第 36 卷 第 5 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 5
2013 年 9 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Sep., 2013

带多阈值的两类索赔风险模型中的期望折现罚函数 *

江五元

(湖南理工学院数学学院，岳阳 414006)

(E-mail: csujw@163.com)

杨招军

(湖南大学金融与统计学学院，长沙 410079)

摘 要 本文考虑了带多阈值两类索赔到达风险模型, 在假定两类索赔到达过程均为 phase-type 分布时，建立了期望折现罚函数所满足的积分 - 微分方程．并通过拉普拉斯变换讨论了方程的解.

关键词 两类风险过程； Gerber-Shiu 函数；多层阈值； Phase-type 分布

MR(2000) 主题分类 62P05; 91B30

中图分类 O211.6

1 引言

考虑两类索赔到达风险盈余过程

$$R(t) = u + ct - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

这里 $u \geq 0$ 是初始资金，常数 c 是单位时间的保费收入， $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布的非负随机变量列， X_i 表示来自第一类索赔过程的第 i 次索赔量，具有分布函数 $F(x)$ 和连续的密度函数 $f(x)$, $f(x)$ 的拉氏变换为 $\widetilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,\mathrm{d}x$. 同时， $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布的非负随机变量列， Y_i 表示来自第二类索赔过程的第 i 次索赔量，具有

本文 2013 年 4 月 17 日收到．2013 年 8 月 29 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目 (71171078, 71371068); 教育部博士点基金项目 (20100161110022); 中国博士后科学基金项目 (2012M521514); 湖南省博士后科研资助专项计划项目 (2012RS4030); 湖南省教育厅青年项目 (13B034); 湖南省高校科技创新团队资助和岳阳市科技计划项目资助.

分布函数 $G(x)$ 和连续的密度函数 $g(x)$, 以及拉氏变换 $\widetilde{g}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)\,\mathrm{d}x$. 计数过程 $\{N_1(t);\ t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t);\ t\geq 0\}$ 分别表示到时刻 t 时两类索赔的索赔次数，定义 $N_1(t)=\sup\{n: T_1+T_2+\cdots+T_n\leq t\}$，$T_i$ 表示第一类索赔过程的第 $i-1$ 次与第 i 次索赔的时间间距，设 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 是独立同分布的随机变量列，具有共同的分布函数 $K_1(t)$ 和密度函数 $k_1(t)$, 同样， $N_2(t)=\sup\{n: V_1+V_2+\cdots+V_n\leq t\}$，$V_i$ 表示第二类索赔过程的第 $i-1$ 次与第 i 次索赔的时间间距，设 $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ 是独立同分布的随机变量列，具有共同的分布函数 $K_2(t)$ 和密度函数 $k_2(t)$, 假设 $\{N_1(t);\ t\geq 0\}$，$\{N_2(t);\ t\geq 0\}$，$\{X_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{Y_i\}_{i=1}^\infty$ 是相互独立的，且有正的安全负荷条件： $c>E(X_1)/E(T_1)+E(Y_1)/E(V_1)$.

定义破产时刻 $T=\inf\{t\geq 0: R(t)<0\}$ (若对所有的 $t\geq 0$ 有 $R(t)\geq 0$, 则 $T=\infty$) 和最终破产概率 $\psi(u)=E\left(I(T<\infty)|R(0)=u\right)$, 其中 $I(A)$ 表示集合 A 的示性函数.

对两类索赔到达风险模型的研究中，[1] 讨论了 $\{N_1(t);\ t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t);\ t\geq 0\}$ 分别为 Poisson 过程和广义 Erlang(2) 过程的情形，[2] 研究了两类过程分别为 Poisson 过程和广义 Erlang(n) 过程的情形，[3] 进一步将两类索赔到达过程分布推广到均为 phase-type 分布，得到了 Gerber-Shiu 期望折现罚函数所满足的积分 - 微分方程以及当两类索赔量分布均为有理族分布时该函数的显式解. 本文在 [3] 的基础上研究多层红利策略时两类索赔到达风险模型的 Gerber-Shiu 期望折现罚函数.

