doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2011.03.012

二维 Poisson 方程的 Legendre Tau 方法的误差估计

沈婷婷， 马和平

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 主要考虑用 Legendre tau 方法求解二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题. 通过选取带有广义 Jacobi 权的函数作为检验函数,得到 Legendre tau 方法对于二维 Poisson 方程 Dirichlet 问题的 H^1 模的最优误差估计;然后,通过对偶技巧,得到 L^2 模的最优误差估计;最后,通过数值算例,进一步比较说明理论分析的结果.

关键词: Legendre tau 方法;二维 Poisson 方程;最优误差估计

中图分类号: O 241.82　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1007-2861(2011)03-0275-05

Error Estimate of Legendre Tau Method for Two-Dimensional Poisson Equation

SHEN Ting-ting, MA He-ping

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The two-dimensional Poisson equation with homogeneous Dirichlet boundary condition by the Legendre tau method is considered. The optimal rate of convergence in H^1-norm of Legendre tau method for the two-dimensional Poisson equation with homogeneous Dirichlet boundary condition is obtained by taking test functions with the generalized Jacobi weight. The optimal convergent rate in L^2-norm is proved by the duality argument. Numerical examples are given to verify the analysis results.

Key words: Legendre tau method; two-dimensional Poisson equation; optimal error estimate

谱方法作为数值求解偏微分方程的有效工具之一, 近年来得到了广泛的应用. 根据选取检验函数的不同,谱方法可分为 Galerkin 方法、tau 方法和配置法. 关于 Galerkin 方法和配置法的一些理论分析和数值计算结果可参见文献[1-3]. 本研究主要讨论 tau 方法在二维问题中的收敛性态.

Tau 方法是谱方法的基本形式之一, 在计算上有其方便之处. 由于 tau 方法的检验函数放弃了边界条件, 从而降低了耦合性,所以对于多区域问题, tau 方法有利于并行计算. 另外,相对于 Galerkin 方法, tau 方法在检验函数的处理上更容易,并已应用于微分方程的数值求解[4-7]. 然而,tau 方法对偶数阶微分方程的误差估计却不令人满意,并且关于 tau 方法还有一些负面评论. 例如,Bernardi 等[1]指出,在相同自由度的情况下,tau 方法与 Galerkin 方法和配置法相比精度要低;Canuto 等[2]通过求解一维二阶线性微分方程,指出 Galerkin 方法的精度要比 tau 方法高出一个数量阶;相似观点在文献[8-9]中也有

收稿日期:2009-12-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60874039);上海市教委重点学科建设资助项目(J50101);上海大学研究生创新基金资助项目(SHUCX080129)

通信作者:马和平(1955～),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为偏微分方程数值解. E-mail:hpma@shu.edu.cn

提及.在文献[10]中,Jun 等应用 Legendre tau 方法求解得到二维 Poisson 方程 Dirichlet 问题的 H^1 模误差估计为 $O(N^{\frac{5}{2}-r})$,其中解属于 H^r 空间,且 $r\geqslant\frac{5}{2}$.对于 Stokes 问题, tau 方法也仅有次优的误差估计[6,11].

文献[12]虽然给出了 Legendre tau 方法求解一维二阶微分方程的 L^2 模的最优误差估计,但对于高维情况下的收敛结果却没有具体讨论.由于 tau 方法在高维情况下仅有次优的误差估计,因此,本研究对于高维情况下 tau 方法的收敛性态更感兴趣.

本研究考虑二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题,即

$$\begin{cases}-\nabla^2 U=f(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in\Omega,\\ U|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{1}$$

式中,$\Omega=(-1,1)^2$, $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

记$\mathbb{P}_N(\Omega)$为区域 Ω 上各个方向次数不超过 N 的代数多项式的集合,$\mathbb{P}_N^0(\Omega)=\mathbb{P}_N(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$,则二维 Poisson 方程 Dirichlet 问题的 Legendre tau 方法是:求 $u_N\in\mathbb{P}_N^0(\Omega)$,对任意的 $v\in\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$, 有

$$-(\nabla^2 u_N,v)=(f,v).\tag{2}$$

本研究主要目的是证明 Legendre tau 方法对于求解二维 Poisson 方程 Dirichlet 问题具有 H^1 模和 L^2 模的最优误差估计.文献[12]取类似$(1-x^2)^{-1}u_N$ 作为检验函数,其中 $u_N\in\mathbb{P}_N^0(I)$,$I=(-1,1)$.本研究将该方法应用到二维的情形.

