doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2011.05.007

一类拟线性抛物型方程的非局部边值问题

周长亮，　王远弟

(上海大学 理学院,上海 200444)

摘要: 讨论非局部边界条件下一类具有非退化拟线性抛物型偏微分方程解的性质,通过运用上、下解和单调迭代的方法,得到抛物型问题解的存在唯一性以及椭圆问题最大、最小解的存在性.同时,还得到发展方程解对平衡解的渐近性态.

关键词: 拟线性抛物型;上解;下解;渐近性;非局部边界问题

中图分类号: O 175.26　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1007-2861(2011)05-0606-08

A Class of Quasi-linear Parabolic Equations with Nonlocal Boundary Problem

ZHOU Chang-liang,　WANG Yuan-di

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: This paper concerns a class of quasi-linear parabolic and elliptic partial differential equations in a bounded domain with nonlocal boundary conditions. The equations under consideration are non-degenerate depending on the property of the diffusion coefficient. By using the upper and lower solutions and monotone iteration, the aim of the paper is to show existence and uniqueness of solutions for the time-dependent problem, existence of maximal and minimal steady-state solutions of the elliptic problem, and the asymptotic behavior of the time-dependent solutions in relation to the steady-state solutions.

Key words: quasi-linear parabolic; upper solution; lower solution; asymptotic behavior; nonlocal boundary problem

本工作研究如下具有非局部边界条件的拟线性偏微分方程问题:

$$\begin{cases} D(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(aD(u)\nabla u) + \\ \quad \boldsymbol{b}\cdot(D(u)\nabla u) = f(t,x,u),\ t>0, x\in\Omega, \\ u+D(u)\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \displaystyle\int_\Omega k(x,y)u(t,y)\mathrm{d}y,\ t>0, x\in\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中,Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界的区域,具有边界 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}(0<\alpha<1)$,$\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}$表示$\partial\Omega$的外法方向向量,其中函数$k(x,y)$,$D(u)$满足 $k(x,y)\in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})\times C(\bar{\Omega})$且$k(x,y)\geqslant 0$,$D(u)$在 $\mathbf{R}$ 上二阶连续可导且 $D(u)=D(-u)$,$D(u)>\gamma>0$. 系数 $a=a(t,x)$,$\boldsymbol{b}(t,x)=(b_1(t,x),b_2(t,x),\cdots,b_n(t,x))$,$f(t,x,u)$是给定的满足本文第1节中条件(H1)的函数.

收稿日期:2010-01-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671118,10572080);上海市教委重点学科建设资助项目(J50101)

通信作者:王远弟(1965~),男,副教授,研究方向为应用偏微分方程. E-mail:ydwang@staff.shu.edu.cn

拟线性抛物型偏微分方程问题起源于具有内部热源的热传导等研究,其中温度 $u(t,x)$ 满足如下方程:

$$\rho(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(k(t,x,u)\nabla u)=f(t,x,u),$$

式中,$\rho(t,x,u)$为热容,$k(t,x,u)$为导热系数,$f(t,x,u)$为内部热源. 在经典的 Dirichlet 和 Neumann 边界条件下,此类方程解的全局存在性和渐进性质都有了一定的研究成果. Pao 等[1-2] 在经典型的非线性 Neumann 边界条件 $D(u)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}=g(t,x,u)$下得到了方程(1)古典解的存在性、唯一性和渐近性. 另一方面,Day[3] 在研究热弹性力学时发现,在拟静态条件下其熵满足一个非局部边值问题,并得出了线性抛物型方程在非局部边值条件下解的存在等性质. Deng[4] 和 Pao[5] 对该类问题进行了更深入的研究,得到了半线性抛物型偏微分方程在非局部边界条件下解的存在等性质. 近年来,对拟线性抛物型方程在不同于方程(2)的非局部边值条件下的研究也有了一些成果. 文献[6]研究了一类拟线性方程在非局部边界 $u=\int_\Omega k(x,y)u(t,y)\mathrm{d}y$ 下的问题应用解表示,并估计得到正解的爆破性质,而文献[7]对上述问题作了推广. 本工作研究了问题(1)以及相应的椭圆问题(平衡问题),即

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a(x)D(u)\nabla u)+\boldsymbol{b}(x)\cdot\\ \quad(D(u)\nabla u)=f(x,u),\quad x\in\Omega,\\ u+D(u)\dfrac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\displaystyle\int_\Omega k(x,y)u(y)\mathrm{d}y,\quad x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{2}$$

本工作主要运用上、下解和相应的单调迭代方法研究问题(1)解的存在唯一性和问题(2)最大、最小解的存在性,以及发展方程解收敛到平衡问题最大、最小解的渐近行为,并将文献[1]等的结果推广到拟线性抛物型方程的非局部边值问题. 最后,考察了发展方程解收敛到平衡问题最大、最小解的渐近性态.

1　抛物型方程解的存在性和唯一性

任意给定正实数 T, 记 $D_T=\Omega\times(0,T]$,$S_T=\partial\Omega\times[0,T]$. $C^\alpha(Q)$为 Q 中指数为 $\alpha\in(0,1)$ 的 Hölder 连续函数空间(Q 为 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中任意的区域). $C^m(\Omega)$为 Ω 内 m 阶连续可导函数的集合,$C^{1,2}(D_T)$为$(t,x)\in D_T$ 内关于 t 一阶连续可微和关于 x 二阶连续可微函数的集合.

条件(H1)　函数 $a(t,x)\in C^{1+\alpha}(\bar D_T)$,$a(t,x)\geqslant a_0>0$,$\boldsymbol{b}(t,x)\in(C^\alpha(\bar D_T))^n$,$f(\cdot,u)\in C^1(\mathbf{R})$,$\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,\cdot)\in C(\bar D_T)$, $\sup\limits_{P,Q\in D_T}\frac{|f(P,u)-f(Q,u)|}{d^\alpha(P,Q)}\leqslant\eta(u)$($\eta(u)$为 $\mathbf{R}$ 上的非负连续函数,$d(P,Q)$为抛物距离),$u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$.