在 L 层阈值风险模型中, 设 $0=d_0<d_1<\cdots<d_{L-1}<d_L=\infty$, 当 $d_{l-1}\leqslant R(t)<d_l$ 时，保费收入率为 c_l, 因此，盈余过程 $\{R(t);\ t\geq 0\}$ 可重写为

$$\mathrm{d}R(t)=c_l\mathrm{d}t-\mathrm{d}S(t),\qquad d_{l-1}\leq R(t)<d_l. \tag{2}$$

在本文中, 假设第一类索赔时间间距 $T_i,\ i=1,2,\cdots$ 的分布函数 $K_1(t)$ 服从 $PH(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A})$ 分布，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^\top$, $\alpha_i\geq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i=1$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是 $n\times n$ 矩阵，满足 $a_{ii}<0$, 当 $i\neq j$ 时， $a_{ij}\geqslant 0$, 和 $\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\leq 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^\top$ 且 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{e}_n$ 是分量均为 1 的 n 维列向量， $\boldsymbol{e}^\top$ 是 $\boldsymbol{e}$ 的转置， $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵. 由 Asmussen[4]:

$$K_1(t)=1-\boldsymbol{\alpha}^\top e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{e}_n,\quad t\geq 0,\qquad k_1(t)=\boldsymbol{\alpha}^\top e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{a},\quad t\geq 0$$

和

$$\widetilde{k}_1(s)=\int_0^\infty e^{-st}k_1(t)\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{\alpha}^\top(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{a}. \tag{3}$$

由 phase-type 分布的定义，索赔时间间距 $T_i,\ i=1,2,\cdots$ 对应于终止连续时间马氏链 $\{I_t^i\}_{t\geq 0}$ 到达吸收状态的时间，其中 $\{I_t^i\}_{t\geq 0}$ 有 n 个瞬时状态 $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ 和一个吸收态 $\{E_0\}$.

同时，假设第二类索赔时间间距 $V_i,\ i=1,2,\cdots$ 的分布函数 $K_2(t)$ 服从 $PH(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{B})$ 分布，其中 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^\top$, $\beta_i\geq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^m\beta_i=1$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{i,j=1}^m$ 是 $m\times m$ 矩阵，满足 $b_{ii}<0$, 当 $i\neq j$ 时， $b_{ij}\geqslant 0$ 和 $\sum\limits_{j=1}^m b_{ij}\leq 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^\top$ 且

$\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_m$, 我们有：

$$K_2(t) = 1 - \boldsymbol{\beta}^\top e^{\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{e}_m, \quad t \geq 0, \qquad k_2(t) = \boldsymbol{\beta}^\top e^{\boldsymbol{B}t}\boldsymbol{b}, \quad t \geq 0$$

和

$$\widetilde{k}_2(s) = \int_0^\infty e^{-st} k_2(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{\beta}^\top (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{4}$$

相应地，第二类索赔时间间距 V_i, $i = 1, 2, \cdots$ 对应于终止连续时间马氏链 $\{J_t^i\}_{t\geq 0}$ 到达吸收状态的时间，其中 $\{J_t^i\}_{t\geq 0}$ 有 m 个瞬时状态 $\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$ 和一个吸收态 $\{F_0\}$.

构建一个二维的 Markov 过程 $\{(I(t), J(t));\ t \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} &I(t) = \{I_t^1\}, \quad 0 \leq t < T_1, \qquad I(t) = \{I_{t-T_1}^2\}, \quad T_1 \leq t < T_1 + T_2, \cdots, \\ &J(t) = \{J_t^1\}, \quad 0 \leq t < V_1, \qquad J(t) = \{J_{t-V_1}^2\}, \quad V_1 \leq t < V_1 + V_2, \cdots. \end{aligned}$$

因此，$\{(I(t), J(t));\ t \geq 0\}$ 的状态空间为 $\big\{(E_1, F_1)(E_2, F_1), \cdots, (E_n, F_1), (E_1, F_2), (E_2, F_2), \cdots, (E_n, F_2), \cdots, (E_1, F_m), (E_2, F_m), \cdots, (E_n, F_m)\big\}$, 初始分布为 $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}$, $\otimes$ 表示两矩阵的 Kronecker 乘积.

设 $w_k(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \geq 0$, $k = 1, 2$ 为两个可能不同的非负函数， $\delta \geq 0$, 由第 k 类索赔引起破产的 Gerber-Shiu 折现罚函数表示为

$$m^{(k)}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_k\big(R(T-), |R(T)|\big)\, I(T < \infty, J = k) | R(0) = u\right], \qquad u \geq 0,$$

其中 $R(T-)$ 表示破产前瞬时盈余， $|R(T)|$ 为破产时赤字.