1　基本引理

对任意的 $u\in H^2(\Omega)$,$v\in L^2(\Omega)$,定义双线性形式为

$$a(u,v)=-(\nabla^2(\omega^{1,1}u),v),$$

式中,$\omega^{\alpha,\beta}(x)=(1-x_1^2)^\alpha(1-x_2^2)^\beta$,$x=(x_1,x_2)$表示二维空间 Ω 中的点.

引理1　对任意的 $u\in H^2(\Omega)$,$v\in H^1(\Omega)$,存在常数 C,使得

$$a(u,u)\geqslant\|\nabla u\|^2_{\omega^{1,1}}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|},$$

$$|a(u,v)|\leqslant C\|u\|_1(\|v\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}+\|\nabla v\|_{\omega^{1,1}}).$$

证明　由文献[2]中的结论,得到

$$\begin{aligned}&a(u,u)=-(\nabla^2(\omega^{1,1}u),u)=-\int_\Omega\nabla^2(\omega^{1,1}u)u\mathrm{d}x=\\&\int_\Omega\nabla(\omega^{1,1}u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial(\omega^{1,1}u)}{\partial n}u\mathrm{d}s=\\&\int_\Omega\omega^{1,1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega\nabla\omega^{1,1}\cdot\nabla u^2\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\omega^{1,1}}{\partial n}u^2\mathrm{d}s=\\&\int_\Omega\omega^{1,1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega\nabla^2\omega^{1,1}|u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\omega^{1,1}}{\partial n}u^2\mathrm{d}s\geqslant\\&\qquad\|\nabla u\|^2_{\omega^{1,1}}+\frac{1}{2}\|u\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}.\end{aligned}$$

另一方面,有

$$\begin{aligned}&a(u,v)=-(\nabla^2(\omega^{1,1}u),v)=\\&(\nabla(\omega^{1,1}u),\nabla v)-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial(\omega^{1,1}u)}{\partial n}v\mathrm{d}s=\\&(\omega^{1,1}\nabla u,\nabla v)+(u\nabla\omega^{1,1},\nabla v)-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\omega^{1,1}}{\partial n}uv\mathrm{d}s=\\&(\omega^{1,1}\nabla u,\nabla v)+(u\nabla\omega^{1,1},\nabla v)+\\&(-\nabla^2\omega^{1,1},uv)-(\nabla\omega^{1,1},\nabla(uv))=\\&(\omega^{1,1}\nabla u,\nabla v)+(u\nabla\omega^{1,1},\nabla v)+\\&(-\nabla^2\omega^{1,1},uv)-(\nabla\omega^{1,1},u\nabla v+v\nabla u)=\\&(\omega^{1,1}\nabla u,\nabla v)-(\nabla^2\omega^{1,1},uv)-(\nabla\omega^{1,1},v\nabla u).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}&|a(u,v)|\leqslant\\&C[\|\nabla u\|\|\nabla v\|_{\omega^{1,1}}+(\|u\|_{\omega^{0,1}}+\|u\|_{\omega^{1,0}}+\\&\|\partial_{x_1}u\|_{\omega^{0,1}}+\|\partial_{x_2}u\|_{\omega^{1,0}})\|v\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}]\leqslant\\&C[\|\nabla u\|\|\nabla v\|_{\omega^{1,1}}+(\|u\|+\|u\|+\\&\|\partial_{x_1}u\|+\|\partial_{x_2}u\|)\|v\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}]\leqslant\\&C[\|\nabla u\|\|\nabla v\|_{\omega^{1,1}}+\|u\|_1\|v\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}]\leqslant\\&C\|u\|_1(\|\nabla v\|_{\omega^{1,1}}+\|v\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}).\end{aligned}$$

如果考虑对 $u,v\in H^1(\Omega)$定义 $a(u,v)$(弱形式), 则同样可以得到以上结果.

下面引入2个正交投影算子.