本节中假设条件(H1)成立. 为了有效地研究问题(1),引入变换

$$w=\mathscr{D}(u)=\int_0^u D(s)\mathrm{d}s.$$

由于 $\mathscr{D}'(u)=D(u)>0$,故存在反函数 $u=q(w)$,因此,在该变换下,问题(1)转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}-\nabla\cdot(a\nabla w)+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla w)=\\ \quad f(t,x,u),\ t>0,x\in\Omega,\\ u+\dfrac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\displaystyle\int_\Omega k(x,y)u(t,y)\mathrm{d}y,\ t>0,x\in\partial\Omega,\\ w(0,x)=\mathscr{D}(u_0)(x),\ x\in\Omega.\\ u=q(w).\end{cases}\tag{3}$$

接下来,给出问题(1)和(3)的上、下解的定义.

定义 1　函数 $\tilde u\in C^{1,2}(D_T)\cap C^{0,1}(\bar D_T)$称为问题(1)的上解,指 $\tilde u$ 满足

$$\begin{cases}D(\tilde u)\dfrac{\partial\tilde u}{\partial t}-\nabla\cdot(aD(\tilde u)\nabla\tilde u)+\boldsymbol{b}\cdot\\ \quad(D(\tilde u)\nabla\tilde u)\geqslant f(t,x,\tilde u),\ (t,x)\in D_T,\\ \tilde u+D(\tilde u)\dfrac{\partial\tilde u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant\displaystyle\int_\Omega k(x,y)\tilde u(t,y)\mathrm{d}y,\ (t,x)\in S_T,\\ \tilde u(0,x)\geqslant u_0(x),\ x\in\Omega.\end{cases}$$

假如 $\hat u\in C^{1,2}(D_T)\cap C^{0,1}(\bar D_T)$满足把上式“$\geqslant$”换成“$\leqslant$”所得到的不等式时,则称 $\hat u$ 为问题 (1) 的下解;若有 $\tilde u\geqslant\hat u$,则称问题 (1) 的上、下解是有序的.

出于研究问题(1)上、下解的有序性及解的存在唯一性的需要, 首先研究如下线性不等式问题:

$$\begin{cases}z_t-\nabla(a\nabla z)+\boldsymbol{b}\nabla z+c^{(1)}z\geqslant 0,\ (t,x)\in D_T,\\ \beta(t,x)z+\dfrac{\partial z}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant\displaystyle\int_\Omega k(x,y)\boldsymbol{\sigma}(t,y)z(t,y)\mathrm{d}y,\\ \quad(t,x)\in S_T,\\ z(0,x)\geqslant 0,\ x\in\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

式中,$c^{(1)}\in C(\bar D_T)$,$\beta(t,x)\in C(\bar D_T)$,$\boldsymbol{\sigma}(t,x)\in C(\bar D_T)$,并且$\beta(t,x)>0$,$\boldsymbol{\sigma}(t,x)>0$.

引理 1 若 $z\in C^{1,2}(D_T)\cap C^{0,1}(\bar{D}_T)$ 满足式(4)，那么在 $\bar{D}_T$ 上，有 $z\geqslant 0$.

证明 当 $k(x,y)$ 不恒等于 0 时($k(x,y)=0$ 为平凡的)，令

$$\tilde{k}(t,x,y)=\frac{\sigma(t,y)k(x,y)}{\beta(t,x)},$$

由文献[7]可知，能够找到正函数 $\phi(x)\in C^2(\bar{\Omega})$，使得 $\phi(x)$ 满足

$$\phi(x)=1,\ \frac{\partial\phi(x)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant 0,\ x\in S_T,\ \min_{\bar{\Omega}}\phi(x)\geqslant\varepsilon>0,$$
$$\int_\Omega\tilde{k}(t,x,y)\phi(y)\mathrm{d}y<1,\ t\in[0,T],\ x\in S_T.$$

引入变换 $z=\mathrm{e}^{\lambda t}\phi\tilde{z}$，式(4)可以转化为

$$\begin{cases}\tilde{z}_t-\dfrac{1}{\phi}\nabla(a\phi\nabla\tilde{z})+\left(\boldsymbol{b}-\dfrac{a}{\phi}\nabla\phi\right)\nabla\tilde{z}+\\ \quad\left(\dfrac{\boldsymbol{b}\nabla\phi}{\phi}-\dfrac{\nabla(a\nabla\phi)}{\phi}+c^{(1)}+\lambda\right)\tilde{z}\geqslant 0,\ (t,x)\in D_T,\\ \left(1+\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\tilde{z}+\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant\\ \quad\displaystyle\int_\Omega\tilde{k}(t,x,y)\phi(y)\tilde{z}(t,y)\mathrm{d}y,\ (t,x)\in S_T,\\ \tilde{z}(0,x)\geqslant 0,\ x\in\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

现在取定足够大的 λ，使得 $\dfrac{\boldsymbol{b}\nabla\phi}{\phi}-\dfrac{\nabla(a\nabla\phi)}{\phi}+c^{(1)}+\lambda>0$.

假设结论不成立，那么存在使得 $z<0$ 的点，即存在使 $\tilde{z}<0$ 的点. 因此，必存在点 $(t_0,x_0)\in\bar{D}_T$，使得 $\tilde{z}$ 满足 $\tilde{z}(t_0,x_0)=\min\limits_{\bar{D}_T}\tilde{z}<0$.