对 $k = 1, 2,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, m,\ u \geq 0$,

$$m_{ij}^{(k)}(u) = E\big[e^{-\delta T} w_k\big(R(T-), |R(T)|\big)\, I(T < \infty,\ J = k) \mid R(0) = u,\ (I(0), J(0)) = (E_i, F_j)\big],$$

表示初始盈余为 $R(0) = u$, 起始状态为 (E_i, F_j), 由第 k 索赔引起破产的 Gerber-Shiu 函数. 因此，我们有

$$m^{(k)}(u) = \boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{m}^{(k)}(u), \qquad k = 1, 2,$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m}^{(k)}(u) = \big(&m_{11}^{(k)}(u), m_{21}^{(k)}(u), \cdots, m_{n1}^{(k)}(u), m_{12}^{(k)}(u), m_{22}^{(k)}(u), \cdots, m_{n2}^{(k)}(u), \cdots, \\ &m_{1m}^{(k)}(u), m_{2m}^{(k)}(u), \cdots, m_{nm}^{(k)}(u)\big)^\top. \end{aligned}$$

2 Gerber-Shiu 折现罚函数的积分 - 微分方程

定理 1 当 $d_{l-1} \leq u < d_l$, $l = 1, 2, \cdots, L$ 时， $\boldsymbol{m}^{(k)}(u)$, $k = 1, 2$ 分别满足下面的积分

- 微分方程,

$$
\begin{aligned}
& c_l \boldsymbol{m}^{(1)'}(u) - \delta \boldsymbol{m}^{(1)}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) \\
& + \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{m}^{(1)}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top) \int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
& + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n} \int_0^u \boldsymbol{m}^{(1)}(u-x) g(x)\,\mathrm{d}x + (\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{a})\omega_1(u) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{5}
$$

和

$$
\begin{aligned}
& c_l \boldsymbol{m}^{(2)'}(u) - \delta \boldsymbol{m}^{(2)}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes \boldsymbol{A}\boldsymbol{m}^{(2)}(u) \\
& + \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{m}^{(2)}(u) + \boldsymbol{I}_{m\times m} \otimes (\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top) \int_0^u \boldsymbol{m}^{(2)}(u-x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
& + (\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top) \otimes \boldsymbol{I}_{n\times n} \int_0^u \boldsymbol{m}^{(2)}(u-x) g(x)\,\mathrm{d}x + (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{e}_n)\omega_2(u) = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{6}
$$

其中 $\boldsymbol{I}_{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 单位矩阵,

$$
\omega_1(u) = \int_u^\infty w_1(u, x-u) f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \omega_2(u) = \int_u^\infty w_2(u, x-u) g(x)\,\mathrm{d}x,
$$

$\mathbf{0}$ 表示所有分量为 0 的 $n\times m$ 维列向量.

证 利用 [3] 中相似的推导方法，当 $d_{l-1} \le u < d_l$，$l = 1, 2, \cdots, L$ 时，在极小的时间区间 $[0, \mathrm{d}t]$ 内考虑盈余过程状态是否改变以及索赔是否引起破产，我们有

$$
\begin{aligned}
m_{ij}^{(1)}(u) = & e^{-\delta \mathrm{d}t}\Big\{(1 + a_{ii}\mathrm{d}t)(1 + b_{jj}\mathrm{d}t) m_{ij}^{(1)}(u + c_l\mathrm{d}t) \\
& + (1 + b_{jj}\mathrm{d}t) \sum_{k=1, k\ne i}^{n} (a_{ik}\mathrm{d}t) m_{kj}^{(1)}(u + c_l\mathrm{d}t) \\
& + (1 + a_{ii}\mathrm{d}t) \sum_{h=1, h\ne j}^{m} (b_{jh}\mathrm{d}t) m_{ih}^{(1)}(u + c_l\mathrm{d}t) \\
& + (1 + b_{jj}\mathrm{d}t)(a_i\mathrm{d}t)\Big[\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \int_0^{u + c_l\mathrm{d}t} m_{sj}^{(1)}(u + c_l\mathrm{d}t - x) f(x)\,\mathrm{d}x \\
& + \int_{u + c_l\mathrm{d}t}^\infty w_1(u + c_l\mathrm{d}t, x - u - c_l\mathrm{d}t) f(x)\,\mathrm{d}x\Big] \\
& + (1 + a_{ii}\mathrm{d}t)(b_j\mathrm{d}t) \sum_{r=1}^{m} \beta_r \int_0^{u + c_l\mathrm{d}t} m_{ir}^{(1)}(u + c_l\mathrm{d}t - x) g(x)\,\mathrm{d}x\Big\} + o(\mathrm{d}t).
\end{aligned} \tag{7}
$$

