值的过程,插值是粗网格向细网格传值的过程.本研究在限制过程中采用面积加权平均法,插值过程中采用双线性插值法.有关多重网格法的详细介绍,请参考文献[11].

## 2.5 边界条件

本研究采用的边界条件包括物面边界条件、远场边界条件和割缝边界条件,其中物面边界条件采用无滑移边界条件.

黎曼远场边界条件理论是建立在方程特征系统的基础上,适用于未经预处理的系统.由于经过预处理之后,系统的特征值会发生变化,因此,相应的远场边界条件也相应地发生变化.本研究采用简单的远场边界条件,计算中不涉及跨音速和超音速情况,因而只给出亚音速远场边界条件,即

(1) 流入为亚音速 ( $-a < q_n < 0$ ), 则

$$u_b = u_\infty, v_b = v_\infty, T_b = T_\infty, p_b = p_{\text{int}};$$

(2) 流出 ( $0 < q_n < a$ ), 则

$$u_b = u_{\text{int}}, v_b = v_{\text{int}}, T_b = T_{\text{int}}, p_b = p_\infty.$$

式中,下标 b 表示边界上的值,下标 int 表示和边界相邻一层的值.

## 3 算例分析

本研究对 RAE2822 翼型的粘性绕流进行数值模拟.来流马赫数  $Ma$  为 0.01,攻角  $\alpha$  为  $1.89^\circ$ ,雷诺数  $Re$  为  $5.7 \times 10^6$ ,湍流模型采用 BL(baldwin-lomax) 湍流模型<sup>[12]</sup>.分别对如下 4 种情况进行对比分析:① 未采用预处理和多重网格方法;② 只采用多重网格方法;③ 只采用预处理方法;④ 预处理和多重网格方法均被采用.然后对预处理方法和多重网格方法的收敛性能和计算精度进行讨论.结果如图 2 和图 3 所示.

图 2(a) 给出了只采用预处理法和只采用多重网格法计算的压力曲线.可以看出,采用预处理技术计算的压力曲线比较光滑而且和实验值<sup>[13]</sup>吻合得比较好;而采用多重网格法,计算的压力曲线不仅不光滑,还在翼尖发生大幅度的振荡,并且与实验值相比,翼型根部和翼型下表面的压力值和实验值差别较大,这说明预处理技术能够有效地提高计算精度.图 2(b) 给出了预处理和多重网格技术均被采用时与两种方法均未被采用时的压力分布情况.可以看

出,两种方法均被采用时,计算得到的压力曲线与实验值吻合较好,而两种方法均未被采用时计算的压力曲线有明显的振荡,并且在翼型根部、翼型下表面和翼尖部计算的压力曲线与实验值差别较大.图2(c)给出了上述4种情况下的压力曲线变化,可以看出,在预处理和多重网格法均被采用时与只采用预处理方法时计算的压力曲线基本上是重合的,而且曲线比

较光滑,与实验值吻合很好;而只采用多重网格法和预处理与多重网格法均未被采用时计算的压力曲线基本上也是重合的,但曲线有明显的振荡,与实验值差别较大.通过对比分析可知,预处理技术能够有效地改善可压缩 Navier-Stokes 方程的系统“刚性”,使得马赫数计算范围从可压缩区域扩展到不可压缩低速流动区域,而多重网格法却不具备这一性能.

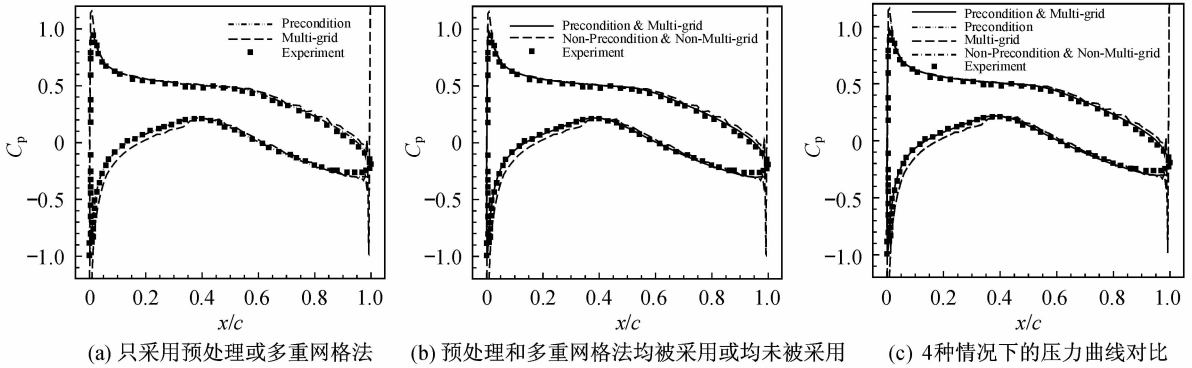


图2 计算的压力曲线与实验值的对比

Fig. 2 Calculated pressure curves compared with experimental data

图3为采用预处理及多重网格方法时的残值随工作单元的收敛曲线.表1则给出了4种情况下收敛性能和计算精度的对比.由图3和表1可得如下实验结果.

振荡幅度较大,收敛比较困难,在工作单元达到大约11 000个时,残值下降到10个量级.结合图2可知,这时计算的压力曲线有明显的振荡,且与实验值差别较大.