(1)令 P_N^2: $H^2(\Omega)\to\mathbb{P}_N(\Omega)$为正交投影算子,且对于任意的 $u\in H^2(\Omega)$,有

$$(\partial_x^2(u-P_N^2u),\partial_x^2v)+(\partial_x(u-P_N^2u),\partial_xv)+(u-P_N^2u,v)=0,\forall v\in\mathbb{P}_N(\Omega).$$

引理 2[1] 如果 $u\in H^r(\Omega)$，且 $0\leqslant l\leqslant 2\leqslant r$，则有

$$\| u-P_N^2 u\|_l\leqslant CN^{l-r}\| u\|_r.$$

（2）令 $P_N^{1,0}: H_0^1(\Omega)\to\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ 为正交投影算子，且对于任意的 $u\in H_0{}^1(\Omega)$ 有

$$(\partial_x(u-P_N^{1,0}u),\partial_x v)=0,\ \forall v\in\mathbb{P}_N^0(\Omega).$$

引理 3[1] 如果 $u\in H^r(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且 $0\leqslant l\leqslant 1\leqslant r$，则有

$$\| u-P_N^{1,0}u\|_l\leqslant CN^{l-r}\| u\|_r.$$

2 收敛性分析

由式(1)和(2)，可以得到如下误差方程：

$$-(\nabla^2(U-u_N),v)=0,\ \forall v\in P_{N-2}. \qquad (3)$$

对于式(3)，人们一般取类似 $v=P_{N-2}u_N$ 的形式，其中 $P_{N-2}: L^2(\Omega)\to\mathbb{P}_{N-2}(\Omega)$ 为正交投影算子. 但是，由于对任意的 $u_N\in\mathbb{P}_N^0(\Omega)$，$-(\nabla^2 u_N, P_{N-2}u_N)\neq\|\nabla u_N\|^2$，这是导致 tau 方法在高维情况下仅有次优的误差估计的主要原因. 本研究把检验函数取为另一种形式.

假设 $\omega^{-1,-1}U\in H^2$，设 $u^*=\omega^{1,1}P_{N-2}{}^2(\omega^{-1,-1}U)$，$e=u_N-u^*$，有 $\tilde e:=\omega^{-1,-1}e\in\mathbb{P}_{N-2}$，因此，

$$a(\tilde e,v)=a(\omega^{-1,-1}(U-u^*),v). \qquad (4)$$

取 $v=\tilde e$，由引理 1，得

$$a(\tilde e,\tilde e)\geqslant\|\nabla\tilde e\|_{\omega^{1,1}}^2+\frac{1}{2}\|\tilde e\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}^2,$$

并且，

$$a(\omega^{-1,-1}(U-u^*),\tilde e)\leqslant C\|\omega^{-1,-1}(U-u^*)\|_1(\|\tilde e\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}+\|\nabla\tilde e\|_{\omega^{1,1}})\leqslant$$
$$C\|\omega^{-1,-1}U-P_{N-2}^2(\omega^{-1,-1}U)\|_1^2+\frac{1}{4}\|\tilde e\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}{}^2+\frac{1}{4}\|\nabla\tilde e\|_{\omega^{1,1}}^2.$$

因此，由式(4)，得

$$\|\nabla\tilde e\|_{\omega^{1,1}}^2+\|\tilde e\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}^2\leqslant C\|\omega^{-1,-1}U-P_{N-2}^2(\omega^{-1,-1}U)\|_1^2.$$

根据引理 2，可得

$$\|\nabla e\|^2\leqslant 2\|\nabla\tilde e\|_{\omega^{1,1}}^2+4\|\tilde e\|_{|\nabla^2(\omega^{1,1})|}{}^2\leqslant CN^{2(1-r)}\|\omega^{-1,-1}U\|_r^2.$$

另一方面，

$$\|\nabla(U-u^*)\|^2=\|\nabla(\omega^{1,1}(\omega^{-1,-1}U-P_{N-2}^2(\omega^{-1,-1}U)))\|^2\leqslant$$
$$C\|\omega^{-1,-1}U-P_{N-2}^2(\omega^{-1,-1}U)\|_1^2\leqslant CN^{2(1-r)}\|\omega^{-1,-1}U\|_r^2,$$

由三角不等式和 Poincaré 不等式，可以得到以下定理.

定理 1 如果 $U\in H_0^1(\Omega)$，且 $\omega^{-1,-1}U\in H^r$，$r\geqslant 2$，则有

$$\|U-u_N\|_1\leqslant CN^{1-r},$$

式中，C 为依赖于 $\|\omega^{-1,-1}U\|_r$ 的正常数.

下面利用对偶技巧来估计 $\|U-u_N\|$.