利用 Taylor 展式，将 $m_{ij}^{(1)}(u + c_l\mathrm{d}t) = m_{ij}^{(1)}(u) + c_l\mathrm{d}t m_{ij}^{(1)'}(u) + o(\mathrm{d}t)$ 代入上式，同时令 $\mathrm{d}t \to 0$, 通过简单计算后可得

$$
\delta m_{ij}^{(1)}(u) = c_l m_{ij}^{(1)'}(u) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} m_{kj}^{(1)}(u) + \sum_{h=1}^{m} b_{jh} m_{ih}^{(1)}(u)
$$

$$
\begin{aligned}
&+a_i\Big(\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\int_0^u m_{sj}^{(1)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x+\int_u^\infty w_1(u,x-u)f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\\
&+b_j\sum_{r=1}^{m}\beta_r\int_0^u m_{ir}^{(1)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}\tag{8}
$$

令 $\omega_1(u)=\int_u^\infty w_1(u,x-u)f(x)\,\mathrm{d}x$, 将上式写成矩阵形式，可得 (5). 通过同样的推导过程可证明 (6) 成立. 证毕.

注 1 在 (5) 中令 $m=1$, $G(0)=1$, 我们得到 [5] 中的 (3.6), 此时不需要考虑 $\boldsymbol{m}^{(2)}(u)$.

注 2 若两类过程分别为 Poisson 过程与 Erlang(2) 过程，即 $\boldsymbol{\alpha}=(1)$, $\boldsymbol{A}=(-\lambda)$, $\boldsymbol{\beta}^\top=(1,0)$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\lambda_1&\lambda_1\\0&-\lambda_2\end{pmatrix}$, 此时, $\boldsymbol{m}^{(k)}(u)=(m_{11}^{(k)}(u),m_{12}^{(k)}(u))^\top$, $k=1,2$, 当 $d_{l-1}\le u<d_l$, $l=1,2,\cdots,L$ 时，由 (5) 和 (6) 分别有

$$
\begin{aligned}
&c_l\boldsymbol{m}^{(1)'}(u)-\delta\boldsymbol{m}^{(1)}(u)+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\boldsymbol{m}^{(1)}(u)+\begin{pmatrix}-\lambda_1&\lambda_1\\0&-\lambda_2\end{pmatrix}\boldsymbol{m}^{(1)}(u)\\
&+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\int_0^u\boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x+\begin{pmatrix}0&0\\\lambda_2&0\end{pmatrix}\int_0^u\boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x+\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\omega_1(u)=\boldsymbol{0},\\
&c_l\boldsymbol{m}^{(2)'}(u)-\delta\boldsymbol{m}^{(2)}(u)+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\boldsymbol{m}^{(2)}(u)+\begin{pmatrix}-\lambda_1&\lambda_1\\0&-\lambda_2\end{pmatrix}\boldsymbol{m}^{(2)}(u)\\
&+\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\int_0^u\boldsymbol{m}^{(2)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x+\begin{pmatrix}0&0\\\lambda_2&0\end{pmatrix}\int_0^u\boldsymbol{m}^{(2)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x+\begin{pmatrix}0\\\lambda_2\end{pmatrix}\omega_2(u)=\boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

3 拉普拉斯变换

本节的目的是分析积分 - 微分方程 (5) 和 (6) 的解. 参考 [6] 的方法，在 (5) 和 (6) 中，将条件 $d_{l-1}\le u<d_l$ 放松为 $u\ge d_{l-1}$. 设 $\boldsymbol{m}_l^{(k)}(u)$, $k=1,2$, $l=1,\cdots,L$ 分别为下列方程的解,

$$
\begin{aligned}
&c_l\boldsymbol{m}_l^{(1)'}(u)-\delta\boldsymbol{m}_l^{(1)}(u)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_l^{(1)}(u)+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{m}_l^{(1)}(u)\\
&+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top)\Big[\int_0^{u-d_{l-1}}\boldsymbol{m}_l^{(1)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u-d_{l-1}}^u\boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\
&+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\Big[\int_0^{u-d_{l-1}}\boldsymbol{m}_l^{(1)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u-d_{l-1}}^u\boldsymbol{m}^{(1)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\
&+(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a})\omega_1(u)=\boldsymbol{0},\qquad u\ge d_{l-1}
\end{aligned}\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_l\boldsymbol{m}_l^{(2)'}(u)-\delta\boldsymbol{m}_l^{(2)}(u)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{m}_l^{(2)}(u)+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{m}_l^{(2)}(u)\\
&+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top)\Big[\int_0^{u-d_{l-1}}\boldsymbol{m}_l^{(2)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u-d_{l-1}}^u\boldsymbol{m}^{(2)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\
&+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\Big[\int_0^{u-d_{l-1}}\boldsymbol{m}_l^{(2)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{u-d_{l-1}}^u\boldsymbol{m}^{(2)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big]\\
&+(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{e}_n)\omega_2(u)=\boldsymbol{0},\qquad u\ge d_{l-1}.
\end{aligned}\tag{10}
$$