当 $(t_0,x_0)\in D_T$ 时，可以得到 $\tilde{z}_t(t_0,x_0)\leqslant 0$，$\nabla\tilde{z}(t_0,x_0)=0$，$\Delta\tilde{z}(t_0,x_0)\geqslant 0$，代入式(5)，有

$$0>\left[\tilde{z}_t-\frac{1}{\phi}\nabla(a\phi\nabla\tilde{z})+\left(\boldsymbol{b}+\frac{a}{\phi}\nabla\phi\right)\nabla\tilde{z}+\left(\frac{\boldsymbol{b}\nabla\phi}{\phi}-\frac{\nabla(a\nabla\phi)}{\phi}+c^{(1)}+\lambda\right)\tilde{z}\right]\Bigg|_{(t_0,x_0)}\geqslant 0,\ \text{矛盾.}$$

当 $(t_0,x_0)\in S_T$ 时，可以得到 $\tilde{z}(t_0,x_0)<0$，$\dfrac{\partial\tilde{z}(t_0,x_0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\leqslant 0$，代入式(5)，得

$$0>\tilde{z}(t_0,x_0)\geqslant\left[\left(1+\frac{1}{\beta}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\tilde{z}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right]\Bigg|_{(t_0,x_0)}\geqslant\int_\Omega\tilde{k}(t_0,x_0,y)\phi(y)\tilde{z}(t_0,y)\mathrm{d}y>\tilde{z}(t_0,x_0),$$

矛盾.

故得到在 $\bar{D}_T$ 上有 $\tilde{z}\geqslant 0$，即在 $\bar{D}_T$ 上也有 $z\geqslant 0$. 得证.

引理 2 设 $\tilde{u}$，$\hat{u}$ 分别为问题(1)的上、下解，则 $\tilde{u}(t,x)\geqslant\hat{u}(t,x)$，$\forall(t,x)\in\bar{D}_T$，而且 $(\tilde{u},\tilde{w})\geqslant(\hat{u},\hat{w})$，其中 $\tilde{w}=\mathscr{D}(\tilde{u})$，$\hat{w}=\mathscr{D}(\hat{u})$.

证明 令 $z=\tilde{w}-\hat{w}$，则从上、下解的定义可得

$$\begin{cases}z_t-\nabla(a\nabla z)+\boldsymbol{b}\nabla z+\\ \quad B(\tilde{u},\tilde{w},\hat{u},\hat{w})z\geqslant 0,\quad(t,x)\in D_T,\\ B_1(\tilde{w},\hat{w})z+\dfrac{\partial z}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant\\ \quad\displaystyle\int_\Omega k(x,y)B_1(\tilde{w},\hat{w})z\mathrm{d}y,\quad(t,x)\in S_T,\\ z(0,x)\geqslant 0,\quad x\in\Omega,\end{cases}$$

其中

$$B_1(\tilde{w},\hat{w})=\int_0^1\frac{1}{D(q(\hat{w}+s(\tilde{w}-\hat{w})))}\mathrm{d}s>0,$$
$$B(\tilde{u},\tilde{w},\hat{u},\hat{w})=\int_0^1\frac{-1}{D(q(\hat{w}+t(\tilde{w}-\hat{w})))}\mathrm{d}t\cdot\int_0^1\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,\hat{u}+s(\tilde{u}-\hat{u}))\mathrm{d}s.$$

因 $B(\tilde{u},\tilde{w},\hat{u},\hat{w})$ 是有界的，依据引理 1 可得 $z\geqslant 0$，故 $\tilde{w}\geqslant\hat{w}$ 成立，从而可得 $\tilde{u}\geqslant\hat{u}$. 得证.

推论 1 假设 $u(t,x)$，$v(t,x)\in C^{1,2}(D_T)\cap C^{0,1}(\bar{D}_T)$ 是初值分别为 $u(0,x)$，$v(0,x)$ 的问题(1)的解，若满足 $u(0,x)\geqslant v(0,x)$，那么在 $\bar{D}_T$ 有 $u(t,x)\geqslant v(t,x)$ 成立.

证明 $u(t,x)$ 可以看作初值条件为 $v(0,x)$ 的问题(1)的上解，依据引理 2 可得 $u(t,x)\geqslant v(t,x)$. 得证.

引理 2 说明问题(1)的上、下解是有序的. 现以上、下解为初始值构造迭代序列来讨论解的存在性. 由于 $\mathscr{D}'(u)=D(u)>\gamma>0$，则存在常数 $\gamma^{(1)}>0$，使得 $\gamma^{(1)}\mathscr{D}'(u)-1\geqslant 0$.

记 $g(t,x,u)=\gamma^{(1)}\mathscr{D}(u)-u+\int_\Omega k(x,y)u(t,y)\mathrm{d}y$.

用 $u^{(0)}=\hat{u}$ 或 $u^{(0)}=\tilde{u}$ 为初始值，构造如下迭代序列

$\{u^{(m)},w^{(m)}\}(m=1,2,\cdots)$：

$$
\begin{cases}
Lw^{(m)}=\dfrac{\partial w^{(m)}}{\partial t}-\nabla\cdot(a\nabla w^{(m)})+\\
\quad \boldsymbol{b}\cdot(\nabla w^{(m)})=f(t,x,u^{(m-1)}),\ (t,x)\in D_T,\\
\gamma^{(1)}w^{(m)}+\dfrac{\partial w^{(m)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}=g(t,x,u^{(m-1)}),\\
\quad (t,x)\in S_T,\\
w^{(m)}(0,x)=\mathscr{D}(u_0)(x),\ x\in\Omega.\\
u^{(m)}=q(w^{(m)}).
\end{cases}
\tag{6}
$$

把 $u^{(m-1)}$ 看成是已知的情况下，式(6)是关于 $w^{(m)}$ 的方程，由文献[8]中的定理 5.3 可以得到在 D_T 上方程解 $w^{(m)}$ 的存在性.

当初始迭代 $u^{(0)}=\hat{u}$ 时，用序列 $\{\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)}\}$ 表示迭代序列 $\{u^{(m)},w^{(m)}\}$，其中 $\underline{w}^{(0)}=\mathscr{D}(\hat{u})$；当初始迭代 $u^{(0)}=\tilde{u}$ 时，用序列 $\{\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)}\}$ 表示迭代序列 $\{u^{(m)},w^{(m)}\}$，其中 $\bar{w}^{(0)}=\mathscr{D}(\tilde{u})$.