定理 2 如果 $U\in H_0^1(\Omega)$，且 $\omega^{-1,-1}U\in H^r$，$r\geqslant 2$，则有

$$\|U-u_N\|\leqslant CN^{-r},$$

式中，C 为依赖于 $\|\omega^{-1,-1}U\|_r$ 的正常数.

证明 考虑如下问题：对于 $g\in L^2(\Omega)$，令 $\phi=\phi(g)$，满足

$$\begin{cases}-\nabla^2\phi=g,\\ \phi=0,\quad \text{任意 }\partial\Omega.\end{cases} \qquad (5)$$

根据文献[1]，可知式(5)有唯一解，并且 ϕ 满足

$$\|\phi\|_2\leqslant C\|g\|.$$

又因为 $-(\nabla^2(U-u_N),v)=0,\ \forall v\in P_{N-2}$，所以

$$-(\nabla^2(U-u_N),P_{N-2}^{1,0}\phi)=0.$$

因此，

$$(U-u_N,g)=-(U-u_N,\nabla^2\phi)=-(\nabla^2(U-u_N),\phi)=$$
$$-(\nabla^2(U-u_N),\phi-P_{N-2}^{1,0}\phi)=$$
$$(\nabla(U-u_N),\nabla(\phi-P_{N-2}^{1,0}\phi))\leqslant$$
$$CN^{-1}\|\nabla(U-u_N)\|\ \|\phi\|_2\leqslant$$
$$CN^{-1}N^{1-r}\|g\|\leqslant CN^{-r}\|g\|.$$

由定理 1 和定理 2 可知，条件 $\omega^{-1,-1}U\in H^r(\Omega)$ 稍严格，这里可以更仔细地考虑权的影响. 如果采用适当的投影算子，例如考虑广义 Jacobi 投影算子，那么精确解可以属于较弱的带权 Sobolev 空间.

3 数值算例

例 1 考虑如下二维 Poisson 方程的齐次 Dirichlet 边值问题：

$$-\nabla^2 u=2\pi^2\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2),$$
$$(x_1,x_2)\in\Omega,$$

其精确解为

$$u(x_1,x_2)=\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2).$$

分别使用 Legendre tau(LT)方法和 Legendre Galerkin (LG)方法计算，得到的 L^2 模误差如表 1 所示.

表1 例1的L^2模误差

Table 1 L^2 errors for Example 1

N	8	10	12	14	16
LT	9.27e-04	2.11e-05	3.37e-07	3.98e-09	3.62e-11
LG	4.54e-04	1.06e-05	1.73e-07	2.07e-09	1.91e-11

例2 考虑如下二维Poisson方程的齐次Dirichlet边值问题:

$$-\nabla^2 u=6[|x_1|(1-|x_2|^3)+|x_2|(1-|x_1|^3)],$$
$$(x_1,x_2)\in\Omega,$$

其精确解为

$$u(x_1,x_2)=(1-|x_1|^3)(1-|x_2|^3).$$

分别采用LT方法和LG方法计算,得到的L^2模误差如表2所示.

由例2可以看出,因为解$U\in H^{3.5-\epsilon}(\Omega)(\epsilon>0)$,所以其数值结果表明它能达到$L^2$模下最优收敛阶,并且tau方法具有与Galerkin方法相似的收敛性态.

例3 考虑如下二维Poisson方程的齐次Dirichlet边值问题:

$$-\nabla^2 u=f(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega,$$

式中,

$$f(x_1,x_2)=[-3x_1^2(1-x_1^2)^{-1/2}+3(1-x_1^2)^{1/2})(1-x_2^2)^{3/2}+(1-x_1^2)^{3/2}(-3x_2^2(1-x_2^2)^{-1/2}+3(1-x_2^2)^{1/2}],$$

其精确解为

$$u(x_1,x_2)=(1-x_1^2)^{3/2}(1-x_2^2)^{3/2}.$$

分别用LT方法和LG方法计算,得到的L^2模误差如表3所示.