由微分方程理论，可知

$$\boldsymbol{m}^{(k)}(u)=\boldsymbol{m}_l^{(k)}(u)+\sum_{j=1}^{mn}k_{lj}^{(k)}\boldsymbol{V}_{lj}^{(k)}(u),\qquad d_{l-1}\le u<d_l,\quad k=1,2,\tag{11}$$

其中 $k_{lj}^{(k)}$ 为常系数， $\boldsymbol{V}_{lj}^{(k)}(u),\ j=1,2,\cdots,mn,$ 是下面相应的齐次方程的 mn 个线性独立的解,

$$\begin{aligned}&c_l\boldsymbol{V}_l^{(k)'}(u)-\delta\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u)\\&+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a\alpha}^\top)\int_0^{u-d_{l-1}}\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u-x)f(x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{b\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^{u-d_{l-1}}\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x=\boldsymbol{0},\qquad u\ge d_{l-1},\quad k=1,2.\end{aligned}\tag{12}$$

显然，当 $l=L$ 时， $\boldsymbol{m}^{(k)}(u)=\boldsymbol{m}_L^{(k)}(u),\ u\ge d_{L-1},\ k=1,2,$ 此时在上式中 $k_{Lj}^{(k)}=0,\ j=1,\cdots,mn.$

我们首先考虑 $k=1$ 时的情形. 令 $z=u-d_{l-1}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(z)\equiv\boldsymbol{m}_l^{(1)}(u)=\boldsymbol{m}_l^{(1)}(z+d_{l-1})$, 由 (9),

$$\begin{aligned}&c_l\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)'}(z)-\delta\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(z)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(z)\\&+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(z)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a\alpha}^\top)\int_0^{z}\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(z-x)f(x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{b\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^{z}\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(z-x)g(x)\,\mathrm{d}x+\boldsymbol{\Gamma}_l^{(1)}(z)=\boldsymbol{0},\qquad z\ge 0,\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_l^{(1)}(z)=&\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a\alpha}^\top)\int_0^{d_{l-1}}\boldsymbol{m}^{(1)}(x)f(z+d_{l-1}-x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{b\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^{d_{l-1}}\boldsymbol{m}^{(1)}(x)g(z+d_{l-1}-x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a})\omega_1(z+d_{l-1}).\end{aligned}\tag{14}$$

定义拉普拉斯变换： $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_l^{(1)}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x,\ \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(1)}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\boldsymbol{\Gamma}_l^{(1)}(x)\,\mathrm{d}x.$ 对 (13) 式两边同时取拉氏变换，有

$$\begin{aligned}&\big[(c_ls-\delta)\boldsymbol{I}_{mn\times mn}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a\alpha}^\top)\widetilde{f}(s)\\&+(\boldsymbol{b\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\widetilde{g}(s)\big]\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_l^{(1)}(s)=c_l\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(0)-\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(1)}(s),\end{aligned}\tag{15}$$

这里 $\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(0)=\boldsymbol{m}_l^{(1)}(d_{l-1})$.

下面，令 $\boldsymbol{L}_l(s)=(c_ls-\delta)\boldsymbol{I}_{mn\times mn}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a\alpha}^\top)\widetilde{f}(s)+(\boldsymbol{b\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\widetilde{g}(s)$, $\boldsymbol{L}_l{}^*(s)$ 表示 $\boldsymbol{L}_l(s),\ l=1,2,\cdots,L$ 的伴随矩阵. 因此，由 (15), 有

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_l^{(1)}(s)=\frac{\boldsymbol{L}_l{}^*(s)}{\det[\boldsymbol{L}_l(s)]}\big(c_l\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(0)-\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(1)}(s)\big).\tag{16}$$

当 $k=2$ 时，让 $\boldsymbol{\Phi}_l^{(2)}(z)\equiv \boldsymbol{m}_l^{(2)}(u)=\boldsymbol{m}_l^{(2)}(z+d_{l-1})$, 由同样的推导，有