引理 3　式(6)的迭代序列 $\{\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)}\}$，$\{\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)}\}$ 具有如下单调性质：

$$
(\hat{u},\hat{w})\leqslant(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})\leqslant(\underline{u}^{(m+1)},\underline{w}^{(m+1)})\leqslant
(\bar{u}^{(m+1)},\bar{w}^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})\leqslant(\tilde{u},\tilde{w}),\quad m=1,2,\cdots.
$$

证明　令 $z^{(1)}=\underline{w}^{(1)}-\underline{w}^{(0)}$，其中 $(u^{(0)},w^{(0)})=(\hat{u},\hat{w})$. 通过式(6)可得 $z^{(1)}$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z^{(1)}}{\partial t}-\nabla\cdot(a\nabla z^{(1)})+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla z^{(1)})+\\
\quad B_0(\underline{u}^{(1)},\underline{w}^{(1)},\hat{u},\hat{w})z^{(1)}\geqslant 0,\quad (t,x)\in D_T,\\
\gamma^{(1)}z^{(1)}+\dfrac{\partial z^{(1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\geqslant 0,\quad (t,x)\in S_T,\\
z^{(1)}(0,x)\geqslant 0,\quad x\in\Omega,
\end{cases}
$$

其中 $B_0(\underline{u}^{(1)},\underline{w}^{(1)},\hat{u},\hat{w})=\int_0^1\dfrac{-1}{D(q(\hat{w}+t(\underline{w}^{(1)}-\hat{w})))}\mathrm{d}t\cdot\int_0^1\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,x,\hat{u}+s(\underline{u}^{(1)}-\hat{u}))\mathrm{d}s$ 是有界的. 依据引理 1 可得 $z^{(1)}\geqslant 0$，即 $\underline{w}^{(1)}\geqslant\hat{w}$.

假设当 $n=m$ 时，$(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})\geqslant(\underline{u}^{(m-1)},\underline{w}^{(m-1)})$ 成立. 则当 $n=m+1$ 时，令 $z^{(m+1)}=\underline{w}^{(m+1)}-\underline{w}^{(m)}$，可得 $z^{(m+1)}$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z^{(m+1)}}{\partial t}-\nabla\cdot(a\nabla z^{(m+1)})+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla z^{(m+1)})+\\
\quad B(\underline{w}^{(m)},\underline{w}^{(m+1)},\underline{u}^{(m)},\underline{u}^{(m+1)})z^{(m+1)}\geqslant 0,(t,x)\in D_T,\\
\gamma^{(1)}z^{(m+1)}+\dfrac{\partial z^{(m+1)}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\geqslant 0,\quad (t,x)\in S_T,\\
z^{(m+1)}(0,x)\geqslant 0,\quad x\in\Omega,
\end{cases}
$$

其中 $B=\int_0^1\dfrac{-1}{D(q(\underline{w}^{(m)}+t(\underline{w}^{(m+1)}-\underline{w}^{(m)})))}\mathrm{d}t\cdot\int_0^1\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,x,\underline{u}^{(m)}+s(\underline{u}^{(m+1)}-\underline{u}^{(m)}))\mathrm{d}s$ 是有界的. 依据引理 1，可得 $z^{(m+1)}\geqslant 0$，即 $\underline{w}^{(m+1)}\geqslant\underline{w}^{(m)}$. 因此，有 $(\underline{u}^{(m+1)},\underline{w}^{(m+1)})\geqslant(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})$，$m=1,2,\cdots$.

同理可证 $(\bar{u}^{(m+1)},\bar{w}^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})$，$(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})\leqslant(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})$，得证.

由上述讨论可知，存在 $(\underline{u},\underline{w})$，$(\bar{u},\bar{w})$，使得 $\lim\limits_{m\to+\infty}(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})=(\underline{u},\underline{w})$，$\lim\limits_{m\to+\infty}(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})=(\bar{u},\bar{w})$. 并且满足如下关系：$(\hat{u},\hat{w})\leqslant(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})\leqslant(\underline{u}^{(m+1)},\underline{w}^{(m+1)})\leqslant(\underline{u},\underline{w})\leqslant(\bar{u},\bar{w})\leqslant(\bar{u}^{(m+1)},\bar{w}^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})\leqslant(\tilde{u},\tilde{w})$，$m=1,2,\cdots$.

定理 1　设 $\tilde{u},\hat{u}$ 分别是问题(1)的上、下解，则问题(6)所定义的序列 $\{(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})\}$，$\{(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})\}$ 单调收敛到问题(3)的唯一古典解 (u^*,w^*)，而且 u^* 为问题(1)的唯一古典解.

证明　以 $(u^{(m)},w^{(m)})$ 代替 $(\underline{u}^{(m)},\underline{w}^{(m)})$ 或者 $(\bar{u}^{(m)},\bar{w}^{(m)})$.

设微分算子 L 的基本解为 $\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)$，由文献[9]可知，问题(6)中的 $w^{(m+1)}$ 可以表示为

$$
w^{(m+1)}=J^{(0)}(t,x)+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_\Omega\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u^{(m)}(\zeta,\epsilon))\mathrm{d}\epsilon+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\partial\Omega}\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)\psi^{(m)}(\zeta,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon,
$$

式中，

$$
J^{(0)}(t,x)=\int_\Omega\Gamma(t,x;0,\epsilon)w(0,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon,\quad (t,x)\in D_T,
$$

$$
\psi^{(m)}(t,x)=2\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\partial\Omega}Q(t,x;\zeta,\epsilon)\psi^{(m)}(\zeta,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon-2H^{(m)}(t,x),\quad (t,x)\in S_T,
$$