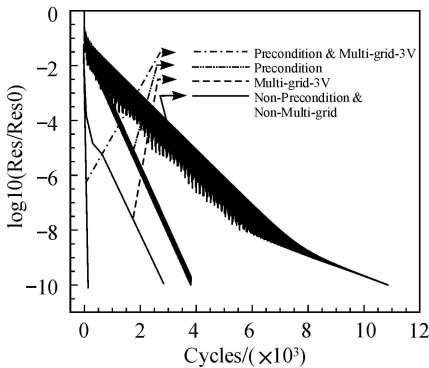


图3 残值收敛曲线

Fig. 3 Residual convergence curve

(1)在未采用预处理或多重网格方法时,残值

(2)在采用了预处理方法后,虽然残值有较小幅度的振荡,但在工作单元达到近4 000个时,残值下降到10个量级;与未采用预处理或多重网格法时的计算结果相对比,预处理方法的工作单元加速比约为3,压力曲线有明显的改善,且与实验值吻合很好.

(3)采用多重网格3V-1-2-3循环方式时,在工作单元达到约3 000个时,残值下降10个量级;与未采用预处理或多重网格法时的计算结果相比,工作单元加速比约为4,但二者计算的压力曲线是一致的,均有明显的振荡,且与实验值差别较大;与只采用预处理方法计算的结果相对比,虽然多重网格方法的收敛性要比预处理方法好些,但计算的压力曲线不及预处理计算的压力曲线.

表1 预处理及多重网格法在翼型绕流中的收敛性能和计算精度的对比

Table 1 Contrast of convergence capability and accuracy by using preconditioned methods and muti-grid in airfoil flow

加速收敛的措施	残值下降10个量级时的工作单元数	工作单元加速比	压力分布与实验值的对比
未采用预处理与多重网格法	11 000	—	较差、有振荡
预处理法	4 000	27.5	吻合较好
多重网格法	3 000	36.7	较差、有振荡
采用预处理与多重网格法	110	100.0	吻合较好

(4) 预处理和多重网格法均被采用时,收敛性能有大幅度的改善,在工作单元达到约110个时,残值很快地降到10个量级;只采用预处理法或只采用多重网格法或预处理多重网格法均被采用时的工作单元加速比分别约为27.5,36.7和100.0.计算的压力曲线与只采用预处理法的曲线相同,都与实验值吻合很好.

这些算例说明:①多重网格法能够有效地提高低速粘性流场的收敛性能,但不能够改善可压缩方程在低速不可压缩流动计算中的方程“刚性”问题,因此,在低速流动情况下,计算精度不及预处理技术;②预处理和多重网格法的结合,不仅能够改善可压缩方程的系统“刚性”,而且具有较高的计算精度,可将马赫数计算区域扩展到低速不可压缩区域,能够明显地提高低速粘性流场的收敛性能.

## 4 结束语

本研究提出的预处理多重网格法能够改善可压缩 Navier-Stokes 方程的系统“刚性”,大幅度地提高低速粘性流场的收敛性能,并且具有较高的计算精度,能够将可压缩 Navier-Stokes 方程的马赫数计算区域扩展到低速不可压缩区域,对于低速粘性流场的计算非常有效.算例表明,结合预处理与多重网格法,低速粘性流场的收敛性能大幅提高,与只采用预处理法或只采用多重网格法或预处理多重网格法均未被采用时计算的结果相对比,工作单元加速比分别约为36.7,27.5和100.0,同时能够显著提高流场计算精度,对低速粘性流场的计算非常有效.

## 参考文献:

[1] ROGERS S E, KWAK D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations [J]. Applied Numerical Mathematics, 1991, 8(1):43-46.  
[2] CHOI Y H, MERKLE C L. The application of

precondition in viscous flows [J]. Journal of Computational Physics, 1993, 105:207-223.  
[3] CHOI D, MERKLE C L. Application of time-iterative schemes to incompressible flow [J]. AIAA Journal, 1985, 23(17):1518-1524.  
[4] 韩忠华. 旋翼绕流的高效数值计算方法及主动流动控制研究[D]. 西安:西北工业大学,2007.  
[5] 黄典贵. 一种新的流体力学预处理方法[J]. 工程热物理学报,2005,26(4):593-595.  
[6] 杨爱明,翁培奋,乔志德. 用多重网格方法计算旋翼跨声速无粘流场[J]. 空气动力学报,2004,22(3):313-318.  
[7] TURKEL E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 72:277-298.  
[8] VAN LEER B, LEE W T, ROE P L. Characteristic time-stepping or local preconditioning of the Euler equations [C]// AIAA Paper. 1991:260-282.  
[9] JAMESON A, SCHMIDT W, TURKEL E. Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods with Runge-Kutta time stepping schemes [C]// AIAA Paper. 1981:81-1259.  
[10] NORBERT K, RAMESH K J. Solution of two-dimensional Euler equations: experience with a finite volume code [R]. DLR-FB, 1987: 87-41.  
[11] 杨小权. 高效数值算法在悬停旋翼绕流计算中的应用研究[D]. 上海:上海大学,2009:48-50.  
[12] BALDWIN B S, LOMAX H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows [C]// AIAA Paper. 1978:78-257.  
[13] COOK P H, MCDONALD M A, FIRMAN M C P. Aerofoil RAE 2822-pressure distributions, and boundary layer and wake measurements [R]. Experimental Data Base for Computer Program Assessment, AGARD Report AR-138, 1979.

(编辑:孟庆勋)