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_l^{(2)}(s)=\frac{\boldsymbol{L}_l{}^*(s)}{\det[\boldsymbol{L}_l(s)]}(c_l\boldsymbol{\Phi}_l^{(2)}(0)-\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(2)}(s)), \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_l^{(2)}(0)=\boldsymbol{m}_l^{(2)}(d_{l-1})$ 和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_l^{(2)}(z)=&\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top)\int_0^{d_{l-1}}\boldsymbol{m}^{(2)}(x)f(z+d_{l-1}-x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^{d_{l-1}}\boldsymbol{m}^{(2)}(x)g(z+d_{l-1}-x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{e}_n)\omega_2(z+d_{l-1}).\end{aligned}\tag{18}$$

由 [3], 对一个给定的 l, 当 $\delta>0$ 时，推广的 Lundberg 方程 $\det[\boldsymbol{L}_l(s)]=0$ 恰好有 mn 个实部大于零的根，分别表示为 $\rho_{l1},\rho_{l2},\cdots,\rho_{l,mn}$, 为简单起见，本文中我们假设这些根互不相等.

下面引入矩阵 $\boldsymbol{L}(s)$ 的差分表示. 对互不相等的数 $r_1,r_2,\cdots$, 通过循环的方式定义 (见 [7]):

$$\boldsymbol{L}[r_1,s]=\frac{\boldsymbol{L}(s)-\boldsymbol{L}(r_1)}{s-r_1},\qquad \boldsymbol{L}[r_1,r_2,s]=\frac{\boldsymbol{L}[r_1,s]-\boldsymbol{L}[r_1,r_2]}{s-r_2},\cdots.$$

因为对所有的 $\Re(s)>0$, 矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_l^{(k)}(s)$, $k=1,2$ 中的元素是有限的，所以 $\rho_{l1},\rho_{l2},\cdots$, $\rho_{l,mn}$ 也是 (16), (17) 中分子的根. 因此，由 (16), 对 $i=1,2,\cdots,mn$, 有

$$\boldsymbol{L}_l{}^*(\rho_{li})c_l\boldsymbol{\Phi}_l^{(1)}(0)=\boldsymbol{L}_l{}^*(\rho_{li})\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(1)}(\rho_{li}).$$

当 $l=1$ 时， $\boldsymbol{\Phi}_1^{(1)\prime}(0)=\boldsymbol{m}_1^{(1)\prime}(0)$, $\boldsymbol{\Phi}_1^{(1)}(0)=\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0)$, $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_1^{(1)}(s)=(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a})\widetilde{\omega}_1(s)$. 因此，上式可以重写为

$$\boldsymbol{L}_1{}^*(\rho_{1i})c_1\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0)=\boldsymbol{L}_1{}^*(\rho_{1i})\widetilde{\omega}_1(\rho_{1i})(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a}).$$

利用矩阵的差分表示定义，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\rho_{12}](c_1\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0))=&\frac{\boldsymbol{L}_1{}^*(\rho_{12})-\boldsymbol{L}_1{}^*(\rho_{11})}{\rho_{12}-\rho_{11}}(c_1\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0))\\=&\frac{\boldsymbol{L}_1{}^*(\rho_{12})\widetilde{\omega}_1(\rho_{12})-\boldsymbol{L}_1{}^*(\rho_{11})\widetilde{\omega}_1(\rho_{11})}{\rho_{12}-\rho_{11}}(\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a})\\=&\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\rho_{1i}]\widetilde{\omega}_1[\rho_{1i},\rho_{12}](\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

依此类推，我们有

$$\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1,mn}](c_1\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0))=\sum_{i=1}^{mn}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1i}]\widetilde{\omega}_1[\rho_{1i},\cdots,\rho_{1,mn}](\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a}).$$

同理可得

$$\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1,mn}](c_1\boldsymbol{m}_1^{(2)}(0))=\sum_{i=1}^{mn}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1i}]\widetilde{\omega}_2[\rho_{1i},\cdots,\rho_{1,mn}](\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{e}_n).$$

因此，我们有下面的定理

定理 2 当初始盈余 $u=0$ 时，$\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0)$ 和 $\boldsymbol{m}_1^{(2)}(0)$ 可分别由下列式子计算

$$\boldsymbol{m}_1^{(1)}(0)=\frac{1}{c_1}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1,mn}]^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{mn}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1i}]\widetilde{\omega}_1[\rho_{1i},\cdots,\rho_{1,mn}](\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{a})\Big),\tag{19}$$

$$\boldsymbol{m}_1^{(2)}(0)=\frac{1}{c_1}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1,mn}]^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{mn}\boldsymbol{L}_1{}^*[\rho_{11},\cdots,\rho_{1i}]\widetilde{\omega}_2[\rho_{1i},\cdots,\rho_{1,mn}](\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{e}_n)\Big).\tag{20}$$