表2 例2的L^2模误差

Table 2 L^2 errors for Example 2

N	16	32	64	128	256	512	1 024
LT	2.42e-4	2.17e-5	1.97e-6	2.26e-7	2.18e-8	2.28e-9	2.77e-10
收敛阶		$N^{-3.48}$	$N^{-3.46}$	$N^{-3.12}$	$N^{-3.37}$	$N^{-3.26}$	$N^{-3.04}$
LG	2.06e-4	2.00e-5	1.89e-6	2.22e-7	2.16e-8	2.27e-9	2.76e-10
收敛阶		$N^{-3.36}$	$N^{-3.40}$	$N^{-3.09}$	$N^{-3.36}$	$N^{-3.25}$	$N^{-3.04}$

表3 例3的L^2模误差

Table 3 L^2 errors for Example 3

N	16	32	64	128	256	512	1 024
LT	1.15e-3	1.88e-4	3.17e-5	5.40e-6	9.05e-7	1.71e-7	2.98e-8
收敛阶		$N^{-2.61}$	$N^{-2.57}$	$N^{-2.55}$	$N^{-2.58}$	$N^{-2.40}$	$N^{-2.52}$
LG	2.29e-4	2.23e-5	2.28e-6	2.04e-7	2.55e-8	2.94e-9	3.18e-10
收敛阶		$N^{-3.36}$	$N^{-3.29}$	$N^{-3.48}$	$N^{-3.18}$	$N^{-2.94}$	$N^{-3.21}$

由例3可以看出,如果解在边界上有奇性,则LT方法的精度就不如LG方法.

例4 考虑如下二维Poisson方程的齐次Dirichlet边值问题:

$$-\nabla^2 u=f(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega,$$

式中,

$$f(x_1,x_2)=-2[x_1^2+x_2^2-2+2x_1(x_2^2-1)+2x_2(x_1^2-1)+(x_1^2-1)(x_2^2-1)]e^{x_1+x_2},$$

其精确解为

$$u(x_1,x_2)=({x_1}^2-1)({x_2}^2-1)e^{x_1+x_2}.$$

分别用LT方法和LG方法进行计算,得到的L^2模误差如表4所示.

表4 例4的L^2模误差

Table 4 L^2 errors for Example 4

N	8	10	12	14	16
LT	3.75e-06	1.23e-08	2.68e-11	4.18e-14	4.34e-15
LG	1.74e-06	5.98e-09	1.35e-11	2.15e-14	4.62e-15

通过上述算例,对于$\omega^{-1,-1}U\in H^r(\Omega)$这个条件,当更仔细地考虑权的影响时,就可以看出LT方法与LG方法的区别,即如果解充分光滑或者解在区域内有奇性,则LT方法和LG方法几乎具有相同的精度;如果解在边界上有奇性,则LT方法的精度就不及LG方法.

参考文献:

[1] BERNARDI C, MADAY Y. Spectral methods, handbook of numerical analysis [M]. Amsterdam: Elsevier, 1997: 209-486.

[2] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTESONI A, et al. Spectral Methods: fundamentals in single domains [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[3] SHEN J, TANG T. Spectral and high-order methods with applications [M]. Beijing: Science Press, 2006.

[4] ALIABADI M H, ORTIZ E L. Numerical treatment of moving and free boundary value problems with the tau method [J]. Comput Math Appl, 1998, 35(8):53-61.

[5] HOSSEINI S M, SHAHMORAD S. Tau numerical solution of fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial bases [J]. Appl Math Model, 2003, 27: 145-154.

[6] SHEN J. A spectral-tau approximation for the Stokes and Navier-Stokes equations [J]. Math Model Num Anal, 1988, 22(4):677-693.

[7] TANG J G, MA H P. Single and multi-interval Legendre tau-methods in time for parabolic equations [J]. Adv Comput Math, 2002, 17:349-367.

[8] SHEN J. Efficient spectral-Galerkin method—(Ⅰ). Direct solvers of second- and fourth-order equations using Legendre polynomials [J]. SIAM J Sci Comput, 1994, 15(6):1489-1505.

[9] SHEN J. Efficient spectral-Galerkin method—(Ⅱ). Direct solvers of second- and fourth-order equations using Chebyshev polynomials [J]. SIAM J Sci Comput, 1995, 16(1):74-87.

[10] JUN S, KANG S, KWON Y. A direct solver for the Legendre tau approximation for the two-dimensional Poisson problem [J]. J Appl Math Comput, 2007, 23: 25-42.

[11] SACCHI LANDRIANI G. Spectral tau approximation of the two-dimensional Stokes problem [J]. Numer Math, 1988, 52:683-699.

[12] SHEN T T, ZHANG Z Q, MA H P. Optimal error estimates of the Legendre Tau method for second-order differential equations [J]. J Sci Comput, 2010, 42(2): 198-215.

(编辑:孟庆勋)