其中

$$
Q(t,x;\zeta,\epsilon)=\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{\nu}_x}(t,x;\zeta,\epsilon)+\gamma^{(1)}\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon),
$$

$$H^{(m)}(t,x)=\int_{\Omega}Q(t,x;0,\epsilon)w(0,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon+g(t,x;u^{(m)}(t,x))+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\Omega}Q(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u^{(m)}(\zeta,\epsilon))\mathrm{d}\epsilon.$$

对任意的$(t,x)\in S_T$, $k(x,y)u^{(m)}(t,y)$是有界的,因此,由控制收敛定理,可得

$$\lim_{m\to\infty}g(t,x,u^{(m)})=\gamma^{(1)}\mathscr{D}(u)-u+\int_{\Omega}k(x,y)u(t,y)\mathrm{d}y=g(t,x,u).$$

由于对任意的$(t,x)\in S_T$, $f(t,x,\cdot)$是连续的,故$\lim\limits_{m\to\infty}Q(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u^{(m)}(\zeta,\epsilon))=Q(t,x;\zeta,\epsilon)\cdot f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))$对$(\zeta,\epsilon)\in D_T$几乎处处成立. 又因$|Q(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u^{(m)}(\zeta,\epsilon))|\leqslant\dfrac{\tau}{|t-\zeta|^{\omega}|x-\epsilon|^{n+1-2\omega-r}}\left(1-\dfrac{r}{2}<\omega<1, r>0, \tau\text{ 为一正常数}\right)$,由控制收敛定理,对任意的$(t,x)\in S_T$,可得

$$\lim_{m\to\infty}H^{(m)}(t,x)=\int_{\Omega}Q(t,x;0,\epsilon)w(0,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon+g(t,x;u(t,x))+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\Omega}Q(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))\mathrm{d}\epsilon.$$

记$H(t,x)=\int_{\Omega}Q(t,x;0,\epsilon)w(0,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon+g(t,x;u(t,x))+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\Omega}Q(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))\mathrm{d}\epsilon$.

设$\psi(t,x)$满足积分方程$\psi(t,x)=2\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\partial\Omega}Q(t,x;\zeta,\epsilon)\psi(\zeta,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon-2H(t,x)$, 由文献[9]中的引理2.2, 可得$\lim\limits_{m\to\infty}\psi^{(m)}(t,x)=\psi(t,x)$, $(t,x)\in S_T$.

由文献[9]中$\psi(t,x)$的表达式可知,$\psi(t,x)$在S_T上有界,因此,可得$\{\psi^{(m)}(t,x)\}$在S_T上一致有界.

由于

$$|\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u^{(m)}(\zeta,\epsilon))|\leqslant\frac{\tau_1}{|t-\zeta|^{\omega}|x-\epsilon|^{n-2+\omega}},$$

$$|\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)\psi^{(m)}(\zeta,\epsilon)|\leqslant\frac{\tau_2}{|t-\zeta|^{\omega}|x-\epsilon|^{n-2+\omega}},$$

式中,$0<\omega<1$,τ_1,τ_2均为正常数,因此,由控制收敛定理可知,$w(t,x)$满足

$$w(t,x)=J^{(0)}(t,x)+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\Omega}\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))\mathrm{d}\epsilon+\int_0^t\mathrm{d}\zeta\int_{\partial\Omega}\Gamma(t,x;\zeta,\epsilon)\psi(\zeta,\epsilon)\mathrm{d}\epsilon.$$

由于$f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))$在$\bar{D}_T$上有界,$\psi(\zeta,\epsilon)$在$S_T$上有界,依据文献[9]中的引理1.1可得,$w(t,x)$在$\bar{D}_T$上连续,因此,$u(t,x)=q(w(t,x))$在$\bar{D}_T$上连续,于是$H(t,x)$在$S_T$上连续.

由文献[9]中的引理2.2可知,$\psi(t,x)$在S_T上也是连续的. 又由文献[9]中的引理1.2可得,$w(t,x)$在$\bar{D}_T$上Hölder连续,因$u=q(w)$二阶连续可导,可得$u(t,x)$在$\bar{D}_T$上Hölder连续,即

$$|f(t,x,u(t,x))-f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))|\leqslant|f(t,x,u(t,x))-f(\zeta,\epsilon,u(t,x))|+|f(\zeta,\epsilon,u(t,x))-f(\zeta,\epsilon,u(\zeta,\epsilon))|\leqslant M(|t-\zeta|+|x-\epsilon|^2)^{\frac{\alpha}{2}}+M_1|u(t,x)-u(\zeta,\epsilon)|\leqslant(M+M_1H_{\alpha}^u)(|t-\zeta|+|x-\epsilon|^2)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

式中,H_{α}^u为常数,故$f(t,x,u(t,x))$是指数为α的Hölder连续函数. 又因$g(t,x,u(t,x))$连续,依据文献[9]中的引理1.2可得,$w(t,x)$是问题的古典解,即$u(t,x)$是问题(1)的古典解.

若u_1,u_2是问题(1)的解,由推论1可得,$u_1\leqslant u_2$,$u_1\geqslant u_2$,故$u_1=u_2$. 得证.

2 椭圆方程问题

平衡问题(2)在变换$u=q(w)$下可以转化为如下问题:

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a\nabla w)+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla w)=f(x,u), & x\in\Omega,\\ u+\dfrac{\partial w}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\int_{\Omega}k(x,y)u(y)\mathrm{d}y, & x\in\partial\Omega,\\ u=q(w).\end{cases}\tag{7}$$

定义2 函数$\tilde{u}_s\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$称为问题(2)的上解,指$\tilde{u}_s$满足

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(aD(\tilde{u}_s)\nabla\tilde{u}_s)+\boldsymbol{b}\cdot(D(\tilde{u}_s)\nabla\tilde{u}_s)\geqslant f(x,\tilde{u}_s), & x\in\Omega,\\ \tilde{u}_s+D(\tilde{u}_s)\dfrac{\partial\tilde{u}_s}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant\int_{\Omega}k(x,y)\tilde{u}_s(y)\mathrm{d}y, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

假如$\hat{u}_s\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$满足把上式“$\geqslant$”换成“$\leqslant$”所得到的不等式时,则称$\hat{u}_s$为问题(2)的下解;假如还满足$\tilde{u}_s\geqslant\hat{u}_s$,则称$\tilde{u}_s$,$\hat{u}_s$为问题(2)有序的上、下解.