利用同样的推导过程，由 (16) 和 (17), 可得下面的定理

定理 3 $\boldsymbol{\Phi}_l^{(k)}(y)$, $k=1,2$, $l=1,2,\cdots,L$ 的拉氏变换可表示为

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_l^{(k)}(s)=&\frac{\prod_{j=1}^{mn}(s-\rho_{lj})}{\det[\boldsymbol{L}_l(s)]}\Big\{\boldsymbol{L}_l{}^*[\rho_{l1},\cdots,\rho_{l,mn},s]\big(c_l\boldsymbol{\Phi}_l^{(k)}(0)-\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(k)}(s)\big)\\&-\sum_{i=1}^{mn}\boldsymbol{L}_l{}^*[\rho_{l1},\cdots,\rho_{li}]\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_l^{(k)}[\rho_{li},\cdots,\rho_{l,mn},s]\Big\}.\end{aligned}\tag{21}$$

下面讨论齐次方程 (12) 的拉氏解. 利用变量变换 $z=u-d_{l-1}$, 令 $\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(z)\equiv\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u)=\boldsymbol{V}_l^{(k)}(z+d_{l-1})$, $l=1,2,\cdots,L$, 方程 (12) 可写为

$$\begin{aligned}&c_l\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)\prime}(z)-\delta\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(z)+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(z)+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(z)\\&+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top)\int_0^z\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(z-x)f(x)\,\mathrm{d}x\\&+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\int_0^z\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(z-x)g(x)\,\mathrm{d}x=\boldsymbol{0},\qquad z\geq0,\quad k=1,2.\end{aligned}\tag{22}$$

两边同时取拉氏变换，得

$$\begin{aligned}&\big[(c_ls-\delta)\boldsymbol{I}_{mn\times mn}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}+\boldsymbol{I}_{m\times m}\otimes(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}^\top)\widetilde{f}(s)\\&+(\boldsymbol{b}\boldsymbol{\beta}^\top)\otimes\boldsymbol{I}_{n\times n}\widetilde{g}(s)\big]\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_l^{(k)}(s)=c_l\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(0),\end{aligned}\tag{23}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_l^{(k)}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x$. 所以

$$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_l^{(k)}(s)=\frac{\boldsymbol{L}_l{}^*(s)}{\det[\boldsymbol{L}_l(s)]}c_l\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(0).\tag{24}$$

因为 $\boldsymbol{V}_l^{(k)}(d_{l-1})=\boldsymbol{\Xi}_l^{(k)}(0)$, 对上式求逆变换，得

$$\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u)=\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{\boldsymbol{L}_l{}^*(s)}{\det[\boldsymbol{L}_l(s)]}\big(c_l\boldsymbol{V}_l^{(k)}(d_{l-1})\big)\Big\},\qquad u\geq d_{l-1},\quad k=1,2.\tag{25}$$

对于确定的初值条件 $\boldsymbol{V}_l^{(k)}(d_{l-1})$, 由上式可计算 $\boldsymbol{V}_l^{(k)}(u)$.

4 总结

现在，我们总结 $\boldsymbol{m}^{(k)}(u),\ k=1,2$ 的求解步骤.

首先，由 (19), (20) 可计算 $\boldsymbol{m}_1^{(k)}(0),\ k=1,2$, 因为 $\boldsymbol{\Phi}_1^{(k)}(0)=\boldsymbol{m}_1^{(k)}(0)$, 代入 (21), 可得 $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(k)}(s)$, 求其逆变换可得 $\boldsymbol{\Phi}_1^{(k)}(z)$, 即得 $\boldsymbol{m}_1^{(k)}(u)$.

第 2, 对于确定的初值条件，如 $\boldsymbol{V}_1^{(k)}(0)=\boldsymbol{I}$, 由 (25), 可得 mn 个线性独立的解 $\boldsymbol{V}_{1j}^{(k)}(u),\ j=1,2,\cdots,mn$. 因为 $\boldsymbol{m}^{(k)}(u)$ 关于 u 连续，由 (11) 式，有

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\boldsymbol{m}_1^{(k)}(u)+\sum_{j=1}^{mn}k_{1j}^{(k)}\boldsymbol{V}_{1j}^{(k)}(u)\right)=\boldsymbol{m}_1^{(k)}(0),\qquad k=1,2. \tag{26}$$

通过解方程组 (26), 可求出 $k_{1j}^{(k)},\ j=1,\cdots,mn$, 从而，可得 $\boldsymbol{m}^{(k)}(u),\ 0\le u<d_1$.

第 3, 利用 $\boldsymbol{m}_l^{(k)}(u)$ 的连续性，即 $\boldsymbol{m}_1^{(k)}(d_1)=\boldsymbol{m}_2^{(k)}(d_1)$, 由 (21) 计算 $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_2^{(k)}(s)$, 从而得到 $\boldsymbol{m}_2(u)$. 通过确定的初值条件 $\boldsymbol{V}_2^{(k)}(d_1)$, 由 (25), 可得 mn 个线性独立的解 $\boldsymbol{V}_{2j}^{(k)}(u),\ j=1,2,\cdots,mn$. 由 (5) 和 (6),

$$\begin{aligned}&c_1\lim_{u\to d_1^-}\left(\boldsymbol{m}_1^{(k)}(u)+\sum_{j=1}^{n}k_{1j}^{(k)}\boldsymbol{V}_{1j}^{(k)}(u)\right)'\\=&c_2\lim_{u\to d_1^+}\left(\boldsymbol{m}_2^{(k)}(u)+\sum_{j=1}^{n}k_{2j}^{(k)}\boldsymbol{V}_{2j}^{(k)}(u)\right)',\qquad k=1,2.\end{aligned} \tag{27}$$

由上式，可得 $k_{2j}^{(k)},\ j=1,\cdots,mn$, 因此，可得 $\boldsymbol{m}^{(k)}(u), d_1\le u<d_2$.

所以，通过循环的计算，我们可以求出 $\boldsymbol{m}_l^{(k)}(u),\ l=2,\cdots,L$, 并且，当 $u\ge d_{L-1}$ 时，$\boldsymbol{m}_L^{(k)}(u)=\boldsymbol{m}^{(k)}(u)$, 即，此时 $k_{Lj}=0, j=1,\cdots,mn$.

特别地,当两类索赔数量分布均为有理族时,通过求拉普拉斯逆变换可以得到 $\boldsymbol{m}^{(k)}(u)$ 的显式解.

本文对多阈值分红策略的两类索赔到达风险模型中的 Gerber-Shiu 折现罚函数进行了研究，首先建立了该函数满足的积分 - 微分方程，利用 [6] 的方法和微分方程的一般理论对积分 - 微分方程的解进行了分析，并通过拉普拉斯变换方法得到了方程的拉氏解．本文研究的风险模型和得到的结果是 [3] 的自然推广.

参 考 文 献

[1] Li S, Lu Y. On the Expected Discounted Penalty Functions for Two Classes of Risk Processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 36: 179–197

[2] Zhang Z M, Li S, Yang H. The Gerber-Shiu Discounted Penalty Functions for a Risk Model with Two Classes of Claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, 230: 643–655

[3] Ji L, Zhang C. The Gerber-Shiu Penalty Functions for Two Classes of Renewal Risk Processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, 233: 2575–2589

[4] Asmussen S. Ruin Probabilities. Singapore: World Scientific, 2000

[5] Jiang W Y, Yang Z J, Li X P. The Discounted Penalty Function with Multi-layer Dividend Strategy in the Phase-type Risk Model. *Statistics and Probability Letters*, 2012, 82: 1358–1366

[6] Lin X S, Sendova K P. The Compound Poisson Risk Model with Multiple Thresholds. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42: 617–627

[7] Lu Y, Li S. The Markovian Regime-switching Risk Model with a Threshold Divident Strategy. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44: 296–303

The Expected Discounted Penalty Function for a Risk Model with Two Classes of Claims under Multiple Thresholds

JIANG Wuyuan

(*Department of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang* 414006)

(*E-mail: csujw@163.com*)

YANG Zhaojun

(*School of Finance and Statistics, Hunan University, Changsha* 410079)

Abstract In this paper, we consider two independent classes of risk models under multiple thresholds in which both of the two inter-claim times have phase-type distributions. We obtain the integro-differential equations with boundary conditions for the expected discounted penalty function. Last, we discuss the solutions through Laplace transforms.

Key words two classes of risk processes; Gerber-Shiu penalty function; multiple thresholds; phase-type distribution

MR(2000) Subject Classification 62P05; 91B30

Chinese Library Classification O211.6