条件(H2) 函数$a(x)\in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$,$\boldsymbol{b}(x)\in(C^{\alpha}(\bar{\Omega}))^n$,$f(\cdot,u)\in C^1(\mathbf{R})$,$\sup\limits_{x,y\in\Omega}\dfrac{|f(x,u)-f(y,u)|}{d^{\alpha}(x,y)}\leqslant\varphi(u)$,其中$\varphi(u)$为$\mathbf{R}$上非负连续函数,$d(x,y)$为欧

氏距离.

本节的研究中，一般认为条件(H2)成立. 假设 $\tilde{u}_s,\hat{u}_s$ 分别为问题(2)有序的上、下解，记

$$S_0=\{u\in C(\bar{\Omega}):\hat{u}_s\leqslant u\leqslant\tilde{u}_s\},$$

$$S_0\times T_0=\{(u,w)\in C(\bar{\Omega})\times C(\bar{\Omega}):(\hat{u}_s,\hat{w}_s)\leqslant (u,w)\leqslant(\tilde{u}_s,\tilde{w}_s)\}.$$

由于 $\mathscr{D}'(u)=D(u)>\gamma>0$，则存在常数 $\gamma^{(2)}>0,\gamma^{(3)}>0$，使得

$$\gamma^{(2)}\mathscr{D}'(u)+\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\geqslant 0,\ \gamma^{(3)}\mathscr{D}'(u)-1\geqslant 0.$$

记

$$F(x,u)=\gamma^{(2)}\mathscr{D}(u)+f(x,u),$$

$$G(x,u)=\gamma^{(3)}\mathscr{D}(u)-u+\int_\Omega k(x,y)u(y)\mathrm{d}y.$$

现在以 $u_s^{(0)}=\tilde{u}_s$ 或 $u_s^{(0)}=\hat{u}_s$ 为初始值作迭代，构造如下序列 $\{u_s^{(m)},w_s^{(m)}\}$：

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a\nabla w_s^{(m)})+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla w_s^{(m)})+\\ \quad\gamma^{(2)}w_s^{(m)}=F(x,u_s^{(m-1)}),\quad x\in\Omega,\\ \gamma^{(3)}w_s^{(m)}+\dfrac{\partial w_s^{(m)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=G(x,u_s^{(m-1)}),\quad x\in\partial\Omega,\\ u_s^{(m)}=q(w_s^{(m)}).\end{cases}\tag{8}$$

把 $u_s^{(m-1)}$ 看成是已知的情况下，问题(8)是关于 $w_s^{(m)}$ 在非线性边界条件下的线性方程问题. 由文献[10]中的定理 6.31 可得在 $\bar{\Omega}$ 上方程解 $w_s^{(m)}$ 的存在性.

当初始迭代 $u_s^{(0)}=\hat{u}$ 时，用序列 $\{\underline{u}_s^{(m)},\underline{w}_s^{(m)}\}$ 表示迭代序列 $\{u_s^{(m)},w_s^{(m)}\}$，其中 $\underline{w}_s^{(0)}=\mathscr{D}(\hat{u}_s)$；当初始迭代 $u_s^{(0)}=\tilde{u}_s$ 时，用序列 $\{\bar{u}_s^{(m)},\bar{w}_s^{(m)}\}$ 表示迭代序列 $\{u_s^{(m)},w_s^{(m)}\}$，其中 $\bar{w}_s^{(0)}=\mathscr{D}(\tilde{u}_s)$.

定理 2　设 $\tilde{u}_s,\hat{u}_s$ 分别为问题(2)有序的上、下解，则迭代序列 $\{u_s^{(m)},w_s^{(m)}\}$ 具有下列单调的性质，即 $(\hat{u}_s,\hat{w}_s)\leqslant(\underline{u}_s^{(m)},\underline{w}_s^{(m)})\leqslant(\underline{u}_s^{(m+1)},\underline{w}_s^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}_s^{(m+1)},\bar{w}_s^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}_s^{(m)},\bar{w}_s^{(m)})\leqslant(\tilde{u}_s,\tilde{w}_s)$，并且 $\lim\limits_{m\to\infty}(\bar{u}_s^{(m)},\bar{w}_s^{(m)})=(\bar{u}_s,\bar{w}_s)$，$\lim\limits_{m\to\infty}(\underline{u}_s^{(m)},\underline{w}_s^{(m)})=(\underline{u}_s,\underline{w}_s)$ 成立，且 $\underline{u}_s,\bar{u}_s$ 为问题(2)在 S_0 中的最小、最大解.

证明　令 $z^{(1)}=\underline{w}_s^{(1)}-\underline{w}_s^{(0)}=\underline{w}_s^{(1)}-\hat{w}_s$，可得 $z^{(1)}$ 满足如下不等式：

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a\nabla z^{(1)})+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla z^{(1)})+\gamma^{(2)}z^{(1)}\geqslant 0,\quad x\in\Omega,\\ \gamma^{(3)}z^{(1)}+\dfrac{\partial z^{(1)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant 0,\quad x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

因此，由文献[11]中的引理 3.14 可得 $z^{(1)}\geqslant 0$，即 $\underline{w}_s^{(1)}\geqslant\hat{w}_s$.

假设 $\underline{w}_s^{(m)}\geqslant\underline{w}_s^{(m-1)}$ 成立，令 $z^{(m+1)}=\underline{w}_s^{(m+1)}-\underline{w}_s^{(m)}$，则 $z^{(m+1)}$ 满足如下不等式：

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(a\nabla z^{(m+1)})+\boldsymbol{b}\cdot(\nabla z^{(m+1)})+\gamma^{(2)}z^{(m+1)}\geqslant 0,\quad x\in\Omega,\\ \gamma^{(3)}z^{(m+1)}+\dfrac{\partial z^{(m+1)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\geqslant 0.\quad x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

由文献[11]中的引理3.14可得 $z^{(m+1)}\geqslant 0$，即 $\underline{w}_s^{(m+1)}\geqslant\underline{w}_s^{(m)}$.

同理可证，$\bar{w}_s^{(m)}\geqslant\underline{w}_s^{(m)}$，$\bar{w}_s^{(m)}\geqslant\bar{w}_s^{(m+1)}$，由此可得

$$(\hat{u}_s,\hat{w}_s)\leqslant(\underline{u}_s^{(m)},\underline{w}_s^{(m)})\leqslant(\underline{u}_s^{(m+1)},\underline{w}_s^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}_s^{(m+1)},\bar{w}_s^{(m+1)})\leqslant(\bar{u}_s^{(m)},\bar{w}_s^{(m)})\leqslant(\tilde{u}_s,\tilde{w}_s).$$

于是存在 $\underline{u}_s,\bar{u}_s$，使得

$$\lim_{m\to+\infty}\underline{u}_s^{(m)}=\underline{u}_s,\ \lim_{m\to+\infty}\bar{u}_s^{(m)}=\bar{u}_s.$$

每一个 $\underline{w}_s^{(m)}$ 都是问题(8)的解，由文献[10]中的定理 6.31 可得 $\underline{w}_s^{(m)}\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. 由 $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ 到 $C^2(\bar{\Omega})$ 的嵌入定理可知，$\underline{w}_s^{(m)}\in C^2(\bar{\Omega})$.

由文献[9]中的引理 1.3，有如下估计式：

$$\|\underline{w}_s^{(m)}\|_{W_p^1(\Omega)}\leqslant k_1(\|F(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{L_q(\Omega)}+\|G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{L_p(\partial\Omega)}+\|G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{L_q(\partial\Omega)}),$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$，k_i 为正常数，$i=1,2,\cdots,5$.

由于 $\hat{u}_s\leqslant\underline{u}_s^{(m-1)}\leqslant\tilde{u}_s$，$F(x,u)$，$G(x,u)$ 的连续性，因此，对每个 $p\geqslant 1$，$F(x,\underline{u}_s^{(m-1)})$，$G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})$ 在 $L_p(\Omega)$ 和 $L_p(\partial\Omega)$ 中一致有界，也即存在常数 k_2，使得

$$\|F(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{L_p(\Omega)}\leqslant k_2,$$

$$\|G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{L_p(\partial\Omega)}\leqslant k_2.$$

所以，$\{\underline{w}_s^{(m)}\}$ 在 $W_p^1(\Omega)$ 中一致有界.

由于 $\underline{u}_s^{(m)}=q(\underline{w}_s^{(m)})$ 二阶连续可导，可得序列 $\{\underline{u}_s^{(m)}\}$ 在 $W_p^1(\Omega)$ 中一致有界.

又因 $\mathscr{D}(u)\in C^2(\mathbf{R})$，$k(x,y)\in C^{1+\alpha}(S_T\times D_T)$，所以序列 $\{G(x,\underline{u}_s^{(m)})\}$ 在 $W_p^1(\Omega)$ 中一致有界.

对$\underline{w}_s^{(m)}$作$W_p^2(\Omega)$估计,由文献[9]中的引理1.1,有如下估计:

$$\|\underline{w}_s^{(m)}\|_{W_p^2(\Omega)} \leqslant k_3(\|F(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{L_p(\Omega)} + \|G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})\|_{W_p^1(\Omega)}).$$

由此可知,$\{\underline{w}_s^{(m)}\}$在$W_p^2(\Omega)$中一致有界.

当$p>n$时,根据嵌入定理$|\underline{w}_s^{(m)}|_{1+\alpha}^{\bar{\Omega}} \leqslant k_4 \cdot \|\underline{w}_s^{(m)}\|_{W_p^2(\Omega)}$,其中$\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$,因此,$\underline{w}_s^{(m)}$在$C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$中一致有界,由于$\underline{u}_s^{(m)} = q(\underline{w}_s^{(m)})$二阶连续可导,可得$\underline{u}_s^{(m)}$在$C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$中一致有界.从而$F(x,\underline{u}_s^{(m-1)})$在$C^{\alpha}(\bar{\Omega})$中一致有界,$G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})$在$C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$中一致有界.

由文献[9]中的定理1.3,可得如下估计式:

$$|\underline{w}_s^{(m)}|_{2+\alpha}^{(\bar{\Omega})} \leqslant k_5(|F(x,\underline{u}_s^{(m-1)})|_{\alpha}^{(\bar{\Omega})} + |G(x,\underline{u}_s^{(m-1)})|_{1+\alpha}^{(\bar{\Omega})}),$$

故$\{\underline{w}_s^{(m)}\}$在$C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$中一致有界.

由$C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$到$C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$$(0<\beta<\alpha)$的紧嵌入可知,存在$\{\underline{w}_s^{(m)}\}$的子序列$\{\underline{w}_s^{(m_\nu)}\}$按范数收敛到$C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$中唯一的元素$\underline{w}_s$,因此,当$m_\nu \to \infty$时,$\underline{w}_s^{(m_\nu)}, D_x\underline{w}_s^{(m_\nu)}, D_{x_ix_j}\underline{w}_s^{(m_\nu)}$在$\bar{\Omega}$上一致收敛到$\underline{w}_s$及其相应的导数,$\underline{w}_s$是问题(8)的解.于是,$\underline{u}_s = q(\underline{w}_s)$是问题(2)的解.同理可证,$\bar{u}$也是问题(2)的解.

若$u_s \in S_0$是问题(2)的解,则u_s既可以看作是问题(2)的上解,又可以看作是问题(2)的下解.当看成上解时,由本定理的前段证明可知,$\underline{u}_s \leqslant u_s$;同理,当看成下解时,可以得到$u_s \geqslant \bar{u}_s$,故可得$\underline{u}_s \leqslant u_s \geqslant \bar{u}_s$.得证.

3 解的渐近性

假设$\tilde{u}_s, \hat{u}_s$分别为问题(2)有序的上、下解,对任意的$u_0(x) \in S_0$,$\tilde{u}_s, \hat{u}_s$显然也是问题(1)的上、下解.对初值$u_0(x) = \varphi(x) \in S_0$,问题(1)的解记为$u(t,x)$,初值$u_0(x) = \hat{u}_s$时,问题(1)的解记为$\underline{u}(t,x)$,而$u_0(x) = \tilde{u}_s$时,问题(1)的解记为$\bar{u}(t,x)$.由引理2和推论1,可得

$$\hat{u}_s \leqslant \underline{u}(t,x) \leqslant \underline{u}_s \leqslant \bar{u}_s \leqslant \bar{u}(t,x) \leqslant \tilde{u}_s,$$

$$\underline{u}(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant \bar{u}(t,x).$$

定理3 $\underline{u}(t,x)$关于t是单调递增的,$\bar{u}(t,x)$关于t是单调递减的.

证明 对任意的$\delta>0$,有$\hat{u}_s \leqslant \underline{u}(\delta,x)$,当$u_0(x) = \underline{u}(\delta,x)$得到问题(1)的解为$\underline{u}(t+\delta,x)$.依据推论1可得,$\underline{u}(t,x) \leqslant \underline{u}(t+\delta,x)$,故$\underline{u}(t,x)$关于$t$是单调递增的.

同理可证,$\bar{u}(t,x)$关于t是单调递减的.得证.

通过定理3可知,存在$\underline{u}(x)$,$\bar{u}(x)$,使得$\lim\limits_{t\to\infty}\underline{u}(t,x) = \underline{u}(x)$,$\lim\limits_{t\to\infty}\bar{u}(t,x) = \bar{u}(x)$.

定理4 若$\lim\limits_{t\to\infty}\underline{u}(t,x) = \underline{u}(x)$,$\lim\limits_{t\to\infty}\bar{u}(t,x) = \bar{u}(x)$,那么$\bar{u}(x) = \bar{u}_s$,$\underline{u}(x) = \underline{u}_s$成立.

证明 在区域$\bar{D}_\infty$内定义$\underline{u}^{(m)}(t,x) = \underline{u}(t+t_m,x)$,其中$\lim\limits_{m\to\infty}t_m = \infty$.

由$\underline{u}^{(m)}(t,x)$的定义可知,$\underline{u}^{(m)}(t,x)$可以看成是初值$u_0(x) = \underline{u}(t_m,x)$的满足问题(1)的解.因此,$(\underline{u}^{(m)}(t,x), \underline{w}^{(m)}(t,x))$可以看成是满足初值为$(\underline{u}^{(m)}(0,x), \underline{w}^{(m)}(0,x)) = (\underline{u}(t_m,x), \underline{w}(t_m,x))$的问题(3)的解.

重复定理1的证明,可得$\underline{u}(x)$是问题(2)的解.由定理2可得,$\underline{u}(x) \geqslant \underline{u}_s$.又由于$\underline{u}(t,x) \leqslant \underline{u}_s \leqslant \bar{u}_s \leqslant \bar{u}(t,x)$,因此,有$\underline{u}(x) \leqslant \underline{u}_s \leqslant \bar{u}_s \leqslant \bar{u}(x)$.由此即得$\underline{u}(x) = \underline{u}_s$.同理可证,$\bar{u}(x) = \bar{u}_s$.得证.

定理5 若$u_0(x) \in S_0$时,问题(1)的解为$u(t,x)$,则有

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \begin{cases} \underline{u}_s, & \hat{u}_s \leqslant u_0(x) \leqslant \underline{u}_s, \\ \bar{u}_s, & \bar{u}_s \leqslant u_0(x) \leqslant \tilde{u}_s. \end{cases}$$

证明 由$\hat{u}_s \leqslant u_0(x) \leqslant \underline{u}_s$可知,$\underline{u}(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant \underline{u}_s$,再由定理4可得,$\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = \underline{u}_s$.同理可证,当$\bar{u}_s \leqslant u_0(x) \leqslant \tilde{u}_s$时,有$\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = \bar{u}_s$.得证.

参考文献:

[1] PAO C V. Quasilinear parabolic and elliptic equations with nonlinear boundary conditions [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66:639-662.

[2] PAO C V, RUAN W H. Positive solutions of quasi linear parabolic systems with nonlinear boundary conditions [J]. Math Anal Appl, 2007, 333:472-499.

[3] DAY W A. A decreasing property of solutions of parabolic equation with application to thermoelasticity [J]. Quart Appl Math, 1983, 40:468-475.

[4] DENG K. Comparison principle for some nonlocal problems [J]. Quart Appl Math, 1992, 50:517-522.

[5] PAO C V. Dynamics of reaction diffusion equations with nonlocal boundary conditions [J]. Quart Appl Math, 1995, 53:173-186.

[6] WANG Y L, MU C L, XIANG Z Y. Blowup of solutions to a porous medium equation with nonlocal boundary condition [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 192:579-585.

[7] CUI Z J, YANG Z D. Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition [J]. Math Anal Appl, 2008, 342:559-570.

[8] LADYZENSKAJA O A, SOLONNIKOV V A, URAKL'CEVA N N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type [M]. Prividence: Amer Math Soc, 1968.

[9] PAO C V. Nonlinear parabolic and elliptic equations [M]. New York: Plenum Press, 1992:48-52.

[10] 吉耳巴格 D,塔丁格 N S. 二阶椭圆型偏微分方程[M]. 叶其孝,译. 上海:上海科技出版社,1981.

[11] 叶其孝,李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京:科学出版社,1981.

（编辑:孟庆勋）